







Archiv de
mathem
und physi





Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Dreiunddreissigster Theil.

Mit zwei lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1859.

Inhaltsverzeichniss des dreiunddreissigsten Theils.

Arithmetik.

Trigonometrie.

Geodäsie.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Literarische Berichte *).

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

I.

Zerlegung der Gleichung $x^2-fgy^2=\pm 1$ in Faktoren*).

Von

Herrn Professor Dr. *König*

am Kneiphöf'schen Gymnasium zu Königsberg i. P.

---

§. 1.

Setzt man die Gleichung

$$x^2-fgy^2=1$$

gleich dem Produkte der 4 Faktoren:

$$\begin{aligned}
a+b\sqrt{f}+c\sqrt{g}+d\sqrt{fg}&=A,\\
a-b\sqrt{f}-c\sqrt{g}+d\sqrt{fg}&=B,\\
a+b\sqrt{f}-c\sqrt{g}-d\sqrt{fg}&=C,\\
a-b\sqrt{f}+c\sqrt{g}-d\sqrt{fg}&=D;
\end{aligned}$$

so lassen sich zur Berechnung der Zahlenwerthe von a, b, c, d allgemeine Formeln auffinden, die hier nebst kurzer Angabe ihrer Ableitung folgen mögen.

Zunächst ist:

$$\text{I.}\ \begin{cases} A.B=(a^2-fb^2-gc^2+fgd^2)+2(ad-bc)\sqrt{fg} \\ C.D=\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad -\quad\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\text{II.}\ \begin{cases} A.C=(a^2+fb^2-gc^2-fgd^2)+2(ab-gcd)\sqrt{f} \\ B.D=\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad -\quad\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\text{III.}\ \begin{cases} A.D=(a^2-fb^2+gc^2-fgd^2)+2(ac-fbd)\sqrt{g} \\ B.C=\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad -\quad\ldots\ldots \end{cases}$$

---

*) Auszug aus einem von mir geschriebenen Schulprogramme. K.

und wenn man

$$1)\ a^2-fb^2-gc^2+fgd^2=\pm m,\quad 2(ad-bc)=\pm n,$$

$$2)\ a^2+fb^2-gc^2-fgd^2=\pm m',\quad 2(ab-gcd)=\pm n',$$

$$3)\ a^2-fb^2+gc^2-fgd^2=\pm m'',\quad 2(ac-fbd)=\pm n''$$

setzt:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I. } A.B.C.D = m^2-fgn^2=1 \\ \text{II. } \ldots\ldots = m'^2-fn'^2=1 \\ \text{III. } \ldots\ldots = m''^2-gn''^2=1 \end{array}\right\}\quad (A)$$

Da die m (und n) aus diesen Gleichungen gefunden werden können, so hat man die Unbekannten a, b, c, d nun durch sie auszudrücken, wofür ich zwei Auflösungen gefunden habe*).

§. 2.

Erste Auflösung.

Setzt man 4) $a^2+fb^2+gc^2+fgd^2=z$ und nimmt die m vorläufig positiv an, so erhält man durch Verbindung der Gleichungen 1) bis 4):

$$\left.\begin{array}{ll} 4a^2 = m+m'+m''+z, \\ 4fb^2 = -m+m'-m''+z=4a^2-2(m+m''), \\ 4gc^2 = -m-m'+m''+z=4a^2-2(m+m'), \\ 4fgd^2 = m-m'-m''+z=4a^2-2(m'+m''); \end{array}\right\}\quad (B)$$

hat also nur noch z zu bestimmen.

---

*) Der Prof. C. G. J. Jacobi, der mir obige Zerlegung mittheilte, wünschte aus den Gleichungen

$$1)+2)\quad a^2-gc^2=\pm\frac{m+m'}{2},$$

$$1)+3)\quad a^2-fb^2=\pm\frac{m+m''}{2},$$

$$2)+3)\quad a^2-fgd^2=\pm\frac{m'+m''}{2}$$

für a, b, c, d, wofür er damals allgemeine Formeln nicht kannte, einige Werthe durch Versuchen berechnet zu erhalten. Nachdem ich ihm zu seiner Ueberraschung meine Formeln gezeigt hatte, muss er sich eigene

Entwickelt man $A.B.C.D = 1$, ferner z^2, m^2, m'^2, m''^2, so ist:

$$z^2 - (m^2 + m'^2 + m''^2) + 2A.B.C.D,$$

d. h.

$$z^2 - (m^2 + m'^2 + m''^2) + 2 = 16fg\,a.b.c.d.$$

Entwickelt man auch $(A.B.C.D)^2 = 1$, $mm'm''z$, $m^2m'^2$, $m^2m''^2$, $m'^2m''^2$, so wird auch:

$$2mm'm''z - (m^2m'^2 + m^2m''^2 + m'^2m''^2) + (A.B.C.D)^2,$$

d. h.

$$2mm'm''z - (m^2m'^2 + m^2m''^2 + m'^2m''^2) + 1 = 16fg.abcd.$$

Durch Gleichsetzung beider Werthe ergiebt sich:

$$z = mm'm'' \pm \sqrt{(m^2-1)(m'^2-1)(m''^2-1)}$$

$$= mm'm'' \pm fgnn'n'',$$

also:

$$4a^2 = m + m' + m'' + mm'm'' \pm \sqrt{(m^2-1)(m'^2-1)(m''^2-1)}.$$

§. 3.

Zweite Auflösung.

Dasselbe Resultat erhält man durch eine ungleich einfachere Rechnung auf folgende Weise. Es ist

$$4a = A + B + C + D,$$

also:

$$16a^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2(A.B + A.C + A.D + B.C + B.D + C.D),$$

oder, da

$$A^2 = A.C \times A.D \times A.B, \quad B^2 = B.D \times B.C \times A.B,$$

$$C^2 = A.C \times B.C \times C.D, \quad D^2 = A.D \times B.D \times C.D:$$

$$16a^2 = A.C(A.B \times A.D + B.C \times C.D) + B.D(A.B \times B.C + A.D \times C.D)$$

$$+ 2(A.B + A.C + A.D + B.C + B.D + C.D).$$

---

entwickelt haben, denn er schrieb mir: „Meine Formeln unterscheiden sich von den Ihrigen dadurch, dass a, b, c, d auch Halbe und bisweilen Viertel werden.“ Die meinigen geben immer ganze Zahlen; die seinigen kenne ich nicht.

Nun ist aber

$$A.B+C.D=2m,$$

$$A.B-C.D=\pm 2n\sqrt{fg}=\pm 2\sqrt{(m^2-1)};$$

also:

$$A.B=m\pm\sqrt{(m^2-1)},\quad C.D=m\mp\sqrt{(m^2-1)};$$

eben so:

$$A.C=m'\pm\sqrt{(m'^2-1)},\quad B.D=m'\mp\sqrt{(m'^2-1)};$$

$$A.D=m''\pm\sqrt{(m''^2-1)},\quad B.C=m''\mp\sqrt{(m''^2-1)};$$

welche Werthe in $16a^2$ substituirt obigen Ausdruck für $4a^2$ geben. b, c, d am bequemsten aus (B) §. 2.

§. 4.

Die gefundenen Ausdrücke für $4a^2$ u. s. w. lassen sich noch unter eine bequemere Form bringen. Da nämlich:

$$m+m'+m''+mm'm''=\frac{m+1.m'+1.m''+1}{2}+\frac{m-1.m'-1.m''-1}{2},$$

$$-m+m'-m''+mm'm''=\frac{m+1.m'-1.m''+1}{2}+\frac{m-1.m'+1.m''-1}{2},$$

$$-m-m'+m''+mm'm''=\frac{m+1.m'+1.m''-1}{2}+\frac{m-1.m'-1.m''-1}{2},$$

$$m-m'-m''+mm'm''=\frac{m-1.m'+1.m''+1}{2}+\frac{m+1.m'-1.m''-1}{2};$$

so erhält man, wenn man noch $m+1=2v$, $m'+1=2v'$, $m''+1=2v''$ setzt:

$$a^2=vv'v''+(v-1)(v'-1)(v''-1)\pm 2\sqrt{vv'v''(v-1)(v'-1)(v''-1)},$$

$$a=\pm\sqrt{vv'v''}\pm\sqrt{(v-1)(v'-1)(v''-1)},$$

u. s. w.

Da die negativen Werthe nur die Zeichen von A, B, C, D ändern, so können die negativen Zeichen von den ersten oder zweiten Gliedern fortbleiben. Zwei positive und zwei negative würden die Faktoren nur vertauschen, oder, wenn a unter den negativen, vertauschen und zugleich die Zeichen ändern. Drei positive und eine negative oder umgekehrt können nicht zusammengehören, indem dadurch die absoluten Werthe der n geändert

werden, während die der m^2 für jede Verbindung der Zeichen von a, b, c, d sich gleich bleiben, was gegen die Pell'schen Gleichungen (A) streitet. Will man also bloss die kleinern Werthe von a, b, c, d haben, so kann man auch vor einem der Glieder das positive Zeichen fortlassen, wo dann die sich etwa ergebenden negativen Zahlen positiv zu nehmen sind. Es ist also:

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{vv'v''} - \sqrt{(v-1)(v'-1)(v''-1)}, \\ b &= \sqrt{\frac{v(v'-1)v''}{f}} - \sqrt{\frac{(v'-1)v(v''-1)}{f}}, \\ c &= \sqrt{\frac{vv'(v''-1)}{g}} - \sqrt{\frac{(v-1)(v'-1)v''}{g}}, \\ d &= \sqrt{\frac{(v-1)v'v''}{fg}} - \sqrt{\frac{v(v'-1)(v''-1)}{fg}}; \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

oder auch, da

$$f = \frac{m'^2 - 1}{2} = \frac{4v'(v'-1)}{n'^2}, \quad g = \frac{m''^2 - 1}{2} = \frac{4v''(v''-1)}{n''^2},$$

$$fg = \frac{m^2 - 1}{2} = \frac{4v(v-1)}{n^2}$$

ist:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{vv'v''} - \sqrt{(v-1)(v'-1)(v''-1)}, \\ b &= \frac{n'}{2}\left\{\sqrt{\frac{vv''}{v'}} - \sqrt{\frac{(v-1)(v''-1)}{v'-1}}\right\}, \\ c &= \frac{n''}{2}\left\{\sqrt{\frac{vv'}{v''}} - \sqrt{\frac{(v-1)(v'-1)}{v''-1}}\right\}, \\ d &= \frac{n}{2}\left\{\sqrt{\frac{v'v''}{v}} - \sqrt{\frac{(v'-1)(v''-1)}{v-1}}\right\}. \end{aligned}$$

Anmerkung. 1. Der Ausdruck für a löst auch die Aufgabe:

> Drei Zahlen zu suchen, so dass sowohl ihr Produkt, wie auch das der um 1 kleinern (oder grösseren) vollständige Quadrate werden, z. B.:

$$2.5.10 = 10^2, \quad 2.8.64 = 32^2, \quad 4.-11.-99 = 66^2,$$

$$1.4.9 = 6^2, \quad 1.7.63 = 21^2, \quad 3.-12.-100 = 60^2.$$

Diese Zahlen und die um 1 kleineren (oder grösseren) haben auch, wie die letzten Ausdrücke für b, c, d zeigen, die Eigenschaft, dass das Produkt je zweier durch die dritte ein vollständiges Quadrat ist.

2. **Die Ausdrücke für b, c, d der Gleichungen (C) lösen die Aufgabe:**

Drei Zahlen zu suchen, die so beschaffen sind, dass ihr Produkt und auch das der Zahlen, die man erhält, wenn man die eine derselben um 1 verkleinert (oder vergrössert), die beiden andern um 1 vergrössert (oder verkleinert), gleich, und zwar gegebene Vielfache von Quadraten werden. Z. B.:

$$2.4.\ 9=2.6^2,\quad 1.5.\ 9=5.3^2,\quad 4.-12.-\ 99=33.12^2,$$

$$1.5.10=2.5^2,\quad 2.4.10=5.4^2,\quad 3.-11.-100=33.10^2.$$

§. 5.

Die Zeichen der m anlangend, sieht man, dass, da

$$z=a^2+fb^2+gc^2+fgd^2$$

positiv sein muss, also $mm'm''$ wegen

$$z=mm'm''\pm\sqrt{(m^2-1)(m'^2-1)(m''^2-1)}$$

nur positiv sein kann, die m alle positiv sein müssen, oder das eine positiv, die beiden andern negativ.

Um die kleinsten Werthe zu erhalten, beginne man die Rechnung nach den Formeln (C) am bequemsten mit den positiven m, und sehe zu, falls a irrational wird, ob $\frac{vv'v''}{f}$, oder $\frac{vv'v''}{g}$, oder $\frac{vv'v''}{fg}$ ein vollständiges Quadrat ist, wo dann im ersten Falle b, im zweiten c, im dritten d rational gefunden wird, und im ersten Falle m und m'', im zweiten m und m', im dritten m' und m'' negativ zu nehmen sind (vergl. (B)). Dass aber immer rationale Werthe vorhanden sind, zeigt entschieden die rationale Form, welche die allgemeinen Ausdrücke annehmen, wenn man im Kettenbruche bis ans Ende der zweiten Periode geht, d. h. wenn man $2m^2-1$, $2m'^2-1$, $2m''^2-1$ für m, m', m'', also m^2, m'^2, m''^2 für v, v', v'' setzt und noch fgn^2, fn'^2, gn''^2 für m^2-1, m'^2-1, m''^2-1 schreibt. Dadurch entsteht, wenn man die entsprechenden Buchstaben mit Accenten versieht:

$$\left.\begin{aligned} a' &= mm'm'' - fgnn'n'', \\ b' &= mm''n'' - gm'nn'', \\ c' &= mm'n'' - fm''nn', \\ d &= m'm''n - mn'n''; \end{aligned}\right\} \quad (D)$$

welche Formeln für jede nur statthafte Zeichenverbindung dieselben absoluten Werthe für a', b', c', d' und immer eine Auflösung in rationalen ganzen Zahlen geben.

Nach (C) und (D) ist Taf. I. berechnet.

§. 6.

Nimmt man in (C) nur eine Wurzel positiv, die andere negativ, dann ist für dieselben m: $a' > a$, $b' > b$, $c' > c$, $d' > d$. Nämlich:

$$a' = mm'm'' - fgnn'n''$$

$$= z = a^2 + fb^2 + gc^2 + fgd^2 > a. \text{ (§. 2.)}$$

Quadrirt man den Ausdruck für b' und setzt für die n^2 die Werthe durch die m aus den Gleichungen (A), so erhält man:

$$fb'^2 = 2mm'm''(mm'm'' - fgnn'n'') + m'^2(m^2 - 1)(m''^2 - 1)$$

$$- m^2m'^2m''^2 - m^2m''^2$$

$$= 2mm'm''z - (m^2m'^2 + m^2m''^2 + m'^2m''^2) + m'^2$$

$$= 16fgabcd + m'^2 - 1. \text{ (§. 2)}$$

$$= 16fgabcd - fn'^2,$$

also:

$$b'^2 = 16gabcd - n'^2,$$

und da nach §. 1. $n' = 2(ab - gcd)$, so ist:

$$b'^2 = 8gabcd + 4a^2b^2 + 4g^2c^2d^2$$

$$= 4(ab + gcd)^2,$$

endlich $b' = 2(ab + gcd) > b$.

Durch dieselbe Rechnung findet man:

$$c' = 2(ac + fbd) > c$$

$$d' = 2(ad + bc) > d.$$

Aus dieser Relation zwischen den aus denselben m erhaltenen gestrichenen und ungestrichenen Buchstaben folgt auch, dass, wenn man die sich aus a', b', c', d ergebenden, den Faktoren A, B, C, D entsprechenden Faktoren mit A', B', C', D' bezeichnet, $A' = A^2$, $B' = B^2$, $C' = C^2$, $D' = D^2$ ist. Nämlich:

$$(a+b\sqrt{f}+c\sqrt{g}+d\sqrt{fg})^2=(a^2+fb^2+gc^2+fgd^2)+2(ab+gcd)\sqrt{f}$$
$$+2(ac+fbd)\sqrt{g}+2(ad+bc)\sqrt{fg}$$
$$=a'+b'\sqrt{f}+c'\sqrt{g}+d'\sqrt{fg},$$

d. h.

$$A^2=A'.$$

Für $f=2$, $g=3$ ist $a=b=d=1$, $c=0$; $a'=9$, $b'=2$, $c'=4$, $d''=2$, und in der That ist:

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{6})^2=9+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}.$$

§. 7.

Bei der Zerlegung der Gleichung

$$x^2-fgy^2=-1$$

in Faktoren von derselben Form erhält man nach der ersten Auflösung §. 2.

$$z^2-(m^2+m'^2+m''^2)-2=m^2m'^2+m^2m''^2+m'^2m''^2-mm'm''z-1$$
$$=16fg\,abcd,$$

woraus

$$z=-mm'm''+\sqrt{(m^2+1)(m'^2+1)(m''^2+1)}=-mm'm''+W$$
$$=-mm'm''+fgnn'n'',$$

und dann dieselben Formeln (B) §. 2.

Da z positiv sein muss, so darf die Wurzelgrösse nicht negativ genommen werden. Dieses ist weniger einleuchtend nach der zweiten Lösung §. 3., die übrigens dasselbe $4a^2$ u. s. w. giebt.

§. 8.

Die den Werthen für a, b, c, d des §. 4. analogen Ausdrücke erscheinen hier unter imaginärer Form. Es ist nämlich, wenn $\sqrt{-1}=i$ gesetzt wird:

$$m+m'+m''-mm'm''=\frac{(m+i)(m'+i)(m''+i)}{2}-\frac{(m-i)(m'-i)(m''-i)}{2},$$

$$-m+m'-m''-mm'm''=\frac{(m+i)(m'-i)(m''+i)}{2}-\frac{(m-i)(m'+i)(m''-i)}{2},$$

$$-m-m'+m''-mm'm''=\frac{(m+i)(m'+i)(m''-i)}{2}-\frac{(m-i)(m'-i)(m''+i)}{2},$$

$$m-m'-m''-mm'm''=\frac{(m-i)(m'+i)(m''+i)}{2}-\frac{(m+i)(m'-i)(m''-i)}{2};$$

also, wenn man

$$m+i=2v,\quad m'+i=2v',\quad m''+i=2v''$$

setzt:

$$a=\{\sqrt{vv'v''}-\sqrt{(v-i)(v'-i)(v''-i)}\}i,$$

$$b=\left\{\sqrt{\frac{v(v'-i)v''}{f}}-\sqrt{\frac{(v-i)v'(v''-i)}{f}}\right\}i,$$

$$c=\left\{\sqrt{\frac{vv'(v''-i)}{g}}-\sqrt{\frac{(v-i)(v'-i)v''}{g}}\right\}i,$$

$$d=\left\{\sqrt{\frac{(v-i)v'v''}{fg}}-\sqrt{\frac{v(v'-i)(v''-i)}{fg}}\right\}i;$$

oder für f, g, fg die Werthe durch die n gesetzt:

$$a=\{\sqrt{vv'v''}-\sqrt{(v-i)(v'-i)(v''-i)}\}i,$$

$$b=\frac{n'}{2}\left\{\sqrt{\frac{vv''}{v'}}-\sqrt{\frac{(v-i)(v''-i)}{v'-i}}\right\}i,$$

$$c=\frac{n''}{2}\left\{\sqrt{\frac{vv'}{v''}}-\sqrt{\frac{(v-i)(v'-i)}{v''-i}}\right\}i,$$

$$d=\frac{n}{2}\left\{\sqrt{\frac{v'v''}{v}}-\sqrt{\frac{(v'-i)(v''-i)}{v-i}}\right\}i.$$

Da a^2 rational ist, so müssen $vv'v''$ und $(v-i)(v'-i)(v''-i)$ conjugirte imaginäre Ausdrücke sein; wirklich ist:

$$8vv'v''=(mm'm''-m-m'-m'')+(mm'+mm''+m'm''-1)i,$$

$$8(v-i)(v'-i)(v''-i)=(mm'm''-m-m'-m'')-(mm'+mm''+m'm''-1)i.$$

§. 9.

Hier sind die Zeichen der m nicht dadurch bedingt, dass $mm'm''$ positiv werden muss, wie das bei der Gleichung $x^2-fgy^2=1$ der Fall war, vielmehr können sämmtliche Zeichenverbindungen stattfinden. Wie viele derselben nun geben rationale Werthe?

Ist für eine Zeichenverbindung der m, z. B. wenn alle positiv sind:

$$4a^2=fgnn'n''+(m+m'+m''-mm'm''),$$

so ist für die entgegengesetzten m (der dem a entsprechende Werth mit a^1 bezeichnet):

$$4a'^2 = fgnn'n'' - (m + m' + m'' - mm'm''),$$

woraus:

$$4aa' = mm' + mm'' + m'm'' - 1;$$

a und a' sind also zugleich rational oder irrational.

Es gebe nun etwa $-m$, $+m'$, $+m''$ ein vollständiges Quadrat für $4a^2$ (also auch m, $-m'$, $-m''$ ein vollständiges Quadrat für $4a'^2$), so ist z. B. für $-m$, $+m'$, $-m''$, d. h. wenn nur ein m, hier m'', das Zeichen ändert, und die entsprechenden Werthe mit α, β, γ, δ bezeichnet werden:

$$4a^2 = -m + m' + m'' + mm'm'' + W,$$

$$4\alpha^2 = -m + m' - m'' - mm'm'' + W;$$

$$\begin{aligned} 4g\gamma^2 &= 4\alpha^2 - 2(-m + m') \\ &= m - m' - m'' - mm'm'' + W \\ &= 4a'^2, \end{aligned}$$

folglich

$$\gamma = \frac{a'}{\sqrt{g}}$$

nur rational für g gleich einem Quadrate gegen die dritte der Pell'schen Gleichungen (A) (wenn man rechts -1 setzt).

Aenderte man das Zeichen von m' oder m'', so müsste resp. f oder fg ein Quadrat sein. Aendern zwei m das Zeichen, z. B. m' und m'', so ist:

$$4\alpha^2 = -m - m' - m'' + mm'm'' + W,$$

$$\begin{aligned} 4fg\delta^2 &= -m - m' - m'' + mm'm'' + W \\ &= 4\alpha^2 - 2(-m' - m'') \\ &= -m + m' + m'' + mm'm'' + W \\ &= 4a^2, \end{aligned}$$

also:

$$\delta = \frac{a}{\sqrt{fg}}.$$

Sollten m und m'' oder m und m' die Zeichen ändern, so müssten

resp. f oder g Quadrate sein. Sind also überhaupt rationale Werthe für a, b, c, d vorhanden, so können nur zwei von den 8 Zeichenverbindungen der m solche geben, und zwar sind die Zeichen der einen denen der andern entgegengesetzt. Z. B. ist für $f=2$, $g=5$:

$$m=-3,\ m'=1,\ m''=2: a=2,\quad b=\tfrac{1}{2},\ c=1,\ d=\tfrac{1}{2}$$
$$=3,\qquad =-1,\ =-2: a'=1,\ b'=\tfrac{1}{2},\ c'=0,\ d'=\tfrac{1}{2}.$$

Dass übrigens für a, b, c, d nicht lauter ganze Zahlen herauskommen können, folgt aus den Gleichungen $2(ad-bc)=n$ u. s. w. (§. 1.), da in diesem Falle nur ungerade n die Pell'schen Gleichungen lösen. a und b oder a und c werden ganze Zahlen, wenn resp. g oder f gerade Zahlen sind; d dagegen kann nicht ganz werden. Dieses folgt aus den Relationen:

$$a^2+a'^2=\frac{fgnn'n''}{2},\quad b^2+b'^2=\frac{gnn'n''}{2},$$
$$c^2+c'^2=\frac{fnn'n''}{2},\quad d^2+d'^2=\frac{nn'n''}{2}$$

§. 2. (B), wenn man für z den Werth aus §. 7. setzt.

Taf. I.

$x^2 - fgy^2 = 1.$

f	g	a	b	c	d	f	g	a	b	c	d
2	3	1	1	0	1	5	10	8	1	1	1
		7	5	4	3		11	18	6	5	2
		9	2	4	2		13	37	14	10	4
		6	2	1	2		14	285	60	36	34
		54	38	31	22		15	17	14	8	2
	5	4	1	1	1		17	461	118	64	50
		16	11	7	5		18	2	1	1	0
								38	17	9	4
	7	11	5	4	2		19	218	61	50	14
		53	37	20	14	6	7	9	2	4	1
	10	13	7	3	3		8	9	2	1	1
	11	41	29	12	9		10	65	22	18	8
	13	40	25	11	7		11	19	7	6	2
	15	12	2	1	2		12	1	1	1	0
	17	7	5	2	1			17	7	5	2
	19	279	231	64	53						
	20	33	18	6	5		13	30	11	9	3
3	5	1	2	2	0		14	93	30	20	10
		31	18	14	8		15	20	2	1	2
	6	1	2	1	0		17	11	3	2	1
		17	10	7	4		18	31	7	4	3
	7	12	6	5	2		19	1229	497	282	114
	10	23	4	6	2	7	8	1	0	3	1
	11	6	7	2	2			24	7	6	3
	13	22	7	6	2		10	276	141	118	33
	14	2	1	1	0		11	6	4	5	0
		26	15	7	4			360	30	24	41
	15	377	196	88	56		12	12	5	3	1
	17	43	38	16	6		13	1431	804	590	150
	18	7	10	4	1		14	120	25	18	12
	19	414	218	95	50		15	52	12	8	5
5	6	15	4	2	2		17	87	56	36	8
	7	9	6	4	2		18	24	7	4	2
	8	6	9	7	1		19	12108	4797	2790	1050

Taf. II.

$$x^2 - fgy^2 = -1$$

f	g	a	b	c	d	f	g	a	b	c	d
2	5	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5	50	30	25	$\frac{79}{10}$	$\frac{19}{10}$
		2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$		53	$\frac{505}{2}$	$\frac{231}{2}$	$\frac{71}{2}$	$\frac{31}{2}$
	13	4	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$		58	11	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
	29	26	$\frac{39}{2}$	5	$\frac{7}{2}$		65	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$
	37	4	$\frac{9}{2}$	1	$\frac{1}{2}$		73	$\frac{935}{2}$	$\frac{417}{2}$	$\frac{109}{2}$	$\frac{49}{2}$
	41	6	$\frac{7}{2}$	1	$\frac{1}{2}$		85	$\frac{155}{2}$	$\frac{69}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{37}{10}$
	53	273	$\frac{391}{2}$	38	$\frac{53}{2}$		89	$\frac{739}{2}$	$\frac{333}{2}$	$\frac{79}{2}$	$\frac{35}{2}$
	61	164	$\frac{289}{2}$	21	$\frac{37}{2}$	10	13	5	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{1}{2}$
	65	6	$\frac{11}{2}$	1	$\frac{1}{2}$		29	6	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
5	10	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$		53	15	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{1}{2}$
		5	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{10}$	13	26	13	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{19}{26}$
	13	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		37	$\frac{1601}{2}$	$\frac{221}{2}$	$\frac{131}{2}$	$\frac{73}{2}$
	17	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$		41	$\frac{115}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
	26	6	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		65	$\frac{65}{2}$	$\frac{47}{2}$	$\frac{21}{1}$	$\frac{29}{26}$
	29	$\frac{17}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	17	37	$\frac{25}{2}$	$\frac{31}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{1}{2}$
	37	$\frac{13}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		41	$\frac{25}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

II.

Das sphärische Dreieck dargestellt in seinen Beziehungen zum Kreis. (Fortsetzung der Abhandlung in Thl. XXIX. S. 479.)

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lehrer der Mathematik in der k. k. österreichischen Kriegs-Marine, eingeschifft auf Sr. Maj. Propeller-Fregatte Donau.

Einleitung.

Der Inhalt dieser Abhandlung schliesst sich an die oben citirte an und ist als ein weiterer Verfolg der dort gepflogenen Untersuchungen nur in Verbindung mit dieser verständlich, da derselbe in allen seinen Theilen sich auf dort gefundene Relationen und Sätze stützt, was ich hier am Eingange ausdrücklich bemerke, um dem Leser den Standpunkt zu bezeichnen, welchen er einnehmen muss, die hier und dort gewonnenen Resultate mit Verständniss und im Zusammenhange zu überblicken, Resultate, welche zum grösseren Theile in der kurzen und ausdrucksvollen mathematischen Zeichensprache gegeben worden sind und auch hier in dieser gegeben werden, und welche, sobald man die durch die erhaltenen Formeln definirten allgemeinen geometrischen Eigenschaften des sphärischen Dreiecks in die gewöhnliche Wortsprache übersetzt, eine Reihe von Lehrsätzen ergeben, welche von einer künftig zu bearbeitenden sphärischen Geometrie einen Theil ausmachen. Ich bin keineswegs der Ansicht, dass mit dem hier Gebotenen die Beziehungen des sphärischen Dreiecks zum Kreis oder wohl gar die allgemeinen Eigenschaften des sphärischen

Dreieckes überhaupt erschöpft seien, sondern meine Untersuchungen haben mich frühzeitig von dem Reichthum des hier betretenen Gebietes überzeugt und wir wollen daher den in diese Richtung einschlagenden Studien mit Eifer obliegen und das bereits Gewonnene weniger als eine wirkliche Vermehrung unserer Kenntnisse der Gesetze dieser Raumgestalten, denn als ein Formeldepot zur Erleichterung künftiger Forschungen betrachten.

§. 31.

Fällt man vom Mittelpunkt des einem sphärischen Dreieck eingeschriebenen Kreises auf die drei Seiten Perpendikel, so werden die Seiten desselben in Abschnitte getheilt, welche paarweise einander gleich sind. Bezeichnet man die an den Winkeln A, B, C liegenden Segmente der Reihe nach mit u, v, w, so ist nach §. 3.:

$$(67)\quad u=\tfrac{1}{2}(b+c-a),\ v=\tfrac{1}{2}(a+c-b),\ w=\tfrac{1}{2}(a+b-c),$$
$$u+v+w=\tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

Verbindet man den Mittelpunkt des einem sphärischen Dreieck umschriebenen Kreises mit den drei Ecken, so werden die Dreieckswinkel A, B, C je in zwei Theile getheilt, von welchen sechs Winkeln wieder zwei und zwei einander gleich sind. Sind u_1, v_1, w_1 die drei an den Seiten a, b, c liegenden Winkelsegmente, so ist, wenn der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises innerhalb des Dreieckes liegt, nach §. 19.:

$$(68)$$
$$u_1=\tfrac{1}{2}(B+C-A),\ v_1=\tfrac{1}{2}(A+C-B),\ w_1=\tfrac{1}{2}(A+B-C),$$
$$u_1+v_1+w_1=\tfrac{1}{2}(A+B+C).$$

Liegt der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ausser dem Dreieck und dem Winkel A gegenüber, so ist

$$(69)$$
$$u_1=-\tfrac{1}{2}(B+C-A),\ v_1=\tfrac{1}{2}(A+C-B),\ w_1=\tfrac{1}{2}(A+B-C),$$
$$-u_1+v_1+w_1=\tfrac{1}{2}(A+B+C),$$

so dass also $-u_1$ an die Stelle von u_1 tritt.

Da die Sinus, Cosinus und Tangenten dieser acht Grössen in unseren Untersuchungen eine wichtige Rolle spielen und häufig vorkommen, so wollen wir uns mit der Berechnung derselben besonders beschäftigen.

§. 32.

Aus §. 15. folgt zunächst:

$$(70)\quad\begin{cases}\sin\frac{1}{2}(a+b+c)=\dfrac{H'}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C},\\[2ex] \sin\frac{1}{2}(b+c-a)=\dfrac{H'}{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C},\\[2ex] \sin\frac{1}{2}(a+c-b)=\dfrac{H'}{2\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}C},\\[2ex] \sin\frac{1}{2}(a+b-c)=\dfrac{H'}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B},\end{cases}$$

und mit Hilfe der in §. 16. aufgestellten Relationen erhält man hieraus durch den Uebergang auf das Polardreieck:

$$(71)\quad\begin{cases}\cos\frac{1}{2}(A+B+C)=-\dfrac{H_1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\\[2ex] \cos\frac{1}{2}(B+C-A)=\dfrac{H_1}{2\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c},\\[2ex] \cos\frac{1}{2}(A+C-B)=\dfrac{H_1}{2\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}c},\\[2ex] \cos\frac{1}{2}(A+B-C)=\dfrac{H_1}{2\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}.\end{cases}$$

Wenn man bedenkt, dass nach §. 15. auch:

$$(31)\quad H_1=\frac{2H'^2}{\sin A\sin B\sin C},$$

so erhält man aus dem System (71) mit Leichtigkeit:

$$(72)\quad\begin{cases}\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c=-\dfrac{H'^2}{\sin A\sin B\sin C.\cos\frac{1}{2}(A+B+C)},\\[2ex] \cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c=\dfrac{H'^2}{\sin A\sin B\sin C.\cos\frac{1}{2}(B+C-A)},\\[2ex] \cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}c=\dfrac{H'^2}{\sin A\sin B\sin C.\cos\frac{1}{2}(A+C-B)},\\[2ex] \cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b=\dfrac{H'^2}{\sin A\sin B\sin C.\cos\frac{1}{2}(A+B-C)};\end{cases}$$

setzt man der Kürze halber

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \Delta' = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c, & \Delta'' = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c, \\ \Delta''' = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c, & \Delta^{IV} = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b; \end{cases}$$

so ist bekanntlich:

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \Delta' - \Delta'' - \Delta''' - \Delta^{IV}, \\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a) = \Delta' - \Delta'' + \Delta''' + \Delta^{IV}, \\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+c-b) = \Delta' + \Delta'' - \Delta''' + \Delta^{IV}, \\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \Delta' + \Delta'' + \Delta''' - \Delta^{IV}; \end{cases}$$

und man findet daher durch Anwendung der Gleichungen (72):

(73)

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c) = -\frac{H'^2}{\operatorname{Sin}A \operatorname{Sin}B \operatorname{Sin}C}\left\{\frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C)} + \frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A)} + \frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C-B)} + \frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B-C)}\right\},$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a) = -\frac{H'^2}{\operatorname{Sin}A \operatorname{Sin}B \operatorname{Sin}C}\left\{\frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C)} + \frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A)} - \frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C-B)} - \frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B-C)}\right\},$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+c-b) = -\frac{H'^2}{\operatorname{Sin}A \operatorname{Sin}B \operatorname{Sin}C}\left\{\frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C)} + \frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C-B)} - \frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A)} - \frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B-C)}\right\},$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b-c) = -\frac{H'^2}{\operatorname{Sin}A \operatorname{Sin}B \operatorname{Sin}C}\left\{\frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C)} + \frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B-C)} - \frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A)} - \frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C-B)}\right\};$$

und durch den Uebergang auf das Polardreieck, mit Anwendung der Relationen des §. 16.:

(74)

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{H_1^2}{\operatorname{Sin}a\operatorname{Sin}b\operatorname{Sin}c}\left\{\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}-\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}\right\},$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(B+C-A)=\frac{H_1^2}{\operatorname{Sin}a\operatorname{Sin}b\operatorname{Sin}c}\left\{\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}-\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}\right\},$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+C-B)=\frac{H_1^2}{\operatorname{Sin}a\operatorname{Sin}b\operatorname{Sin}c}\left\{\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}-\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}\right\},$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B-C)=\frac{H_1^2}{\operatorname{Sin}a\operatorname{Sin}b\operatorname{Sin}c}\left\{\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}-\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}\right\};$$

Diese Gleichungen hätte man auch aus dem System (70) auf ähnliche Art finden können, wie die Gleichungen (73) aus dem System (71) abgeleitet wurden. Werden die Gleichungen (73) der Reihe nach durch jene (70) und die Gleichungen (74) der Reihe nach durch jene (71) dividirt, so folgt:

(75)

$$\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(a+b+c)=-\frac{H'}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}\left\{\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}+\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A)}+\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+C-B)}+\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B-C)}\right\},$$

$$\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(b+c-a)=-\frac{H'}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}\left\{\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}+\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A)}-\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+C-B)}-\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B-C)}\right\},$$

$$\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(a+c-b)=-\frac{H'}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}\left\{\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}+\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+C-B)}-\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A)}-\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B-C)}\right\},$$

$$\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(a+b-c)=-\frac{H'}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B}\left\{\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}+\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B-C)}-\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A)}-\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+C-B)}\right\};$$

(76)

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{-H_1}{4\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}\left\{\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}-\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}\right\},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+C-A)=\frac{H_1}{4\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}\left\{\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}-\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}\right\},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+C-B)=\frac{H_1}{4\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}\left\{\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}-\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}\right\},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B-C)=\frac{H_1}{4\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b}\left\{\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}-\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}\right\}.$$

§. 33.

Die Gleichungen (47) des §. 20. geben:

(47)

$$\frac{H'}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}=-\operatorname{ctg}r,\qquad \frac{H'}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A)}=\operatorname{ctg}r_1,\ \text{u. s. w.}$$

Da ferner

$$(31)\qquad \frac{H'}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C}=\frac{H_1}{2H'},$$

$$(48)\qquad \frac{1}{H'}=\sqrt{\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3};$$

so ist auch

$$(77)\qquad \frac{H'}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C}=\tfrac{1}{2}H_1\sqrt{\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3},$$

und wenn man die Gleichungen (56) mit einander multiplicirt und dabei auf die Gleichung (13) Rücksicht nimmt:

(78)

$$\frac{1}{H_1{}^2} = (\operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} r_3 - \operatorname{tg} r)(\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} r_3 - \operatorname{tg} r_1)$$

$$\times(\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_3 - \operatorname{tg} r_2)(\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 - \operatorname{tg} r_3);$$

setzt man nun die Werthe aus (47) und (77) in die Gleichungen (73), so gehen dieselben über in folgende:

(79)

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

$$= -\tfrac{1}{2}H_1 \sqrt{\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3}\,(\operatorname{ctg} r_1 + \operatorname{ctg} r_2 + \operatorname{ctg} r_3 - \operatorname{ctg} r),$$

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(b+c-a)$$

$$= \tfrac{1}{2}H_1 \sqrt{\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3}\,(\operatorname{ctg} r + \operatorname{ctg} r_2 + \operatorname{ctg} r_3 - \operatorname{ctg} r_1),$$

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(a+c-b)$$

$$= \tfrac{1}{2}H_1 \sqrt{\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3}\,(\operatorname{ctg} r + \operatorname{ctg} r_1 + \operatorname{ctg} r_3 - \operatorname{ctg} r_2),$$

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(a+b-c)$$

$$= \tfrac{1}{2}H_1 \sqrt{\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3}\,(\operatorname{ctg} r + \operatorname{ctg} r_1 + \operatorname{ctg} r_2 - \operatorname{ctg} r_3),$$

wobei H_1 aus der Gleichung (78) zu nehmen ist, so dass die zweiten Theile als reine Functionen der Radien r, r_1, r_2, r_3 der dem Hauptdreieck und seinen Nebendreiecken umschriebenen Kreise zu betrachten sind.

§. 34.

Wenn man zur Abkürzung

$$(c)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \operatorname{ctg} \varrho_1 + \operatorname{ctg} \varrho_2 + \operatorname{ctg} \varrho_3 - \operatorname{ctg} \varrho, \\ \mathfrak{B} = \operatorname{ctg} \varrho + \operatorname{ctg} \varrho_2 + \operatorname{ctg} \varrho_3 - \operatorname{ctg} \varrho_1, \\ \mathfrak{C} = \operatorname{ctg} \varrho + \operatorname{ctg} \varrho_1 + \operatorname{ctg} \varrho_3 - \operatorname{ctg} \varrho_2, \\ \mathfrak{D} = \operatorname{ctg} \varrho + \operatorname{ctg} \varrho_1 + \operatorname{ctg} \varrho_2 - \operatorname{ctg}_3 \end{cases}$$

setzt, so ist nach §. 22. (54):

$$\operatorname{tg} r = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A},\quad \operatorname{tg} r_1 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{B},\quad \operatorname{tg} r_2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C},\quad \operatorname{tg} r_3 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{D};$$

$$\sqrt{\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3} = \tfrac{1}{4}\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}$$

und die Gleichungen (79) gehen über in:

(80)

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c) = -\tfrac{1}{4}H_1\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}\left\{\frac{1}{\mathfrak{B}}+\frac{1}{\mathfrak{C}}+\frac{1}{\mathfrak{D}}-\frac{1}{\mathfrak{A}}\right\},$$

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a) = \tfrac{1}{4}H_1\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}\left\{\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{1}{\mathfrak{C}}+\frac{1}{\mathfrak{D}}-\frac{1}{\mathfrak{B}}\right\},$$

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b) = \tfrac{1}{4}H_1\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}\left\{\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{1}{\mathfrak{B}}+\frac{1}{\mathfrak{D}}-\frac{1}{\mathfrak{C}}\right\},$$

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \tfrac{1}{4}H_1\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}\left\{\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{1}{\mathfrak{B}}+\frac{1}{\mathfrak{C}}-\frac{1}{\mathfrak{D}}\right\};$$

wobei der Werth von H_1 aus der Gleichung (13) und die Werthe von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ aus (c) zu nehmen sind, so dass die zweiten Theile lediglich die Radien ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 der vier Berührungskreise enthalten. Ich mache hierbei aufmerksam, dass ich, weil die mit H_1, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ bezeichneten Functionen in ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 sehr einfach gebaut sind und sich dem Gedächtniss mit Leichtigkeit einprägen, nicht immer statt derselben ihre Werthe substituiren werde. Wir betrachten eine Grösse als durch ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 ausgedrückt, wenn sie ausser diesen nur noch H_1, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ enthält.

§. 35.

Den Gleichungen (12) des §. 10. zufolge ist

(12)

$$\frac{H_1}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)} = \mathrm{tg}\,\varrho, \quad \frac{H_1}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)} = \mathrm{tg}\,\varrho_1, \text{ u. s. w.};$$

ferner ist nach §. 15. und §. 20.:

$$(32) \qquad \frac{H_1}{\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Sin}\,c} = \frac{H'}{2H_1},$$

$$(48) \qquad H' = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,r_1\,\mathrm{tg}\,r_2\,\mathrm{tg}\,r_3}};$$

folglich nach dem Obigen auch:

$$(81) \qquad H' = \frac{4}{\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}}$$

und

$$(82)\qquad \frac{H_1}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c} = \frac{2}{H_1 \sqrt{\mathfrak{ABCD}}};$$

und wenn man die Werthe aus (12) und 82) in die Gleichungen (74) substituirt, so gehen selbe über in folgende:

$$(83)\quad \begin{cases} \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(A+B+C) = \dfrac{2(\operatorname{tg}\varrho_1 + \operatorname{tg}\varrho_2 + \operatorname{tg}\varrho_3 - \operatorname{tg}\varrho)}{H_1 \sqrt{\mathfrak{ABCD}}}, \\ \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(B+C-A) = \dfrac{2(\operatorname{tg}\varrho + \operatorname{tg}\varrho_2 + \operatorname{tg}\varrho_3 - \operatorname{tg}\varrho_1)}{H_1 \sqrt{\mathfrak{ABCD}}}, \\ \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(A+C-B) = \dfrac{2(\operatorname{tg}\varrho + \operatorname{tg}\varrho_1 + \operatorname{tg}\varrho_3 - \operatorname{tg}\varrho_2)}{H_1 \sqrt{\mathfrak{ABCD}}}, \\ \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(A+B-C) = \dfrac{2(\operatorname{tg}\varrho + \operatorname{tg}\varrho_1 + \operatorname{tg}\varrho_2 - \operatorname{tg}\varrho_3)}{H_1 \sqrt{\mathfrak{ABCD}}}. \end{cases}$$

§. 36.

Setzt man zur Abkürzung:

$$(d)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1 = \operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} r_3 - \operatorname{tg} r, \\ \mathfrak{B}_1 = \operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} r_3 - \operatorname{tg} r_1, \\ \mathfrak{C}_1 = \operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_3 - \operatorname{tg} r_2, \\ \mathfrak{D}_1 = \operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 - \operatorname{tg} r_3; \end{cases}$$

so ist nach den Gleichungen (56) des §. 22.:

$$\operatorname{ctg}\varrho = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_1, \quad \operatorname{ctg}\varrho_1 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1, \quad \operatorname{ctg}\varrho_2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}_1, \quad \operatorname{ctg}\varrho_3 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}_1$$

oder

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{2}{\mathfrak{A}_1}, \quad \operatorname{tg}\varrho_1 = \frac{2}{\mathfrak{B}_1}, \quad \operatorname{tg}\varrho_2 = \frac{2}{\mathfrak{C}_1}, \quad \operatorname{tg}\varrho_3 = \frac{2}{\mathfrak{D}_1};$$

da ferner nach dem Obigen:

$$\sqrt{\mathfrak{ABCD}} = 4\sqrt{\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3}$$

ist, so kann man das System (83) des vorhergehenden Paragraphen auch in das folgende umwandeln:

$$(84)\quad\begin{cases}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\dfrac{\frac{1}{\mathfrak{B}_1}+\frac{1}{\mathfrak{C}_1}+\frac{1}{\mathfrak{D}_1}-\frac{1}{\mathfrak{A}_1}}{H_1\sqrt{\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3}},\\[2ex] \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(B+C-A)=\dfrac{\frac{1}{\mathfrak{A}_1}+\frac{1}{\mathfrak{C}_1}+\frac{1}{\mathfrak{D}_1}-\frac{1}{\mathfrak{B}_1}}{H_1\sqrt{\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3}},\\[2ex] \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+C-B)=\dfrac{\frac{1}{\mathfrak{A}_1}+\frac{1}{\mathfrak{B}_1}+\frac{1}{\mathfrak{D}_1}-\frac{1}{\mathfrak{C}_1}}{H_1\sqrt{\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3}},\\[2ex] \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B-C)=\dfrac{\frac{1}{\mathfrak{A}_1}+\frac{1}{\mathfrak{B}_1}+\frac{1}{\mathfrak{C}_1}-\frac{1}{\mathfrak{D}_1}}{H_1\sqrt{\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3}};\end{cases}$$

wo der Werth von H_1 aus der Gleichung (78) zu nehmen ist, so dass die zweiten Theile als reine Functionen der Radien r, r_1, r_2, r_3 der dem Hauptdreieck und seinen drei Nebendreiecken umschriebenen Kreise zu betrachten sind.

§. 37.

Die Gleichungen (12) und (47) geben mit Rücksicht auf jene (13) und (48) unmittelbar:

$$(85)\quad\begin{cases}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}}{\operatorname{tg}\varrho},\\[2ex] \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a)=\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}}{\operatorname{tg}\varrho_1},\\[2ex] \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b)=\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}}{\operatorname{tg}\varrho_2},\\[2ex] \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c)=\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}}{\operatorname{tg}\varrho_3}\end{cases}$$

und

$$
(86)\quad
\begin{cases}
\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C) = -\dfrac{\operatorname{tg} r}{\sqrt{\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3}}, \\[2ex]
\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A) = \dfrac{\operatorname{tg} r_1}{\sqrt{\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3}}, \\[2ex]
\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+C-B) = \dfrac{\operatorname{tg} r_2}{\sqrt{\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3}}, \\[2ex]
\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B-C) = \dfrac{\operatorname{tg} r_3}{\sqrt{\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3}}.
\end{cases}
$$

Werden jetzt die Gleichungen (80) durch (85), dann auch die Gleichungen (84) durch (86) der Reihe nach dividirt, so erhält man:

(87)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(a+b+c) &= -\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\varrho\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}\left\{\frac{1}{\mathfrak{B}}+\frac{1}{\mathfrak{C}}+\frac{1}{\mathfrak{D}}-\frac{1}{\mathfrak{A}}\right\}, \\
\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(b+c-a) &= \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\varrho_1\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}\left\{\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{1}{\mathfrak{C}}+\frac{1}{\mathfrak{D}}-\frac{1}{\mathfrak{B}}\right\}, \\
\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(a+c-b) &= \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\varrho_2\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}\left\{\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{1}{\mathfrak{B}}+\frac{1}{\mathfrak{D}}-\frac{1}{\mathfrak{C}}\right\}, \\
\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(a+b-c) &= \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\varrho_3\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}\left\{\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{1}{\mathfrak{B}}+\frac{1}{\mathfrak{C}}-\frac{1}{\mathfrak{D}}\right\}
\end{aligned}
$$

und

$$
(88)\quad
\begin{cases}
\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B+C) = -\dfrac{\frac{1}{\mathfrak{B}_1}+\frac{1}{\mathfrak{C}_1}+\frac{1}{\mathfrak{D}_1}-\frac{1}{\mathfrak{A}_1}}{H_1\operatorname{tg} r}, \\[3ex]
\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C-A) = \dfrac{\frac{1}{\mathfrak{A}_1}+\frac{1}{\mathfrak{C}_1}+\frac{1}{\mathfrak{D}_1}-\frac{1}{\mathfrak{B}_1}}{H_1\operatorname{tg} r_1}, \\[3ex]
\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+C-B) = \dfrac{\frac{1}{\mathfrak{A}_1}+\frac{1}{\mathfrak{B}_1}+\frac{1}{\mathfrak{D}_1}-\frac{1}{\mathfrak{C}_1}}{H_1\operatorname{tg} r_2}, \\[3ex]
\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B-C) = \dfrac{\frac{1}{\mathfrak{A}_1}+\frac{1}{\mathfrak{B}_1}+\frac{1}{\mathfrak{C}_1}-\frac{1}{\mathfrak{D}_1}}{H_1\operatorname{tg} r_3};
\end{cases}
$$

wo wieder der Werth von H_1 aus der Gleichung (78) zu nehmen ist, so dass die zweiten Theile als nur die Radien r, r_1, r_2, r_3

enthaltend zu betrachten sind. Wir bemerken hier, dass das System (88) auch aus dem vorhergehenden (87) abgeleitet werden kann, wenn man dieses auf das Polardreieck anwendet und dann mittelst der Relationen des §. 16. zum Hauptdreieck zurückkehrt. Bezeichnet man das, was aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ für das Polardreieck wird, mit $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$, so ist offenbar mit Rücksicht auf die Gleichungen (53) des §. 21.: $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}_1$ und $\sqrt{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'} = \sqrt{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1} = \frac{4}{H_1}$, woraus erhellet, dass auch die Umformung der zweiten Theile des Gleichungen-Systems (87) alsdann keinen weiteren Schwierigkeiten unterliegt.

§. 38.

Weil

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{H_1}{\operatorname{tg}\varrho}, \quad \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a) = \frac{H_1}{\operatorname{tg}\varrho_1}, \text{ u. s. w.}$$

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{2}{\mathfrak{A}_1}, \quad \operatorname{tg}\varrho_1 = \frac{2}{\mathfrak{B}_1}, \text{ u. s. w.}$$

ist, so ist auch

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \tfrac{1}{2}H_1\mathfrak{A}_1, \quad \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a) = \tfrac{1}{2}H_1\mathfrak{B}_1, \text{ u. s. w.}$$

oder, wenn man für $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, ... ihre obigen Werthe setzt:

$$(89) \quad \begin{cases} \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \tfrac{1}{2}H_1(\operatorname{tg}r_1+\operatorname{tg}r_2+\operatorname{tg}r_3-\operatorname{tg}r), \\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a) = \tfrac{1}{2}H_1(\operatorname{tg}r+\operatorname{tg}r_2+\operatorname{tg}r_3-\operatorname{tg}r_1), \\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b) = \tfrac{1}{2}H_1(\operatorname{tg}r+\operatorname{tg}r_1+\operatorname{tg}r_3-\operatorname{tg}r_2), \\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \tfrac{1}{2}H_1(\operatorname{tg}r+\operatorname{tg}r_1+\operatorname{tg}r_2-\operatorname{tg}r_3); \end{cases}$$

denkt man sich in den zweiten Theilen dieser vier Gleichungen statt H_1 denjenigen Werth gesetzt, welcher aus der Gleichung (78) hervorgeht, so sind dieselben als reine Functionen der Radien r, r_1, r_2, r_3 zu betrachten.

Weil

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C) = -\operatorname{tg}r \,.\, H', \quad \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C+A) = \operatorname{tg}r_1 \,.\, H', \text{ u. s. w.}$$

$$\operatorname{tg}r = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}, \quad \operatorname{tg}r_1 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}, \text{ u. s. w.}$$

und

$$(81) \qquad H' = \frac{4}{\sqrt{\mathfrak{ABCD}}}$$

ist, so wird

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C) = -\frac{2\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{ABCD}}}, \quad \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A) = \frac{2\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{ABCD}}},$$

u. s. w.

oder

$$(90) \begin{cases} \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C) = -\dfrac{2(\operatorname{ctg}\varrho_1 + \operatorname{ctg}\varrho_2 + \operatorname{ctg}\varrho_3 - \operatorname{ctg}\varrho)}{\sqrt{\mathfrak{ABCD}}}, \\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A) = \dfrac{2(\operatorname{ctg}\varrho + \operatorname{ctg}\varrho_2 + \operatorname{ctg}\varrho_3 - \operatorname{ctg}\varrho_1)}{\sqrt{\mathfrak{ABCD}}}, \\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C-B) = \dfrac{2(\operatorname{ctg}\varrho + \operatorname{ctg}\varrho_1 + \operatorname{ctg}\varrho_3 - \operatorname{ctg}\varrho_2)}{\sqrt{\mathfrak{ABCD}}}, \\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \dfrac{2(\operatorname{ctg}\varrho + \operatorname{ctg}\varrho_1 + \operatorname{ctg}\varrho_2 - \operatorname{ctg}\varrho_3)}{\sqrt{\mathfrak{ABCD}}}. \end{cases}$$

Werden jetzt die Gleichungen (79) durch (89) und ebenso die Gleichungen (83) durch (90) der Reihe nach dividirt, so erhält man schliesslich noch folgende zwei Systeme von Gleichungen:

(91)

$$\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(a+b+c) = -\sqrt{\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3}\cdot\frac{\operatorname{ctg}r_1+\operatorname{ctg}r_2+\operatorname{ctg}r_3-\operatorname{ctg}r}{\operatorname{tg}r_1+\operatorname{tg}r_2+\operatorname{tg}r_3-\operatorname{tg}r},$$

$$\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(b+c-a) = \sqrt{\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3}\cdot\frac{\operatorname{ctg}r+\operatorname{ctg}r_2+\operatorname{ctg}r_3-\operatorname{ctg}r_1}{\operatorname{tg}r+\operatorname{tg}r_2+\operatorname{tg}r_3-\operatorname{tg}r_1},$$

$$\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(a+c-b) = \sqrt{\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3}\cdot\frac{\operatorname{ctg}r+\operatorname{ctg}r_1+\operatorname{ctg}r_3-\operatorname{ctg}r_2}{\operatorname{tg}r+\operatorname{tg}r_1+\operatorname{tg}r_3-\operatorname{tg}r_2},$$

$$\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \sqrt{\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3}\cdot\frac{\operatorname{ctg}r+\operatorname{ctg}r_1+\operatorname{ctg}r_2-\operatorname{ctg}r_3}{\operatorname{tg}r+\operatorname{tg}r_1+\operatorname{tg}r_2-\operatorname{tg}r_3};$$

(92)

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B+C)=-\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\varrho_1+\operatorname{tg}\varrho_2+\operatorname{tg}\varrho_3-\operatorname{tg}\varrho}{\operatorname{ctg}\varrho_1+\operatorname{ctg}\varrho_2+\operatorname{ctg}\varrho_3-\operatorname{ctg}\varrho},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+C-A)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\varrho+\operatorname{tg}\varrho_2+\operatorname{tg}\varrho_3-\operatorname{tg}\varrho_1}{\operatorname{ctg}\varrho+\operatorname{ctg}\varrho_2+\operatorname{ctg}\varrho_3-\operatorname{ctg}\varrho_1},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+C-B)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\varrho+\operatorname{tg}\varrho_1+\operatorname{tg}\varrho_3-\operatorname{tg}\varrho_2}{\operatorname{ctg}\varrho+\operatorname{ctg}\varrho_1+\operatorname{ctg}\varrho_3-\operatorname{ctg}\varrho_2},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B-C)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\varrho+\operatorname{tg}\varrho_1+\operatorname{tg}\varrho_2-\operatorname{tg}\varrho_3}{\operatorname{ctg}\varrho+\operatorname{ctg}\varrho_1+\operatorname{ctg}\varrho_2-\operatorname{ctg}\varrho_3}.$$

Das letzte System kann auch wieder, wie man sogleich sieht, aus dem Vorhergehenden durch den Uebergang auf das Polardreieck gefunden werden; beide Systeme gehen überdiess mit Leichtigkeit aus den Gleichungen (75) und (76) hervor, worauf ich nur aufmerksam mache. Die Gleichungen (70), (73), (75) geben Sinus, Cosinus und Cotangente der vier Bogen

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c),\quad \tfrac{1}{2}(b+c-a),\quad \tfrac{1}{2}(a+c-b),\quad \tfrac{1}{2}(a+b-c)$$

durch die drei Winkel A, B, C des sphärischen Dreieckes, (85), (80), (87) durch die Radien ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 der vier Berührungskreise desselben, (89), (79), (91) durch die Radien r, r_1, r_2, r_3 der dem Hauptdreieck und seinen drei Nebendreiecken umschriebenen Kreise. Die Gleichungen (74), (71), (76) geben Sinus, Cosinus und Tangente der vier Winkel

$$\tfrac{1}{2}(A+B+C),\quad \tfrac{1}{2}(B+C-A),\quad \tfrac{1}{2}(A+C-B),\quad \tfrac{1}{2}(A+B-C)$$

durch die drei Seiten a, b, c, (83), (90), (92) durch die Radien ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, endlich (84), (86), (88) durch die Radien r, r_1, r_2, r_3.

Bezeichnet ε den sphärischen Excess, so ist bekanntlich:

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon=\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B+C),\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon=-\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(A+B+C)$$

und die ersten der Gleichungen (83) und (92) geben zur Bestimmung des sphärischen Excesses aus den Berührungsradien ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 folgende bemerkenswerthe Ausdrücke:

$$(93)\qquad \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon=\frac{2(\operatorname{tg}\varrho_1+\operatorname{tg}\varrho_2+\operatorname{tg}\varrho_3-\operatorname{tg}\varrho)}{H_1\sqrt{\mathfrak{ABCD}}},$$

(94)

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon=\sqrt{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\varrho_1+\operatorname{ctg}\varrho_2+\operatorname{ctg}\varrho_3-\operatorname{ctg}\varrho}{\operatorname{tg}\varrho_1+\operatorname{tg}\varrho_2+\operatorname{tg}\varrho_3-\operatorname{tg}\varrho}.$$

§. 39.

Die zweiten Theile der Gleichungen (73), (75) und (76) können auf eine einfachere Form gebracht werden, welche für unsere nachfolgenden Untersuchungen von Nutzen sein wird, und mit diesen Transformationen wollen wir uns jetzt beschäftigen.

Wir haben in §. 32. gefunden:

$$\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)=-\frac{H'^2}{\mathrm{Sin}\,A\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,C}\left\{\frac{1}{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}+\frac{1}{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C-B)}+\frac{1}{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B-C)}\right\};$$

um diesen Ausdruck zu vereinfachen, fassen wir die in der Klammer enthaltenen Glieder paarweise zusammen und bringen jedes Paar für sich auf gemeinschaftlichen Nenner, so erhält man, wenn man bedenkt, dass

$$\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C)+\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A)=2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C),$$

$$\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C-B)+\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B-C)=2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(B-C)$$

ist:

$$\frac{2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C)}{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}+\frac{2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(B-C)}{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C-B)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B-C)};$$

nimmt man hier $2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}A$ als gemeinschaftlichen Factor heraus und stellt jetzt alles auf den einen Nenner $-H'^2$, so ist der Zähler des Bruches:

$$\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C-B)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B-C)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C)$$

$$+\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(B-C).$$

Setzt man für einen Augenblick:

$$\alpha=\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C-B)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B-C),$$

$$\beta=\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A);$$

so ist obiger Zähler offenbar gleich

$$(\alpha+\beta)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}C-(\alpha-\beta)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C$$

oder weil auch

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\{\mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Cos}\,(B - C)\},$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}\{\mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Cos}\,(B + C)\},$$

folglich

$$\alpha + \beta = \mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Cos}\,C, \quad \alpha - \beta = \mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,C$$

ist, gleich

$$(\mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Cos}\,C)\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C - \mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,C\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C$$
$$= \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C\{\mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Cos}\,C - 4\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C\}$$
$$= \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C\{1 - 2\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}A + (1 - 2\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}B)(1 - 2\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C) - 4\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C\}$$
$$= \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C\{2 - 2\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}A - 2\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}B - 2\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C\}$$
$$= 2\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C\{1 - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}A - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}B - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C\}$$

oder auch gleich

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C\{\mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Cos}\,C - (1 - \mathrm{Cos}\,B)(1 - \mathrm{Cos}\,C)\}$$
$$= \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C\{-1 + \mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Cos}\,B + \mathrm{Cos}\,C\}$$
$$= -\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C\{1 - \mathrm{Cos}\,A - \mathrm{Cos}\,B - \mathrm{Cos}\,C\};$$

mithin ist

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a + b + c) = -\frac{H'^2}{\mathrm{Sin}\,A\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,C}$$
$$\times \frac{4\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C(1 - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}A - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}B - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C)}{-H'^2}$$

oder

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a + b + c) = -\frac{H'^2}{\mathrm{Sin}\,A\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,C}$$
$$\times \frac{-2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C(1 - \mathrm{Cos}\,A - \mathrm{Cos}\,B - \mathrm{Cos}\,C)}{-H'^2},$$

das ist

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1 - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}A - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}B - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}{2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C},$$

oder

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a + b + c) = -\frac{1 - \mathrm{Cos}\,A - \mathrm{Cos}\,B - \mathrm{Cos}\,C}{4\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C}.$$

§. 40.

Ebenso haben wir in §. 32. gefunden:

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a)$$

$$=-\frac{H'^2}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C}\Big\{\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}+\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A)}$$

$$-\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+C-B)}-\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B-C)}\Big\};$$

um auch diesen Ausdruck zu vereinfachen, fassen wir wieder die in den Klammern enthaltenen Glieder paarweise zusammen und erhalten auf dieselbe Art wie früher:

$$\frac{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A)}-\frac{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+C-B)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B-C)},$$

nimmt man auch hier wieder $2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A$ als gemeinschaftlichen Factor heraus und stellt alsdann beide Glieder auf den gemeinschaftlichen Nenner $-H'^2$, so ist, mit Beibehaltung der Bedeutung der Buchstaben α und β der Zähler dieses Bruches gleich

$$(\alpha-\beta)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C-(\alpha+\beta)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B$$

oder gleich

$$\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C-(\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}B\operatorname{Cos}C)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C$$

$$=\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C\{4\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}C-\operatorname{Cos}A-\operatorname{Cos}B\operatorname{Cos}C\}$$

$$=\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C\{4\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}C-2\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}A+1$$

$$-(2\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}B-1)(2\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}C-1)\}$$

$$=\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C\{2\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}B+2\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}C-2\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}A\}$$

$$=2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C\{1+\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}A-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}B-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C\}$$

oder auch gleich

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C\{(1+\operatorname{Cos}B)(1+\operatorname{Cos}C)-\operatorname{Cos}A-\operatorname{Cos}B\operatorname{Cos}C\}$$

$$=\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C\{1-\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}B+\operatorname{Cos}C\};$$

mithin ist:

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a) = -\frac{H'^2}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C}$$

$$\times\frac{4\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C(1+\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}A-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}B-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C)}{-H'^2}$$

oder

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a) = -\frac{H'^2}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C}$$

$$\times\frac{2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C(1-\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}B+\operatorname{Cos}C)}{-H'^2},$$

das ist

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a) = \frac{1+\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}A-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}B-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}{2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C}$$

oder

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a) = \frac{1-\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}B+\operatorname{Cos}C}{4\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C}.$$

Fasst man das in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen Gefundene zusammen, so gelangt man zu folgenden zwei Systemen von Gleichungen, welche mit jenem (73) gleichbedeutend, aber der Form nach einfacher sind:

$$(95)\quad\begin{cases}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \dfrac{1-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}A-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}B-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}{2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C},\\[2ex] \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a) = \dfrac{1+\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}A-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}B-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}{2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C},\\[2ex] \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+c-b) = \dfrac{1-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}A+\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}B-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}{2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C},\\[2ex] \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \dfrac{1-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}A-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}B+\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}{2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B};\end{cases}$$

$$(96)\quad\begin{cases}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c) = -\dfrac{1-\operatorname{Cos}A-\operatorname{Cos}B-\operatorname{Cos}C}{4\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C},\\[2ex] \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a) = \dfrac{1-\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}B+\operatorname{Cos}C}{4\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C},\\[2ex] \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+c-b) = \dfrac{1+\operatorname{Cos}A-\operatorname{Cos}B+\operatorname{Cos}C}{4\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C},\\[2ex] \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \dfrac{1+\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}B-\operatorname{Cos}C}{4\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B};\end{cases}$$

und wenn man die Gleichungen des Systems (95) der Reihe nach durch die Gleichungen des Systems (70) dividirt:

$$
(97)\quad
\begin{cases}
\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(a+b+c)=\dfrac{1-\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}A-\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}B-\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}C}{H'},\\[2ex]
\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(b+c-a)=\dfrac{1+\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}A-\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}B-\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}C}{H'},\\[2ex]
\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(a+c-b)=\dfrac{1-\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}A+\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}B-\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}C}{H'},\\[2ex]
\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(a+b-c)=\dfrac{1-\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}A-\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}B+\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}C}{H'};
\end{cases}
$$

oder auch:

$$
(98)\quad
\begin{cases}
\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(a+b+c)=-\dfrac{1-\operatorname{Cos}A-\operatorname{Cos}B-\operatorname{Cos}C}{2H'},\\[2ex]
\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(b+c-a)=\dfrac{1-\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}B+\operatorname{Cos}C}{2H'},\\[2ex]
\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(a+c-b)=\dfrac{1+\operatorname{Cos}A-\operatorname{Cos}B+\operatorname{Cos}C}{2H'},\\[2ex]
\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(a+b-c)=\dfrac{1+\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}B-\operatorname{Cos}C}{2H'}.
\end{cases}
$$

§. 41.

Wendet man die vorhin abgeleiteten Gleichungen (95), (96) auf das Polardreieck an und kehrt alsdann mit Zuhilfenahme der bekannten in §. 16. aufgeführten Relationen zum Hauptdreieck zurück, so erhält man mit Leichtigkeit die folgende Gruppe von Gleichungen, welche mit jenen (74) gleichbedeutend sind, sich jedoch durch grössere Einfachheit vor denselben auszeichnen:

99)

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B+C)$$

$$=\frac{-1+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}a+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}b+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}c}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}=\frac{1+\operatorname{Cos}a+\operatorname{Cos}b+\operatorname{Cos}c}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c},$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(B+C-A)$$

$$=\frac{1+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}a-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}b-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}c}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}=\frac{1+\operatorname{Cos}a-\operatorname{Cos}b-\operatorname{Cos}c}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c},$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+C-B)$$

$$=\frac{1-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}a+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}b-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}c}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}=\frac{1-\operatorname{Cos}a+\operatorname{Cos}b-\operatorname{Cos}c}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c},$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B-C)$$

$$=\frac{1-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}a-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}b+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}c}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b}=\frac{1-\operatorname{Cos}a-\operatorname{Cos}b+\operatorname{Cos}c}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b}.$$

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass diese Gleichungen auch aus jenen (74) §. 32. auf ähnliche Art entwickelt werden können, wie wir die Gleichungen (95) aus jenen (73) abgeleitet haben.

Werden jetzt die Gleichungen (99) durch jene (71) der Reihe nach dividirt, so gelangt man zu folgendem, mit den Gleichungen (76) gleichbedeutenden aber einfacheren System, welches auch aus jenem (98) durch den Uebergang auf das Polardreieck hergeleitet werden kann:

100)

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B+C)$$

$$=\frac{1-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}a-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}b-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}c}{H_1}=-\frac{1+\operatorname{Cos}a+\operatorname{Cos}b+\operatorname{Cos}c}{2H_1},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+C-A)$$

$$=\frac{1+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}a-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}b-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}c}{H_1}=\frac{1+\operatorname{Cos}a-\operatorname{Cos}b-\operatorname{Cos}c}{2H_1},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+C-B)$$

$$=\frac{1-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}a+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}b-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}c}{H_1}=\frac{1-\operatorname{Cos}a+\operatorname{Cos}b-\operatorname{Cos}c}{2H_1},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B-C)$$

$$=\frac{1-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}a-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}b+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}c}{H_1}=\frac{1-\operatorname{Cos}a-\operatorname{Cos}b+\operatorname{Cos}c}{2H_1}.$$

§. 42.

Wenn man die erste und zweite der Gleichungen (95) zu der identischen $1=1$ einmal addirt, dann auch davon subtrahirt und sich dabei an die goniometrischen Formeln

$$1+\mathrm{Cos}\,x = 2\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}x,\quad 1-\mathrm{Cos}\,x = 2\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}x$$

erinnert, so erhält man sofort folgende vier Gleichungen:

$$2\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{4}(a+b+c) = \frac{1-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}A-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}B-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C+2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C}{2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C},$$

$$2\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{4}(a+b+c) = \frac{1-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}A-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}B-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C-2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C}{2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C},$$

$$2\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{4}(b+c-a) = \frac{1+\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}A-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}B-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C+2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}C}{2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}C},$$

$$2\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{4}(b+c-a) = \frac{1+\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}A-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}B-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C-2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}C}{2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}C}$$

Erinnert man sich an die goniometrischen Formeln:

(e)

$$1-\mathrm{Cos}^2x-\mathrm{Cos}^2y-\mathrm{Cos}^2z+2\,\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\,y\,\mathrm{Cos}\,z$$
$$= 4\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(x+y+z)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(y+z-x)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(x+z-y)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(x+y-z),$$

$$1-\mathrm{Cos}^2x-\mathrm{Cos}^2y-\mathrm{Cos}^2z-2\,\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\,y\,\mathrm{Cos}\,z$$
$$= -4\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(x+y+z)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(y+z-x)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(x+z-y)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(x+y-z),$$

$$1+\mathrm{Cos}^2x-\mathrm{Cos}^2y-\mathrm{Cos}^2z+2\,\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\,y\,\mathrm{Cos}\,z$$
$$= 4\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(x+y+z)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(y+z-x)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(x+z-y)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(x+y-z),$$

$$1+\mathrm{Cos}^2x-\mathrm{Cos}^2y-\mathrm{Cos}^2z-2\,\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\,y\,\mathrm{Cos}\,z$$
$$= -4\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(x+y+z)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(y+z-x)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(x+z-y)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(x+y-z)$$

und setzt in denselben

$$x = 90^0 - \tfrac{1}{2}A,\quad y = 90^0 - \tfrac{1}{2}B,\quad z = 90^0 - \tfrac{1}{2}C;$$

ferner dann auch:

(101)

$$F'^2 = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Sin}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B+C)\}\,\mathrm{Sin}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(B+C-A)\}$$
$$\times\,\mathrm{Sin}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+C-B)\}\,\mathrm{Sin}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B-C)\},$$

$$G'^2 = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Cos}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B+C)\}\,\mathrm{Cos}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(B+C-A)\}$$
$$\times\,\mathrm{Cos}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+C-B)\}\,\mathrm{Cos}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B-C)\};$$

so erhält man:

(f)

$$1 - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}A - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}B - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C + 2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C$$
$$= 4\,\mathrm{Cos}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B+C)\}\,\mathrm{Sin}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(B+C-A)\}$$
$$\times\,\mathrm{Sin}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+C-B)\}\,\mathrm{Sin}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B-C)\}$$
$$= -\frac{4F'^2}{\mathrm{tg}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B+C)\}},$$

$$1 - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}A - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}B - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C - 2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C$$
$$= 4\,\mathrm{Sin}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B+C)\}\,\mathrm{Cos}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(B+C-A)\}$$
$$\times\,\mathrm{Cos}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+C-B)\}\,\mathrm{Cos}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B-C)\}$$
$$= \frac{4G'^2}{\mathrm{ctg}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B+C)\}},$$

$$1 + \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}A - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}B - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C + 2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}C$$
$$= 4\,\mathrm{Sin}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(B+C-A)\}\,\mathrm{Cos}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B+C)\}$$
$$\times\,\mathrm{Cos}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+C-B)\}\,\mathrm{Cos}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B-C)\}$$
$$= \frac{4G'^2}{\mathrm{ctg}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(B+C-A)\}},$$

$$1 + \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}A - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}B - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C - 2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}C$$
$$= 4\,\mathrm{Cos}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(B+C-A)\}\,\mathrm{Sin}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B+C)\}$$
$$\times\,\mathrm{Sin}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+C-B)\}\,\mathrm{Sin}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B-C)\}$$
$$= -\frac{4F'^2}{\mathrm{tg}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(B+C-A)\}};$$

und wenn man diese Werthe in die obigen vier Gleichungen substituirt, alsdann durch 2 dividirt und die Quadratwurzel auszieht, so verwandeln sich dieselben in folgende:

(g)

$$\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\frac{F'}{\sqrt{-\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{tg}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B+C)\}}},$$

$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\frac{G'}{\sqrt{-\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{ctg}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B+C)\}}},$$

$$\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a)=\frac{G'}{\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{ctg}\{45^0-\tfrac{1}{4}(B+C-A)\}}},$$

$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a)=\frac{F'}{\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{tg}\{45^0-\tfrac{1}{4}(B+C-A)\}}};$$

worin die Radicalgrössen F' und G' mit positiven Vorzeichen zu nehmen sind. Hieraus ergeben sich nun folgende zwei Systeme von Gleichungen:

(102)

$$\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\frac{F'}{\sqrt{-\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{tg}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B+C)\}}},$$

$$\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a)=\frac{G'}{\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{ctg}\{45^0-\tfrac{1}{4}(B+C-A)\}}},$$

$$\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+c-b)=\frac{G'}{\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{ctg}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+C-B)\}}},$$

$$\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b-c)=\frac{G'}{\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{ctg}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B-C)\}}};$$

(103)

$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\frac{G'}{\sqrt{-\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{ctg}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B+C)\}}},$$

$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a)=\frac{F'}{\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{tg}\{45^0-\tfrac{1}{4}(B+C-A)\}}},$$

$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b)=\frac{F'}{\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{tg}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+C-B)\}}},$$

$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c)=\frac{F'}{\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{tg}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B-C)\}}};$$

und durch Division, wenn man

(104)

$$L'^2 = -\operatorname{tg}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B+C)\}\operatorname{tg}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(B+C-A)\} \times \operatorname{tg}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+C-B)\}\operatorname{tg}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B-C)\}$$

setzt:

$$(105)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+b+c) = -\dfrac{\operatorname{tg}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B+C)\}}{L'}, \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(b+c-a) = \dfrac{L'}{\operatorname{tg}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(B+C-A)\}}, \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+c-b) = \dfrac{L'}{\operatorname{tg}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+C-B)\}}, \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+b-c) = \dfrac{L'}{\operatorname{tg}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B-C)\}}; \end{cases}$$

in welchen letzten Gleichungen die symmetrische Radicalgrösse L' ebenfalls mit positivem Vorzeichen zu nehmen ist. Werden dieselben mit einander multiplicirt und setzt man dabei:

(106)

$$L_1^2 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(b+c-a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+c-b)\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+b-c)$$

so folgt:

$$(107)\qquad L_1 = -\operatorname{tg}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B+C)\},$$

und durch Verbindung dieser mit der ersten in (105):

$$(108)\qquad L' = \frac{L_1}{\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+b+c)}.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen gibt die symmetrische und stets als positiv zu nehmende Radicalgrösse L_1, ausgedrückt durch die drei Winkel, die zweite gibt die symmetrische und stets als positiv zu nehmende Radicalgrösse L', ausgedrückt durch die drei Seiten. Wenn man bedenkt, dass $-\operatorname{tg}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B+C)\} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\varepsilon$ ist, ersieht man, dass die Gleichung (107) von der Formel L h u i l i e r's zur Berechnung des spärischen Excesses nicht verschieden ist, denn sie geht alsdann über in:

(109)

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(b+c-a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+c-b)\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+b-c)}.$$

§. 43.

Die ersten zwei der Gleichungen (90) lassen sich auch so schreiben:

$$\mathrm{Cos}\{90^0-\tfrac{1}{2}(A+B+C)\}=\frac{-1+\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a+\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b+\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c}{2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c},$$

$$\mathrm{Cos}\{90^0-\tfrac{1}{2}(B+C-A)\}=\frac{1+\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c}{2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c};$$

und wenn man diese zu der identischen $1=1$ einmal addirt und einmal davon abzieht und bedenkt, dass

$$1+\mathrm{Cos}\,x=2\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}x,\quad 1-\mathrm{Cos}\,x=2\,\mathrm{Sin}^2 x$$

ist, so ergeben sich folgende vier Gleichungen:

$$2\,\mathrm{Cos}^2\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B+C)\}$$
$$=-\frac{1-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c-2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c}{2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c},$$

$$2\,\mathrm{Sin}^2\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B+C)\}$$
$$=\frac{1-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c+2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c}{2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c},$$

$$2\,\mathrm{Cos}^2\{45^0-\tfrac{1}{4}(B+C-A)\}$$
$$=\frac{1+\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c+2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c}{2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c},$$

$$2\,\mathrm{Sin}^2\{45^0-\tfrac{1}{4}(B+C-A)\}$$
$$=-\frac{1+\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c-2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c}{2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c}.$$

Durch direkte Anwendung der goniometrischen Transformations-Formeln (e), indem man $x=\tfrac{1}{2}a$, $y=\tfrac{1}{2}b$, $z=\tfrac{1}{2}c$, ferner auch

(110)

$$F_1^2=\mathrm{Sin}\tfrac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{4}(b+c-a)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{4}(a+c-b)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{4}(a+b-c),$$
$$G_1^2=\mathrm{Cos}\tfrac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{4}(b+c-a)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{4}(a+c-b)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{4}(a+b-c)$$

setzt, verwandeln sich die obigen vier Zähler der Reihe nach in

$$4G_1^2,$$
$$4F_1^2,$$
$$\frac{4G_1^2}{\mathrm{ctg}\,\frac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{4}(b+c-a)},$$
$$\frac{4F_1^2}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{4}(b+c-a)};$$

denkt man sich diese vier Werthe in die obigen vier Gleichungen substituirt, alsdann durch 2 dividirt und allenthalben die Quadratwurzel ausgezogen, so folgt:

(II)

$$\mathrm{Cos}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B+C)\}=\frac{G_1}{\sqrt{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}},$$

$$\mathrm{Sin}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B+C)\}=\frac{-F_1}{\sqrt{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}},$$

$$\mathrm{Cos}\{45^0-\tfrac{1}{4}(B+C-A)\}=\frac{G_1}{\sqrt{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\,\mathrm{ctg}\frac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{ctg}\frac{1}{4}(b+c-a)}},$$

$$\mathrm{Sin}\{45^0-\tfrac{1}{4}(B+C-A)\}=\frac{F_1}{\sqrt{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\,\mathrm{tg}\frac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{tg}\frac{1}{4}(b+c-a)}};$$

in welchen vier Gleichungen, so wie in den folgenden, die symmetrischen Radicalgrössen F_1, G_1 mit positivem Vorzeichen zu nehmen sind. Aus diesen ergeben sich sofort folgende zwei Systeme:

(III)

$$\mathrm{Cos}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B+C)\}$$
$$=\frac{G_1}{\sqrt{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}c}},$$

$$\mathrm{Cos}\{45^0-\tfrac{1}{4}(B+C-A)\}$$
$$=\frac{G_1}{\sqrt{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}c\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{4}(b+c-a)}},$$

$$\mathrm{Cos}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+C-B)\}$$
$$=\frac{G_1}{\sqrt{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}c\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{4}(a+c-b)}},$$

$$\mathrm{Cos}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B-C)$$
$$=\frac{G_1}{\sqrt{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}c\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}b\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{4}(a+b\quad c)}};$$

und

(112)

$$\sin\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B+C)\}$$
$$=\frac{-F_1}{\sqrt{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}},$$

$$\sin\{45^0-\tfrac{1}{4}(B+C-A)\}$$
$$=\frac{F_1}{\sqrt{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\,\mathrm{tg}\frac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{tg}\frac{1}{4}(b+c-a)}},$$

$$\sin\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+C-B)\}$$
$$=\frac{F_1}{\sqrt{\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}c\,\mathrm{tg}\frac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{tg}\frac{1}{4}(a+c-b)}},$$

$$\sin\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B-C)$$
$$=\frac{F_1}{\sqrt{\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\,\mathrm{tg}\frac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{tg}\frac{1}{4}(a+b-c)}};$$

und durch Division, wenn man bedenkt, dass

$$L_1=\frac{F_1}{G_1}$$

ist:

(113)

$$\mathrm{tg}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B+C)\}=-L_1,$$

$$\mathrm{tg}\{45^0-\tfrac{1}{4}(B+C-A)\}=\frac{L_1}{\mathrm{tg}\frac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{tg}\frac{1}{4}(b+c-a)},$$

$$\mathrm{tg}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+C-B)\}=\frac{L_1}{\mathrm{tg}\frac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{tg}\frac{1}{4}(a+c-b)},$$

$$\mathrm{tg}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B-C)\}=\frac{L_1}{\mathrm{tg}\frac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{tg}\frac{1}{4}(a+b-c)}.$$

Wir haben die Gleichungen (111) und (112) aus jenen (99) direkt abgeleitet; sie können jedoch auch aus den Gleichungen (102) und (103) durch den Uebergang auf das Polardreieck gefolgert werden; auf dieselbe Art geht das System (113) aus jenem (105) hervor. Das System (113) folgt überdiess aus jenem (106)

noch einfacher dadurch, dass man in letzterem statt L' seinen Werth aus (108) substituirt und die Winkelfunctionen alsdann daraus bestimmt.

Weil

$$\text{Cos}\,\tfrac{1}{4}\varepsilon = \text{Cos}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B+C)\}$$

und

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{4}\varepsilon = -\text{Sin}\{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B+C)\},$$

so geben die ersten der Gleichungen (111), (112) auch:

(114)

$$\text{Cos}\,\tfrac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{\frac{\text{Cos}\,\tfrac{1}{4}(a+b+c)\text{Cos}\,\tfrac{1}{4}(b+c-a)\text{Cos}\,\tfrac{1}{4}(a+c-b)\text{Cos}\,\tfrac{1}{4}(a+b-c)}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}c}},$$

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{\frac{\text{Sin}\,\tfrac{1}{4}(a+b+c)\text{Sin}\,\tfrac{1}{4}(b+c-a)\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{4}(a+c-b)\text{Sin}\,\tfrac{1}{4}(a+b-c)}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}c}}.$$

Die zweite dieser Gleichungen folgt auch unmittelbar aus der ersten und umgekehrt, durch Anwendung der allgemeinen goniometrischen Formel:

(i) $$\text{Cos}\,x\,\text{Cos}\,y\,\text{Cos}\,z$$
$$= \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(x+y+z)\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(y+z-x)\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(x+z-y)\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(x+y-z)$$
$$+ \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(x+y+z)\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(y+z-x)\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(x+z-y)\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(x+y-z),$$

welche man durch Addition der ersten und zweiten der Gleichungen (e) erhält. Indem man $x=\tfrac{1}{2}a$, $y=\tfrac{1}{2}b$, $z=\tfrac{1}{2}c$ setzt, geht dieselbe über in

$$\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}c = F_1^2 + G_1^2$$

oder

$$1 = \frac{F_1^2}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}c} + \frac{G_1^2}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}c} = \text{Sin}^2\tfrac{1}{4}\varepsilon + \text{Cos}^2\tfrac{1}{4}\varepsilon.$$

Schliesslich bemerke ich noch, dass die Gleichungen (105) und (113) wegen ihrer Einfachheit und logarithmischen Form auch verwendet werden können zur Berechnung der drei Seiten aus den drei Winkeln, oder umgekehrt der drei Winkel aus den drei Seiten. Hat man einmal aus der Tafel die vier Logarithmen

$$\lg \operatorname{tg} \{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B+C)\}, \quad \text{oder} \quad \lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{4}(a+b+c),$$
$$\lg \operatorname{tg} \{45^0 - \tfrac{1}{4}(B+C-A)\}, \quad \lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{4}(b+c-a),$$
$$\lg \operatorname{tg} \{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+C-B)\}, \quad \lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{4}(a+c-b),$$
$$\lg \operatorname{tg} \{45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B-C)\} \quad \lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{4}(a+b-c)$$

entnommen, so findet man mit Leichtigkeit:

$$a+b+c=\varkappa, \quad \text{oder} \quad A+B+C=\varkappa_1,$$
$$b+c-a=\lambda, \quad B+C-A=\lambda_1,$$
$$a+c-b=\mu, \quad A+C-B=\mu_1,$$
$$a+b-c=\nu \quad A+B-C=\nu_1;$$

woraus folgt:

$$a=\tfrac{1}{2}(\mu+\nu), \quad \text{oder} \quad A=\tfrac{1}{2}(\mu_1+\nu_1),$$
$$b=\tfrac{1}{2}(\lambda+\nu), \quad B=\tfrac{1}{2}(\lambda_1+\nu_1),$$
$$c=\tfrac{1}{2}(\lambda+\mu) \quad C=\tfrac{1}{2}(\lambda_1+\mu_1);$$

und man hat dann für die Rechnung zugleich eine Controlle, indem $\varkappa=\lambda+\mu+\nu$ oder $\varkappa_1=\lambda_1+\mu_1+\nu_1$ sein muss.

§. 44.

Multiplicirt man die zweite der Gleichungen (99) mit $\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a$ so hat man

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(B+C-A)$$

$$=\frac{1+\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c}{2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c}=\frac{\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}b+\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}c-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}a}{2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c};$$

bezeichnet man mit A, B, C die drei Winkel des Sehnendreiecks, welches dem sphärischen Dreieck ABC entspricht, so ist bekanntlich

$$\operatorname{Cos}\mathrm{A}=\frac{\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}b+\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}c-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}a}{2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c},$$

mithin auch:

$$(115)\quad \begin{cases} \operatorname{Cos}\mathrm{A}=\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(B+C-A) \text{ und ebenso} \\ \operatorname{Cos}\mathrm{B}=\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+C-B), \\ \operatorname{Cos}\mathrm{C}=\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B-C). \end{cases}$$

ersetzt man hierin $\text{Cos}\,\frac{1}{2}a$, $\text{Cos}\,\frac{1}{2}b$, $\text{Cos}\,\frac{1}{2}c$ durch ihre die Winkel A, B, C enthaltenden bekannten Werthe und führt zugleich zur Vereinfachung durch die Relation $S = \frac{1}{2}(A + B + C)$ die Hilfsgrösse S ein, so erhält man:

$$(116)\quad \begin{cases} \text{Cos}\,\mathrm{A} = \text{Sin}(S-A)\sqrt{\dfrac{\text{Cos}(S-B)\,\text{Cos}(S-C)}{\text{Sin}\,B\,\text{Sin}\,C}}, \\ \text{Cos}\,\mathrm{B} = \text{Sin}(S-B)\sqrt{\dfrac{\text{Cos}(S-A)\,\text{Cos}(S-C)}{\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,C}}, \\ \text{Cos}\,\mathrm{C} = \text{Sin}(S-C)\sqrt{\dfrac{\text{Cos}(S-A)\,\text{Cos}(S-B)}{\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B}}; \end{cases}$$

will man statt S lieber den sphärischen Excess ε einführen, so ist bekanntlich:

$$S-A = 90^0-(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon),\quad S-B = 90^0-(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon),$$

$$S-C = 90^0-(C-\tfrac{1}{2}\varepsilon);$$

mithin:

$$117)\quad \begin{cases} \text{Cos}\,\mathrm{A} = \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos}(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon), \\ \text{Cos}\,\mathrm{B} = \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos}(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon), \\ \text{Cos}\,\mathrm{C} = \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{Cos}(C-\tfrac{1}{2}\varepsilon) \end{cases}$$

oder

$$(118)\quad \begin{cases} \text{Cos}\,\mathrm{A} = \text{Cos}(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\sqrt{\dfrac{\text{Sin}(B-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\text{Sin}(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\text{Sin}\,B\,\text{Sin}\,C}}, \\ \text{Cos}\,\mathrm{B} = \text{Cos}(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\sqrt{\dfrac{\text{Sin}(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\text{Sin}(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,C}}, \\ \text{Cos}\,\mathrm{C} = \text{Cos}(C-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\sqrt{\dfrac{\text{Sin}(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\text{Sin}(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B}}. \end{cases}$$

Diese Formeln dienen zur Berechnung der Winkel des Sehnendreieckes aus den Winkeln des sphärischen Dreieckes. Herr Grunert hat in seiner Abhandlung: „Das sphärische Dreieck mit seinem Sehnendreieck verglichen, mit besonderer Rücksicht auf Geodäsie.“ (S. Archiv, Theil XXV. p. 197.) ebenfalls Formeln zur Lösung dieser Aufgabe aufgestellt und zwar folgende:

(k)

$$\operatorname{Cos} A = \frac{\operatorname{Sin} B \operatorname{Cos}(S-B) + \operatorname{Sin} C \operatorname{Cos}(S-C) - \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos}(S-A)}{2\sqrt{\operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} C \operatorname{Cos}(S-B) \operatorname{Cos}(S-C)}},$$

$$\operatorname{Cos} B = \frac{\operatorname{Sin} A \operatorname{Cos}(S-A) + \operatorname{Sin} C \operatorname{Cos}(S-C) - \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos}(S-B)}{2\sqrt{\operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} C \operatorname{Cos}(S-A) \operatorname{Cos}(S-C)}},$$

$$\operatorname{Cos} C = \frac{\operatorname{Sin} A \operatorname{Cos}(S-A) + \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos}(S-B) - \operatorname{Sin} C \operatorname{Cos}(S-C)}{2\sqrt{\operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos}(S-A) \operatorname{Cos}(S-B)}};$$

und es fällt nicht nicht schwer, durch eine einfache Transformation diese Formeln auf die unserigen zu reduciren, was bei dieser Gelegenheit im Folgenden geschehen soll. Es ist

$$C = (S-A) + (S-B), \quad B = (S-A) + (S-C),$$
$$A = (S-B) + (S-C);$$

also

$$\operatorname{Sin} C = \operatorname{Sin}(S-A)\operatorname{Cos}(S-B) + \operatorname{Cos}(S-A)\operatorname{Sin}(S-B),$$

$$\operatorname{Sin} B = \operatorname{Sin}(S-A)\operatorname{Cos}(S-C) + \operatorname{Cos}(S-A)\operatorname{Sin}(S-C);$$

multiplicirt man die erste Gleichung mit $\operatorname{Cos}(S-C)$, die zweite mit $\operatorname{Cos}(S-B)$, addirt dann beide und zieht von der Summe beiderseits $\operatorname{Sin} A \operatorname{Cos}(S-A)$ ab, so hat man:

$$\operatorname{Sin} B \operatorname{Cos}(S-B) + \operatorname{Sin} C \operatorname{Cos}(S-C) - \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos}(S-A)$$
$$= 2\operatorname{Sin}(S-A)\operatorname{Cos}(S-B)\operatorname{Cos}(S-C)$$
$$+ \operatorname{Cos}(S-A)\{\operatorname{Sin}(S-B)\operatorname{Cos}(S-C) + \operatorname{Cos}(S-B)\operatorname{Sin}(S-C) - \operatorname{Sin} A\};$$

weil aber

$$\operatorname{Sin} A = \operatorname{Sin}(S-B)\operatorname{Cos}(S-C) + \operatorname{Cos}(S-B)\operatorname{Sin}(S-C)$$

ist, so ist das letzte Glied der Null gleich, mithin

$$\operatorname{Sin} B \operatorname{Cos}(S-B) + \operatorname{Sin} C \operatorname{Cos}(S-C) - \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos}(S-A)$$
$$= 2\operatorname{Sin}(S-A)\operatorname{Cos}(S-B)\operatorname{Cos}(S-C);$$

setzt man diesen Werth in die erste der obigen Gleichungen (k) und kürzt so viel als möglich ab, so wird:

$$\operatorname{Cos} A = \operatorname{Sin}(S-A)\sqrt{\frac{\operatorname{Cos}(S-B)\operatorname{Cos}(S-C)}{\operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} C}}$$

und diess ist die erste der Gleichungen (116).

§. 45.

Bezeichnet O (Taf. I. Fig. 1.) den Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises und wir ziehen die spärischen Radien OA, OB, OC, so entstehen um den Punkt O drei an einander liegende, zusammen 360° ausmachende Winkel BOC, AOC, AOB, diese sollen jetzt bestimmt werden. Die Winkel, welche die sphärischen Radien mit drei Seiten einschliessen, sind paarweise einander gleich und zwar ist, wenn O innerhalb des Dreiecks liegt:

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(B+C-A),\quad v_1 = \tfrac{1}{2}(A+C-B),\quad w_1 = (A+B-C);$$

und wenn O ausserhalb des Dreiecks und dem Winkel A gegenüber liegt:

$$u_1 = -\tfrac{1}{2}(B+C-A),\quad v_1 = \tfrac{1}{2}(A+C-B),\quad w_1 = \tfrac{1}{2}(A+B-C),$$

so dass also $-u_1$ an die Stelle von u_1 tritt. Zieht man das sphärische Perpendikel OD, so ist in beiden Fällen

$$\operatorname{Cos} BOD = \operatorname{Cos} BD . \operatorname{Sin} u_1 = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Sin} u_1,$$

oder weil offenbar $\angle BOD = \tfrac{1}{2}\angle BOC$:

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}BOC = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Sin} u_1, \text{ und ebenso:}$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}AOC = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b \operatorname{Sin} v_1,$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}AOB = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c \operatorname{Sin} w_1;$$

setzt man hierin für u_1, v_1, w_1 ihre obigen Werthe, so erhält man, wenn O innerhalb des Dreiecks liegt;

$$(119)\quad \begin{cases} \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}BOC = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(B+C-A), \\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}AOC = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+C-B), \\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}AOB = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B-C); \end{cases}$$

vergleicht man die zweiten Theile dieser Gleichungen mit jenen in (115), so folgt:

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}BOC = \operatorname{Cos} \mathrm{A};\quad \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}AOC = \operatorname{Cos} \mathrm{B},\quad \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}AOB = \operatorname{Cos} \mathrm{C};$$

$$\tfrac{1}{2}BOC = \mathrm{A},\quad \tfrac{1}{2}AOC = \mathrm{B},\quad \tfrac{1}{2}AOB = \mathrm{C};$$

$$(120)\quad \angle BOC = 2\mathrm{A},\quad \angle AOC = 2\mathrm{B},\quad \angle AOB = 2\mathrm{C}.$$

Liegt O ausserhalb des Dreiecks und dem Winkel A gegenüber, so tritt an die erste der drei obigen Gleichungen die folgende:

$$\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}BOC = -\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(B+C-A),$$

während die beiden anderen umgeändert bleiben. Verlängert man das Perpendikel OD über O nach D', so ist $\angle BOD'$ gleich der Hälfte des ausspringenden Winkels BOC und $\mathrm{Cos}\,BOD' = -\mathrm{Cos}\,BOD$. Versteht man also unter $\angle BOC$ in diesem Falle den ausspringenden Winkel, so ist wie früher:

$$\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}BOC = \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(B+C-A),$$

mithin auch in diesem Fall:

$$(120)\quad \angle BOC = 2\mathrm{A},\quad \angle AOC = 2\mathrm{B},\quad \angle AOB = 2\mathrm{C};$$

fasst man beides zusammen, so ergibt sich folgender

1. Lehrsatz:

Verbindet man den Mittelpunkt des einem sphärischen Dreieck ABC umschriebenen Kreises mit den drei Ecken, so entstehen um diesen Punkt drei neben einander liegende, zusammen 360^0 ausmachende Winkel, deren Schenkel paarweise auf den Endpunkt der Seiten a, b, c aufstehen. Diese drei Winkel sind der Reihe nach doppelt so gross als die Winkel A, B, C des dem Dreieck ABC entsprechenden Sehnendreiecks.

§. 46.

Bezeichnet O_1 (Taf. I. Fig. 2.) den Mittelpunkt des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises und man zieht $O_1D_1 \perp BC$, $O_1E_1 \perp AC$, $O_1F_1 \perp AB$, so entstehen um den Punkt O_1 drei an einander liegende, zusammen 360^0 ausmachende Winkel $E_1O_1F_1$, $D_1O_1F_1$, $D_1O_1E_1$. Zieht man den sphärischen Bogen AO_1, so wird durch denselben der Winkel $E_1O_1F_1$ halbirt. Da nun in dem rechtwinkeligen Dreieck AO_1E_1: $\mathrm{Cos}\,AO_1E_1 = \mathrm{Cos}\,AE.\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A$ und bekanntlich AE gleich $\tfrac{1}{2}(b+c-a)$ ist, so hat man:

$$(121)\quad \begin{cases} \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}E_1O_1F_1 = \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a) \text{ und ebenso} \\ \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}D_1O_1F_1 = \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+c-b), \\ \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}D_1O_1E_1 = \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b-c). \end{cases}$$

Bezeichnen A', B', C' die Winkel des dem Polardreieck von ABC entsprechenden Sehnendreiecks, so ist nach den Gleichungen (115) $\text{Cos}\, A' = \text{Cos}\, \tfrac{1}{2}a' \,\text{Sin}\, \tfrac{1}{2}(B' + C' - A')$ oder mit Hilfe der bekannten, in §. 16. aufgeführten Relationen zwischen den Seiten und Winkeln des Haupt- und Polardreiecks:

$$(122)\quad \begin{cases} \text{Cos}\, A' = \text{Sin}\, \tfrac{1}{2}A \,\text{Cos}\, \tfrac{1}{2}(b + c - a), \\ \text{Cos}\, B' = \text{Sin}\, \tfrac{1}{2}B \,\text{Cos}\, \tfrac{1}{2}(a + c - b), \\ \text{Cos}\, C' = \text{Sin}\, \tfrac{1}{2}C \,\text{Cos}\, \tfrac{1}{2}(a + b - c); \end{cases}$$

vergleicht man die zweiten Theile dieser Gleichungen mit jenen in (121), so folgt:

$$\text{Cos}\, \tfrac{1}{2}E_1 O_1 F_1 = \text{Cos}\, A', \quad \text{Cos}\, \tfrac{1}{2}D_1 O_1 F_1 = \text{Cos}\, B', \quad \text{Cos}\, \tfrac{1}{2}D_1 O_1 E_1 = \text{Cos}\, C';$$

$$\tfrac{1}{2}E_1 O_1 F_1 = A', \quad \tfrac{1}{2}D_1 O_1 F_1 = B', \quad \tfrac{1}{2}D_1 O_1 E_1 = C';$$

$$(123)$$

$$E_1 O_1 F_1 = 2A', \quad D_1 O_1 F_1 = 2B', \quad D_1 O_1 E_1 = 2C';$$

und man hat folgenden

2. Lehrsatz:

Fällt man vom Mittelpunkt des einem sphärischen Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises auf die drei Seiten Perpendikel, so entstehen um diesen Punkt drei an einander liegende, zusammen 360° ausmachende Winkel, welche der Reihe nach den Ecken A, B, C gegenüber liegen. Diese drei Winkel sind der Reihe nach doppelt so gross als die Winkel A', B', C' des dem Polardreieck von ABC entsprechenden Sehnendreiecks.

Die zunächst folgenden Paragraphen sind einigen synthetischen Erörterungen gewidmet, welche uns auf mehrere Sätze führen werden, die einestheils eine selbstständige Aufführung erfordern und verdienen, und uns dann auch in den Stand setzen werden, die oben auf analytischem Weg gefundenen Wahrheiten durch die Betrachtung der Figur zu beweisen.

§. 47.

Zum Verständniss des Folgenden ist nothwendig die Bemerkung vorauszuschicken und festzuhalten, dass die Figuren

Taf. I. Fig. I. und 2. sich stets auf ein und dasselbe primitive sphärische Dreieck ABC beziehen. ABC ist das Sehnendreieck desselben und A'B'C' das Sehnendreieck seines Polardreiecks.

Denken wir uns zum sphärischen Dreieck ABC und seinem Polardreieck $A'B'C'$ die entsprechenden körperlichen Ecken, welche ihre Scheitel im Kugelmittelpunkt haben, und ziehen wir durch den Mittelpunkt O_1 des dem spärischen Dreieck eingeschriebenen Kreises einen Kugelradius. Da die Kanten der Polarecke auf den Seiten der Hauptecke senkrecht stehen und da der genannte Kugelradius mit den Seiten der Hauptecke gleiche Winkel einschliesst, welche durch den sphärischen Radius ϱ gemessen werden, so sind auch die Winkel, welche dieser Kugelradius mit den Kanten der Polarecke einschliesst, einander gleich und zwar offenbar gleich $90^0 + \varrho$. Verlängern wir den durch O_1 gehenden Kugelradius bis er die Kugelfläche zum zweiten Male schneidet, so schliesst diese Verlängerung mit den Kanten der Polarecke ebenfalls gleiche Winkel ein, welche durch den Bogen $90^0 - \varrho$ gemessen werden. Da nun nach §. 21 die Summe der Radien des einem sphärischen Dreieck eingeschriebenen und des seinem Polardreieck umschriebenen Kreises gleich 90^0 oder gleich einem Hauptquadranten, also $90^0 - \varrho = r'$ ist, so ist dieser zweite Durchschnitt offenbar der Mittelpunkt des dem Polardreieck umschriebenen Kreises, und wir sehen daraus, dass der Mittelpunkt des einem sphärischen Dreieck eingescriebenen und des seinem Polardreieck umschriebenen Kreises um 180^0 oder um einen halben Hauptkreis von einander entfernt sind.

Da ferner der durch den Mittelpunkt eines auf der Kugel liegenden Kreises zum Kugelmittelpunkt gezogene Radius auf der Ebene dieses Kreises immer senkrecht steht, so ist die Ebene des einem sphärischen Dreieck eingeschriebenen Kreises stets parallel mit der Ebene des dem Polardreieck umschriebenen Kreises und ihr sphärischer Abstand ist constant und gleich einem Hauptquadranten *).

*) Ich sage ausdrücklich ihr sphärischer, also auf der Kugel gemessener Abstand ist constant, denn ihr vertikaler Abstand ist gleich $\mathrm{Sin}\,\varrho + \mathrm{Cos}\,\varrho$, folglich mit dem Radius des eingeschriebenen Kreises veränderlich.

§. 48.

Da die Kanten der Polarecke auf den Seiten der Hauptecke senkrecht stehen, so stehen auch alle Ebenen auf denselben der Reihe nach senkrecht, welche durch diese Kanten gehen; mithin stehen die durch die Kanten der Polarecke und durch den zum Punkte O_1 gezogenen Kugelradius gelegten Ebenen der Reihe nach auf den Seiten der Hauptecke senkrecht, und diese sind offenbar diejenigen Ebenen, in welchen die sphärischen Hauptbogen O_1D_1, O_1E_1, O_1F_1 liegen; man kann daher mit Rücksicht auf schon oben Gesagtes den Satz aufstellen: Die vom Mittelpunkte O_1 des einem sphärischen Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises auf die Seiten desselben gefällten Perpendikel O_1D_1, O_1E_1, O_1F_1 gehen gehörig verlängert durch die Ecken A', B', C' des Polardreieckes und haben den Mittelpunkt des dem Polardreieck umschriebenen Kreises zum gemeinschaftlichen Durchschnitt.

§. 49.

Der dem sphärischen Dreiecke umschriebene Kreis liegt in der Ebene seines Sehnendreieckes und ist auch der umschriebene Kreis des letztern. Verbindet man den Punkt O (Taf. I. Fig. I.) mit dem Kugelmittelpunkt, so steht diese Linie auf der Ebene des Kreises senkrecht, und der Punkt, in welchem sie diese Ebene schneidet, ist der Mittelpunkt O dieses Kreises in dieser Ebene. Zieht man nun die Radien OA, OB, OC, so entstehen um den Punkt O drei an einander liegende Winkel BOC, AOC, AOB, deren Summe 360^0 ausmacht, und man überzeugt sich leicht aus der Betrachtung der Figur, dass immer, O mag innerhalb oder ausserhalb des Dreieckes liegen, $\angle \mathrm{BOC}=2\mathrm{A}$, $\angle \mathrm{AOC}=2\mathrm{B}$, $\angle \mathrm{AOB}=2\mathrm{C}$ ist. Legt man durch den Punkt O eine die Kugel tangirende Ebene, so ist diese offenbar mit der Ebene des Dreieckes ABC parallel. Zieht man an die sphärischen Radien OA, OB, OC Tangenten, so liegen diese Tangenten in der genannten Berührungsebene, und die zwischen ihnen liegenden Winkel sind den sphärischen Winkeln BOC, AOC, AOB der Reihe nach gleich. Da nun diese Tangenten mit den Radien OA, OB, OC der Reihe nach parallel sind, so ist

$$\angle BOC=\angle \mathrm{BOC},\quad \angle AOC=\angle \mathrm{AOC},\quad \angle AOB=\angle \mathrm{AOB};$$

mithin auch:

$$(120)\quad \angle BOC=2\mathrm{A},\quad \angle AOC=2\mathrm{B},\quad \angle AOB=2\mathrm{C};$$

wobei für $\angle BOC$, $\angle AOC$, $\angle AOB$ immer die an einander liegenden, zusammen 360° ausmachenden Winkel zu nehmen sind, wodurch also der oben aufgeführte erste Lehrsatz auch synthetisch bewiesen ist.

§. 50.

Legen wir durch den Punkt O_1 (Taf. I. Fig. 2.), den Mittelpunkt des dem Hauptdreiecke ABC eingeschriebenen Kreises, eine die Kugel berührende Ebene, so ist diese sowohl mit der Ebene des dem Dreiecke eingeschriebenen, als des seinem Polardreiecke umschriebenen Kreises parallel. Zieht man durch den Punkt O_1 an die sphärischen Bogen O_1D_1, O_1E_1, O_1F_1 Tangenten, so liegen diese in der genannten Berührungsebene, und die von ihnen eingeschlossenen an einander liegenden Winkel sind der Reihe nach den an einander liegenden sphärischen Winkeln $E_1O_1F_1$, $F_1O_1D_1$, $D_1O_1E_1$ gleich. Ist O_1 der Punkt, in welchem der zum Punkte O_1 gezogene Kugelradius gehörig verlängert die Ebene des dem Polardreieck von ABC entsprechenden Sehnendreieckes $\mathrm{A'B'C'}$ schneidet, so ist O_1 der Mittelpunkt des dem Dreiecke $\mathrm{A'B'C'}$ umschriebenen Kreises. Zieht man nun die Radien $\mathrm{O_1A'}$, $\mathrm{O_1B'}$, $\mathrm{O_1C'}$, so sind die von denselben gebildeten an einander liegenden, zusammen 360° ausmachenden Winkel $\mathrm{C'O_1B'}$, $\mathrm{A'O_1C'}$, $\mathrm{A'O_1B'}$ offenbar der Reihe nach gleich $\mathrm{2A'}$, $\mathrm{2B'}$, $\mathrm{2C'}$, wie aus dem Anblick der Figur unmittelbar hervorgeht. Da nun nach §. 48. die sphärischen Bogen O_1D_1, O_1E_1, O_1F_1 verlängert durch die Ecken $\mathrm{A'}$, $\mathrm{B'}$, $\mathrm{C'}$ gehen, so sind die an die oben genannten sphärischen Bogen gezogenen Tangenten mit den Radien $\mathrm{O_1A'}$, $\mathrm{O_1B'}$, $\mathrm{O_1C'}$ der Reihe nach parallel, mithin auch

$$(123)\quad \angle E_1O_1F_1 = 2\mathrm{A'},\quad \angle F_1O_1D_1 = 2\mathrm{B'},\quad \angle D_1O_1E_1 = 2\mathrm{C'},$$

womit der obige zweite Lehrsatz ebenfalls synthetisch bewiesen ist.

§. 51.

Fällt man vom Mittelpunkte O (Taf. I. Fig. 1.) des dem sphärischen Dreiecke ABC umschriebenen Kreises auf die drei Seiten Perpendikel und bezeichnet dieselben der Reihe nach mit p_1, p_2, p_3, so ist, wie aus der Betrachtung der Figur unmittelbar hervorgeht, wenn O innerhalb des Dreieckes ABC liegt:

$$\operatorname{tg} p_1 = \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} u_1,\quad \operatorname{tg} p_2 = \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}b \operatorname{tg} v_1,\quad \operatorname{tg} p_3 = \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}c \operatorname{tg} w_1$$

und wenn O ausserhalb des Dreieckes liegt und dem Winkel A gegenüber, in welchem Falle $-u_1$ an die Stelle von u_1 tritt:

$$-\operatorname{tg}p_1 = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}u_1,\quad \operatorname{tg}p_2 = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{tg}v_1,\quad \operatorname{tg}p_3 = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c\operatorname{tg}w_1.$$

Folglich, wenn man für u_1, v_1, w_1 die Werthe aus (68) §. 31. setzt:

$$(124)\quad \begin{cases} \pm\operatorname{tg}p_1 = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+C-A), \\ \operatorname{tg}p_2 = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+C-B), \\ \operatorname{tg}p_3 = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B-C); \end{cases}$$

wobei das obere Zeichen gilt, wenn der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises innerhalb des Dreieckes liegt, das untere, wenn er ausserhalb liegt und dem Winkel A gegenüber.

Ersetzt man in diesen Gleichungen die drei Winkelausdrücke $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+C-A)$, $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+C-B)$, $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B-C)$ durch ihre in §. 41. unter (100) aufgestellten Werthe, so erhält man zur Bestimmung der Perpendikel p_1, p_2, p_3 durch die drei Seiten folgende Formeln:

$$(125)\quad \begin{cases} \pm\operatorname{tg}p_1 = \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a}{H_1}(1+\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c) \\ \qquad = \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a}{2H_1}(1+\operatorname{Cos}a-\operatorname{Cos}b-\operatorname{Cos}c), \\ \operatorname{tg}p_2 = \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b}{H_1}(1-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a+\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c) \\ \qquad = \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b}{2H_1}(1-\operatorname{Cos}a+\operatorname{Cos}b-\operatorname{Cos}c), \\ \operatorname{tg}p_3 = \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{H_1}(1-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b+\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c) \\ \qquad = \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{2H_1}(1-\operatorname{Cos}a-\operatorname{Cos}b+\operatorname{Cos}c); \end{cases}$$

und wenn man dieselben drei Gleichungen (124) zum Quadrat erhebt, alsdann $\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}a$, $\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}b$, $\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}c$ durch seine bekannten, die drei Winkel A, B, C enthaltenden Werthe ersetzt:

$$(126)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2p_1 = -\dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(B+C-A)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A)\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C}, \\ \operatorname{tg}^2p_2 = -\dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(A+C-B)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+C-B)\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}C}, \\ \operatorname{tg}^2p_3 = -\dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(A+B-C)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B-C)\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B}; \end{cases}$$

welche drei Gleichungen die Perpendikel p_1, p_2, p_3 durch die prei Winkel bestimmen.

§. 52.

Erhebt man die erste der Gleichungen (124) zum Quadrat und ersetzt alsdann $\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}a$ durch seinen Werth aus (20) §. 13. und $\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}(B+C-A)$ durch seinen Werth aus (92) §. 38., so zeigt sich:

$$\mathrm{tg}^2 p_1 = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_1\,\mathrm{tg}\varrho_2\,\mathrm{tg}\varrho_3}{\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_1+\mathrm{tg}\varrho_2\,\mathrm{tg}\varrho_3}(\mathrm{ctg}\varrho_1+\mathrm{ctg}\varrho_2+\mathrm{ctg}\varrho_3-\mathrm{ctg}\varrho)$$
$$\times(\mathrm{ctg}\varrho+\mathrm{ctg}\varrho_2+\mathrm{ctg}\varrho_3-\mathrm{ctg}\varrho_1)$$
$$\times\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_1\,\mathrm{tg}\varrho_2\,\mathrm{tg}\varrho_3}\cdot\frac{(\mathrm{tg}\varrho+\mathrm{tg}\varrho_2+\mathrm{tg}\varrho_3-\mathrm{tg}\varrho_1)^2}{(\mathrm{ctg}\varrho+\mathrm{ctg}\varrho_2+\mathrm{ctg}\varrho_3-\mathrm{ctg}\varrho_1)^2}$$

oder

$$(127)\begin{cases}\mathrm{tg}^2 p_1=\frac{1}{4}\frac{(\mathrm{tg}\varrho+\mathrm{tg}\varrho_2+\mathrm{tg}\varrho_3-\mathrm{tg}\varrho_1)^2}{\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_1+\mathrm{tg}\varrho_2\,\mathrm{tg}\varrho_3}\cdot\frac{\mathrm{ctg}\varrho_1+\mathrm{ctg}\varrho_2+\mathrm{ctg}\varrho_3-\mathrm{ctg}\varrho}{\mathrm{ctg}\varrho+\mathrm{ctg}\varrho_2+\mathrm{ctg}\varrho_3-\mathrm{ctg}\varrho_1},\\ \text{ebenso}\\ \mathrm{tg}^2 p_2=\frac{1}{4}\frac{(\mathrm{tg}\varrho+\mathrm{tg}\varrho_1+\mathrm{tg}\varrho_3-\mathrm{tg}\varrho_2)^2}{\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_2+\mathrm{tg}\varrho_1\,\mathrm{tg}\varrho_3}\cdot\frac{\mathrm{ctg}\varrho_1+\mathrm{ctg}\varrho_2+\mathrm{ctg}\varrho_3-\mathrm{ctg}\varrho}{\mathrm{ctg}\varrho+\mathrm{ctg}\varrho_1+\mathrm{ctg}\varrho_3-\mathrm{ctg}\varrho_2},\\ \mathrm{tg}^2 p_3=\frac{1}{4}\frac{(\mathrm{tg}\varrho+\mathrm{tg}\varrho_1+\mathrm{tg}\varrho_2-\mathrm{tg}\varrho_3)^2}{\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_3+\mathrm{tg}\varrho_1\,\mathrm{tg}\varrho_2}\cdot\frac{\mathrm{ctg}\varrho_1+\mathrm{ctg}\varrho_2+\mathrm{ctg}\varrho_3-\mathrm{ctg}\varrho}{\mathrm{ctg}\varrho+\mathrm{ctg}\varrho_1+\mathrm{ctg}\varrho_2-\mathrm{ctg}\varrho_3}.\end{cases}$$

Nach §. 36. ist

$$\mathrm{tg}\varrho=\frac{2}{\mathfrak{A}_1},\quad \mathrm{tg}\varrho_1=\frac{2}{\mathfrak{B}_1},\quad \mathrm{tg}\varrho_2=\frac{2}{\mathfrak{C}_1},\quad \mathrm{tg}\varrho_3=\frac{2}{\mathfrak{D}_1};$$

folglich

$$\text{(I)}\quad \mathrm{tg}\varrho+\mathrm{tg}\varrho_2+\mathrm{tg}\varrho_3-\mathrm{tg}\varrho_1=2\left(\frac{1}{\mathfrak{A}_1}+\frac{1}{\mathfrak{C}_1}+\frac{1}{\mathfrak{D}_1}-\frac{1}{\mathfrak{B}_1}\right);$$

ferner ist

$$\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_1+\mathrm{tg}\varrho_2\,\mathrm{tg}\varrho_3=4\left(\frac{1}{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}+\frac{1}{\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1}\right)=4\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1+\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1}.$$

Geht man auf die Bedeutung der mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$ bezeichneten Grössen zurück und setzt für einen Augenblick

$$\mathrm{tg}r+\mathrm{tg}r_1+\mathrm{tg}r_2+\mathrm{tg}r_3=2s,$$

so ist

$$\mathfrak{A}_1=2(s-\mathrm{tg}r),\quad \mathfrak{B}_1=2(s-\mathrm{tg}r_1),\quad \mathfrak{C}_1=2(s-\mathrm{tg}r_2),\quad \mathfrak{D}_1=2(s-\mathrm{tg}r_3);$$

folglich:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 = 4\{s^2 - (\mathrm{tg}\,r + \mathrm{tg}\,r_1)s + \mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,r_1\},$$

$$\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1 = 4\{s^2 - (\mathrm{tg}\,r_2 + \mathrm{tg}\,r_3)s + \mathrm{tg}\,r_2\,\mathrm{tg}\,r_3\},$$

und wenn man diese zwei Gleichungen addirt und dabei bedenkt, dass $2s^2 - (\mathrm{tg}\,r + \mathrm{tg}\,r_1 + \mathrm{tg}\,r_2 + \mathrm{tg}\,r_3)s = 0$ ist,

$$\text{(m)} \qquad \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1 = 4(\mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,r_1 + \mathrm{tg}\,r_2\,\mathrm{tg}\,r_3).$$

Setzt man die Werthe aus (l) und (m) in die erste der Gleichungen (127), so erhält man unter gleichzeitiger Benutzung der Gleichungen (54) §. 22. nach leichter Reduction:

$$(128) \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{tg}^2 p_1 = \frac{1}{16}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1 \dfrac{\mathrm{tg}\,r}{\mathrm{tg}\,r_1} \dfrac{\left(\dfrac{1}{\mathfrak{A}_1} + \dfrac{1}{\mathfrak{C}_1} + \dfrac{1}{\mathfrak{D}_1} - \dfrac{1}{\mathfrak{B}_1}\right)^2}{\mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,r_1 + \mathrm{tg}\,r_2\,\mathrm{tg}\,r_3}, \\ \qquad\qquad\qquad \text{ebenso} \\ \mathrm{tg}^2 p_2 = \frac{1}{16}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1 \dfrac{\mathrm{tg}\,r}{\mathrm{tg}\,r_2} \dfrac{\left(\dfrac{1}{\mathfrak{A}_1} + \dfrac{1}{\mathfrak{B}_1} + \dfrac{1}{\mathfrak{D}_1} - \dfrac{1}{\mathfrak{C}_1}\right)^2}{\mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,r_2 + \mathrm{tg}\,r_1\,\mathrm{tg}\,r_3}, \\ \mathrm{tg}^2 p_3 = \frac{1}{16}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1 \dfrac{\mathrm{tg}\,r}{\mathrm{tg}\,r_3} \dfrac{\left(\dfrac{1}{\mathfrak{A}_1} + \dfrac{1}{\mathfrak{B}_1} + \dfrac{1}{\mathfrak{C}_1} - \dfrac{1}{\mathfrak{D}_1}\right)^2}{\mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,r_3 + \mathrm{tg}\,r_1\,\mathrm{tg}\,r_2}. \end{array} \right.$$

Das System (127) gibt die drei Perpendikel p_1, p_2, p_3, ausgedrückt durch die Radien ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 der dem Hauptdreieck und seinen drei Nebendreiecken eingeschriebenen, das System (128) durch die Radien r, r_1, r_2, r_3 der denselben vier Dreiecken umschriebenen Kreise.

§. 53.

Nach den Gleichungen (46) und (47) des §. 20. ist:

$$\mathrm{tg}\,r_1 = \frac{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}c}{H_1} = \frac{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(B + C - A)}{H'},$$

folglich:

$$\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}a}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(B + C - A)} = \frac{H_1}{2H'} \cdot \frac{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}a}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}c},$$

oder weil nach (34) §. 15. und (44) §. 19.:

$$\text{(n)} \qquad \frac{H_1}{H'} = 2\,\mathrm{tg}\,r\,\{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c\}$$

ist,

$$\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A)} = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}\,r,$$

mithin, weil nach (124):

$$\pm\,\mathrm{tg}\,p_1 = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A)}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(B+C-A),$$

$$\pm\,\mathrm{tg}\,p_1 = \mathrm{tg}\,r.\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(B+C-A)$$

oder

$$(129)\quad\left\{\begin{aligned} &\pm\frac{\mathrm{tg}\,p_1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a} = \mathrm{tg}\,r\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(B+C-A),\quad\text{ebenso}\\ &\frac{\mathrm{tg}\,p_2}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b} = \mathrm{tg}\,r\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+C-B),\\ &\frac{\mathrm{tg}\,p_3}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c} = \mathrm{tg}\,r\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B-C)\end{aligned}\right.$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (115) §. 44.:

$$(130)\quad\left\{\begin{aligned} \pm\,\mathrm{tg}\,p_1 &= \mathrm{tg}\,r\operatorname{Cos}A,\\ \mathrm{tg}\,p_2 &= \mathrm{tg}\,r\operatorname{Cos}B,\\ \mathrm{tg}\,p_3 &= \mathrm{tg}\,r\operatorname{Cos}C,\end{aligned}\right.$$

welche letzten Gleichungen eine einfache, leicht aus der Figur zu beweisende Beziehung aussprechen und für das ebene Dreieck als Grenze in die folgenden übergehen:

$$\pm\,p_1 = r\operatorname{Cos}A,\quad p_2 = r\operatorname{Cos}B,\quad p_3 = r\operatorname{Cos}C.$$

Das obere Zeichen gilt, wenn der Mittelpunkt des dem Dreieck *ABC* umschriebenen Kreises innerhalb desselben, das untere, wenn er ausserhalb und dem Winkel A gegenüber liegt.

Bestimmt man aus den Gleichungen (130) Cos A, Cos B, Cos C, quadrirt und ersetzt $\mathrm{tg}^2 p_1$, $\mathrm{tg}^2 p_2$, $\mathrm{tg}^2 p_3$ einmal durch seine Werthe aus (127), ein anderes Mal durch seine Werthe aus (128), so gelangt man mit Leichtigkeit auch zu folgenden zwei Systemen von Gleichungen:

$$(131)\quad\left\{\begin{aligned} \operatorname{Cos}^2 A &= \frac{1}{\mathfrak{AB}}\,\frac{(\mathrm{tg}\,\varrho+\mathrm{tg}\,\varrho_2+\mathrm{tg}\,\varrho_3-\mathrm{tg}\,\varrho_1)^2}{\mathrm{tg}\,\varrho\,\mathrm{tg}\,\varrho_1+\mathrm{tg}\,\varrho_2\,\mathrm{tg}\,\varrho_3},\\ \operatorname{Cos}^2 B &= \frac{1}{\mathfrak{AC}}\,\frac{(\mathrm{tg}\,\varrho+\mathrm{tg}\,\varrho_1+\mathrm{tg}\,\varrho_3-\mathrm{tg}\,\varrho_2)^2}{\mathrm{tg}\,\varrho\,\mathrm{tg}\,\varrho_2+\mathrm{tg}\,\varrho_1\,\mathrm{tg}\,\varrho_3},\\ \operatorname{Cos}^2 C &= \frac{1}{\mathfrak{AD}}\,\frac{(\mathrm{tg}\,\varrho+\mathrm{tg}\,\varrho_1+\mathrm{tg}\,\varrho_2-\mathrm{tg}\,\varrho_3)^2}{\mathrm{tg}\,\varrho\,\mathrm{tg}\,\varrho_3+\mathrm{tg}\,\varrho_1\,\mathrm{tg}\,\varrho_2}\end{aligned}\right.$$

und

$$
(132) \quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{Cos}^2 A &= \tfrac{1}{16}\,\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1}{\mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,r_1}\,\frac{\left(\frac{1}{\mathfrak{A}_1}+\frac{1}{\mathfrak{C}_1}+\frac{1}{\mathfrak{D}_1}-\frac{1}{\mathfrak{B}_1}\right)^2}{\mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,r_1+\mathrm{tg}\,r_2\,\mathrm{tg}\,r_3},\\
\mathrm{Cos}^2 B &= \tfrac{1}{16}\,\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1}{\mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,r_2}\,\frac{\left(\frac{1}{\mathfrak{A}_1}+\frac{1}{\mathfrak{B}_1}+\frac{1}{\mathfrak{D}_1}-\frac{1}{\mathfrak{C}_1}\right)^2}{\mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,r_2+\mathrm{tg}\,r_1\,\mathrm{tg}\,r_3},\\
\mathrm{Cos}^2 C &= \tfrac{1}{16}\,\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1}{\mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,r_3}\,\frac{\left(\frac{1}{\mathfrak{A}_1}+\frac{1}{\mathfrak{B}_1}+\frac{1}{\mathfrak{C}_1}-\frac{1}{\mathfrak{D}_1}\right)^2}{\mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,r_3+\mathrm{tg}\,r_1\,\mathrm{tg}\,r_2}.
\end{aligned}
\right.
$$

§. 54.

Werden die Gleichungen (128) zuerst addirt, dann die zwei letzten derselben addirt, hiervon die erste subtrahirt, so erhält man:

$$
\pm\frac{\mathrm{tg}\,p_1}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}a}+\frac{\mathrm{tg}\,p_2}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}b}+\frac{\mathrm{tg}\,p_3}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}c}
$$

$$
=\mathrm{tg}\,r\{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(B+C-A)+\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A+C-B)+\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A+B-C)\},
$$

$$
\frac{\mathrm{tg}\,p_2}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}b}+\frac{\mathrm{tg}\,p_3}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}c}\mp\frac{\mathrm{tg}\,p_1}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}a}
$$

$$
=\mathrm{tg}\,r\{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A+C-B)+\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A+B-C)-\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(B+C-A)\};
$$

nach den Lehren der Goniometrie ist:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(B+C-A)+\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A+C-B)+\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A+B-C)\\
&\qquad=4\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C+\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A+B+C),\\
&\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A+C-B)+\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A+B-C)-\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(B+C-A)\\
&\qquad=4\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C-\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A+B+C);
\end{aligned}
$$

ferner nach den Gleichungen (70) §. 32. mit Anwendung der Gleichungen (12) §. 10. und (n) §. 53., indem man, wie in §. 32.

$$
\Delta'=\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c
$$

setzt:

$$
4\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C=\frac{2H'}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(a+b+c)}=\frac{2H'}{H_1}\,\mathrm{tg}\,\varrho=\frac{\mathrm{tg}\,\varrho}{\Delta'\,\mathrm{tg}\,r},
$$

$$
4\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C=\frac{2H'}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(b+c-a)}=\frac{2H'}{H_1}\,\mathrm{tg}\,\varrho_1=\frac{\mathrm{tg}\,\varrho_1}{\Delta'\,\mathrm{tg}\,r}
$$

und

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B+C),$$

folglich:

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(B+C-A)+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+C-B)+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B-C)=\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\Delta'\operatorname{tg}r}+\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+C-B)+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B-C)-\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(B+C-A)=\frac{\operatorname{tg}\varrho_1}{\Delta'\operatorname{tg}r}-\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

und

$$(133)\quad\begin{cases}\pm\dfrac{\operatorname{tg}p_1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a}+\dfrac{\operatorname{tg}p_2}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b}+\dfrac{\operatorname{tg}p_3}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}=\dfrac{1}{\Delta'}\operatorname{tg}\varrho+\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon\operatorname{tg}r,\\[2ex]\dfrac{\operatorname{tg}p_2}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b}+\dfrac{\operatorname{tg}p_3}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}\mp\dfrac{\operatorname{tg}p_1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a}=\dfrac{1}{\Delta'}\operatorname{tg}\varrho_1-\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon\operatorname{tg}r,\\[2ex]\pm\dfrac{\operatorname{tg}p_1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a}+\dfrac{\operatorname{tg}p_3}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}-\dfrac{\operatorname{tg}p_2}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b}=\dfrac{1}{\Delta'}\operatorname{tg}\varrho_2-\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon\operatorname{tg}r,\\[2ex]\pm\dfrac{\operatorname{tg}p_1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a}+\dfrac{\operatorname{tg}p_2}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b}-\dfrac{\operatorname{tg}p_3}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}=\dfrac{1}{\Delta'}\operatorname{tg}\varrho_3-\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon\operatorname{tg}r;\end{cases}$$

in welchen Gleichungen die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises innerhalb desselben liegt oder ausserhalb und dem Winkel A gegenüber. Diese Gleichungen verwandeln sich für das ebene Dreieck in die folgenden:

$$(134)\quad\begin{cases}\pm p_1+p_2+p_3=\varrho+r,\\ p_2+p_3\mp p_1=\varrho_1-r,\\ \pm p_1+p_3-p_2=\varrho_2-r,\\ \pm p_1+p_2-p_3=\varrho_3-r,\end{cases}$$

wobei in Bezug auf die Wahl der Zeichen immer noch die obige Bemerkung gilt.

Werden die drei letzten der Gleichungen (133) nach und nach zur ersten addirt, so folgt:

$$(135)\quad\begin{cases}\dfrac{\operatorname{tg}p_2}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b}+\dfrac{\operatorname{tg}p_3}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}=\dfrac{1}{2\Delta'}(\operatorname{tg}\varrho+\operatorname{tg}\varrho_1),\\[2ex]\pm\dfrac{\operatorname{tg}p_1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a}+\dfrac{\operatorname{tg}p_3}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}=\dfrac{1}{2\Delta'}(\operatorname{tg}\varrho+\operatorname{tg}\varrho_2),\\[2ex]\pm\dfrac{\operatorname{tg}p_1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a}+\dfrac{\operatorname{tg}p_2}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b}=\dfrac{1}{2\Delta'}(\operatorname{tg}\varrho+\operatorname{tg}\varrho_3);\end{cases}$$

aus deren Addition

$$\pm\frac{\operatorname{tg}p_1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a}+\frac{\operatorname{tg}p_2}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b}+\frac{\operatorname{tg}p_3}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}=\frac{1}{4\varDelta'}(3\operatorname{tg}\varrho+\operatorname{tg}\varrho_1+\operatorname{tg}\varrho_2+\operatorname{tg}\varrho_3)$$

entsteht. Indem man von dieser letzten Gleichung nach und nach die drei Gleichungen (135) subtrahirt, erhält man endlich:

$$(136)\quad\left\{\begin{aligned}\pm\frac{\operatorname{tg}p_1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a}&=\frac{1}{4\varDelta'}(\operatorname{tg}\varrho+\operatorname{tg}\varrho_2+\operatorname{tg}\varrho_3-\operatorname{tg}\varrho_1),\\ \frac{\operatorname{tg}p_2}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b}&=\frac{1}{4\varDelta'}(\operatorname{tg}\varrho+\operatorname{tg}\varrho_1+\operatorname{tg}\varrho_3-\operatorname{tg}\varrho_2),\\ \frac{\operatorname{tg}p_3}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}&=\frac{1}{4\varDelta'}(\operatorname{tg}\varrho+\operatorname{tg}\varrho_1+\operatorname{tg}\varrho_2-\operatorname{tg}\varrho_3);\end{aligned}\right.$$

welche drei Gleichungen, so wie die vorhergehenden (135) ebenfalls als Verallgemeinerungen für das ebene Dreieck giltiger Relationen zu betrachten sind, indem letztere als specielle Fälle in ihnen enthalten sind, die auch unmittelbar aus den Gleichungen (134) abgeleitet werden können. (M. vergl. hiermit meinen Aufsatz: Zur Lehre vom Dreieck. Archiv. Thl. XXIX. S. 432.)

§. 55.

Um aus den vier Gleichungen (133) die drei Perpendikel p_1, p_2, p_3 zu eliminiren, addiren wir die drei letzten derselben und subtrahiren gleichzeitig von der Summe die erste. Dadurch erhalten wir:

$$0=\frac{1}{\varDelta'}(\operatorname{tg}\varrho_1+\operatorname{tg}\varrho_2+\operatorname{tg}\varrho_3-\operatorname{tg}\varrho)-4\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon\operatorname{tg}r$$

oder

$$\operatorname{tg}\varrho_1+\operatorname{tg}\varrho_2+\operatorname{tg}\varrho_3-\operatorname{tg}\varrho=4\varDelta'\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon\operatorname{tg}r,$$

welche Gleichung für das ebene Dreieck in jene $\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3-\varrho=4r$ übergeht. Wendet man dieselbe auf das an der Seite a liegende Nebendreieck an, so tritt ϱ_1, r_1, ε_1 an die Stelle von ϱ, r, ε, und $\varDelta'$ verwandelt sich in $\varDelta''$. Alle übrigen Stücke bleiben dieselben, denn das Nebendreieck an der Seite 180^0-b hat die drei Seiten: 180^0-a, 180^0-b, c, und einem solchen entsprechen die Radien ϱ_3, r_3, und das Nebendreieck an der Seite 180^0-c hat die drei Seiten: 180^0-a, b, 180^0-c, und einem solchen Dreiecke entsprechen die Radien ϱ_2, r_2. Man hat daher auch:

$$\operatorname{tg}\varrho+\operatorname{tg}\varrho_2+\operatorname{tg}\varrho_3-\operatorname{tg}\varrho_1=4\varDelta''\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon_1\operatorname{tg}r_1,$$

und wenn man die obige Gleichung ebenso auf die Nebendreiecke an den Seiten b und c anwendet, schliesslich alles zusammenstellt, so gelangt man zu folgendem System von vier Gleichungen:

$$(137)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\varrho_1 + \operatorname{tg}\varrho_2 + \operatorname{tg}\varrho_3 - \operatorname{tg}\varrho = 4\Delta' \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{tg} r, \\ \operatorname{tg}\varrho + \operatorname{tg}\varrho_2 + \operatorname{tg}\varrho_3 - \operatorname{tg}\varrho_1 = 4\Delta'' \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon_1 \operatorname{tg} r_1, \\ \operatorname{tg}\varrho + \operatorname{tg}\varrho_1 + \operatorname{tg}\varrho_3 - \operatorname{tg}\varrho_2 = 4\Delta''' \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 \operatorname{tg} r_2, \\ \operatorname{tg}\varrho + \operatorname{tg}\varrho_1 + \operatorname{tg}\varrho_2 - \operatorname{tg}\varrho_3 = 4\Delta^{IV} \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon_3 \operatorname{tg} r_3. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gelten, wie aus dem Obigen von selbst hervorgeht, allgemein und sind von der Lage des Mittelpunktes des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises unabhängig.

Werden die Gleichungen (14) §. 11. mit einander multiplicirt, so erhält man:

$$(\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c)^2 (\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c)^2 = \Delta\Delta_1\Delta_2\Delta_3$$

oder

$$(\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c)^2 (\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c)^2 = \Delta\Delta_1\Delta_2\Delta_3,$$

und man hat daher mit Rücksicht auf die Gleichungen (a) §. 31.:

$$\Delta' = \frac{\sqrt{\Delta\Delta_1\Delta_2\Delta_3}}{\Delta}, \quad \Delta'' = \frac{\sqrt{\Delta\Delta_1\Delta_2\Delta_3}}{\Delta_1}, \qquad \text{ebenso}$$

$$\Delta''' = \frac{\sqrt{\Delta\Delta_1\Delta_2\Delta_3}}{\Delta_2}, \quad \Delta^{IV} = \frac{\sqrt{\Delta\Delta_1\Delta_2\Delta_3}}{\Delta_3};$$

oder wenn man auf die Gleichungen (16) §. 11. die in §. 34. eingeführte Bezeichnung anwendet, wodurch

$$(\text{o})\quad \Delta = \tfrac{1}{4}H_1\mathfrak{A}, \; \Delta_1 = \tfrac{1}{4}H_1\mathfrak{B}, \; \Delta_2 = \tfrac{1}{4}H_1\mathfrak{C}, \; \Delta_3 = \tfrac{1}{4}H_1\mathfrak{D}$$

wird:

$$(\text{p})\quad \begin{cases} \Delta' = \tfrac{1}{4}H_1 \dfrac{\sqrt{\mathfrak{ABCD}}}{\mathfrak{A}}, \quad \Delta'' = \tfrac{1}{4}H_1 \dfrac{\sqrt{\mathfrak{ABCD}}}{\mathfrak{B}}, \\ \Delta''' = \tfrac{1}{4}H_1 \dfrac{\sqrt{\mathfrak{ABCD}}}{\mathfrak{C}}, \quad \Delta^{IV} = \tfrac{1}{4}H_1 \dfrac{\sqrt{\mathfrak{ABCD}}}{\mathfrak{D}}. \end{cases}$$

Ferner ist nach §. 34:

$$(\text{q})\quad \operatorname{tg} r = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}, \quad \operatorname{tg} r_1 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}, \quad \operatorname{tg} r_2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}, \quad \operatorname{tg} r_3 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{D},$$

und wenn man jetzt die Werthe aus (p) und (q) in die Gleichungen (137) einführt und bedenkt, dass

$\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varepsilon = \operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B+C)$, $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varepsilon_1 = \operatorname{Sin}\frac{1}{2}(B+C-A)$, u. s. w.

ist, so sieht man augenblicklich, dass sich dieselben in jene (83) verwandeln, welche wir auf einem anderen Wege gefunden haben.

§. 56.

Zur Bestimmung der drei sphärischen Perpendikel, welche man vom Mittelpunkt des einem sphärischen Dreieck umschriebenen Kreises auf die drei Seiten desselben fällt, haben wir in §. 51. die Gleichungen aufgestellt:

$$(138)\quad \begin{cases} \pm \operatorname{tg} p_1 = \operatorname{Sin}\frac{1}{2}a \operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C-A), \\ \operatorname{tg} p_2 = \operatorname{Sin}\frac{1}{2}b \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+C-B), \\ \operatorname{tg} p_3 = \operatorname{Sin}\frac{1}{2}c \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B-C); \end{cases}$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises innerhalb des Dreiecks liegt oder ausserhalb desselben und dem Winkel A gegenüber. Wenden wir diese Formeln auf das Polardreieck an, indem wir jetzt diese Perpendikel mit p_1', p_2', p_3' bezeichnen, so werden auch diese durch die Gleichungen (138) bestimmt, wenn man im zweiten Theil alle Buchstaben mit Strichen versieht. Kehrt man alsdann mittelst der bekannten, in §. 16. aufgeführten Relationen von den Elementen des Polardreieckes zu jenen des Hauptdreieckes zurück, so erlangt man leicht folgende Gleichungen:

$$(139)\quad \begin{cases} \pm \operatorname{tg} p_1' = \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+c-a)}, \\ \operatorname{tg} p_2' = \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+c-b)}, \\ \operatorname{tg} p_3' = \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b-c)}. \end{cases}$$

Bezeichnet man die drei Entfernungen des Mittelpunktes des einem sphärischen Dreieck eingeschriebenen Kreises von den drei Ecken mit q_1, q_2, q_3, so haben wir in §. 4. gefunden:

$$(3)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} q_1 = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a}, \\ \operatorname{tg} q_2 = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b}, \\ \operatorname{tg} q_3 = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}; \end{cases}$$

folglich ist:

$$\pm \operatorname{tg} p_1' = \frac{1}{\operatorname{tg} q_1}, \quad \operatorname{tg} p_2' = \frac{1}{\operatorname{tg} q_2}, \quad \operatorname{tg} p_3' = \frac{1}{\operatorname{tg} q_3}$$

oder

$$\pm \operatorname{tg} p_1' \operatorname{tg} q_1 = 1, \quad \operatorname{tg} p_2' \operatorname{tg} q_2 = 1, \quad \operatorname{tg} p_3' \operatorname{tg} q_3 = 1;$$

das ist

$$(140) \quad \pm p_1' + q_1 = 90^0, \quad p_2' + q_2 = 90^0, \quad p_3' + q_3 = 90^0;$$

und auch, weil jedes Dreieck als das Polardreieck seines Polardreieckes zu betrachten ist:

$$(141) \quad \pm p_1 + q_1' = 90^0, \quad p_2 + q_2' = 90^0, \quad p_3 + q_3' = 90^0;$$

und wenn wir jetzt festsetzen für den Fall, dass der Mittelpunkt des dem Hauptdreieck oder dem Polardreieck umschriebenen Kreises ausser des Dreiecks fällt, das auf die, dem genannten Mittelpunkt gegenüberliegende Seite gefällte Perpendikel mit — zu bezeichnen, so können wir, die durch die obigen doppelten Zeichen angedeuteten zwei Fälle in einen zusammenziehend, folgenden Lehrsatz aussprechen:

Die Entfernungen des Mittelpunktes des einem sphärischen Dreieck umschriebenen Kreises von den drei Seiten und die correspondirenden Entfernungen des Mittelpunktes des seinem Polardreieck eingeschriebenen Kreises von den drei Ecken ergänzen sich gegenseitig zu 90° oder zu einem sphärischen Hauptquadranten, und umgekehrt.

Wir gehen nun über zur Bestimmung der Entfernungen des Mittelpunktes des einem sphärischen Dreieck umschriebenen Kreises von den Mittelpunkten seiner vier Berührungskreise erstens durch die drei Seiten, zweitens durch die drei Winkel des sphärischen Dreieckes, und drittens durch die Radien dieser Kreise selbst. Die für den letzten Fall giltigen Formeln sind besonders bemerkenswerth wegen ihrer Einfachheit und wegen der auch hier sich wieder darbietenden Analogie mit jenen, welche die Lösung desselben Problems für das ebene Dreieck enthalten und welche letzteren zuerst von Euler aufgestellt wurden. Der Verfolg dieses Gegenstandes wird uns auch die Entfernungen des Mittelpunktes des einem sphärischen Dreieck eingeschriebenen Kreises von den Mittelpunkten der seinen drei Nebendreiecken umschriebenen Kreise kennen lehren, und aus beiden wird sich endlich ein Lehrsatz ergeben, welcher als ein weiterer Beitrag zu den in den §§. 16., 21., 46., 47., 48., 56. aufgeführten allgemeinen Beziehungen

zwischen jedem sphärischen Dreieck und seinem Polardreieck zu betrachten ist.

§. 57.

1. Aufgabe. Es soll die Entfernung des Mittelpunktes des einem sphärischen Dreieck umschriebenen Kreises von dem Mittelpunkte des demselben Dreieck eingeschriebenen Kreises berechnet werden, wenn die drei Seiten des sphärischen Dreiecks gegeben sind.

Es sei für das Dreieck ABC (Taf. I. Fig. 3.) O der Mittelpunkt des umschriebenen, o jener des eingeschriebenen Kreises, alsdann ist $OA = r$, $oA = q_1$, $Oo = d$ die gesuchte Distanz, $\angle OAB = \frac{1}{2}(A + B - C)$ (§. 19.), $\angle oAB = \frac{1}{2}A$, mithin

$$\theta = \tfrac{1}{2}(A + B - C) - \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}(B - C)$$

Liegt der Punkt O auf der entgegengesetzten Seite von Ao, so ist, weil $\angle OAC = \frac{1}{2}(A + C - B)$,

$$\theta = \tfrac{1}{2}(A + C - B) - \tfrac{1}{2}A = -\tfrac{1}{2}(B - C).$$

In dem sphärischen Dreiecke AOo ist

$$\operatorname{Cos} d = \operatorname{Cos} r \operatorname{Cos} q_1 + \operatorname{Sin} r \operatorname{Sin} q_1 \operatorname{Cos} \theta;$$

setzt man diesen Werth von $\operatorname{Cos} d$ in die bekannte goniometrische Formel

$$\operatorname{tg}^2 d = \frac{1 - \operatorname{Cos}^2 d}{\operatorname{Cos}^2 d},$$

so erhält man:

$$\operatorname{tg}^2 d = \frac{1 - (\operatorname{Cos} r \operatorname{Cos} q_1 + \operatorname{Sin} r \operatorname{Sin} q_1 \operatorname{Cos} \theta)^2}{(\operatorname{Cos} r \operatorname{Cos} q_1 + \operatorname{Sin} r \operatorname{Sin} q_1 \operatorname{Cos} \theta)^2}$$

$$= \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 r)(1 + \operatorname{tg}^2 q_1) - (1 + \operatorname{tg} r \operatorname{tg} q_1 \operatorname{Cos} \theta)^2}{(1 + \operatorname{tg} r \operatorname{tg} q_1 \operatorname{Cos} \theta)^2},$$

welcher letztere Ausdruck aus dem vorhergehenden folgt, indem man Zähler und Nenner durch $\operatorname{Cos}^2 r \operatorname{Cos}^2 q_1$ dividirt und statt der Cosinus die Tangenten einführt. Wird der Zähler dieses Ausdruckes entwickelt, so gelangt man alsbald zu dem folgenden:

$$\text{(r)} \quad \operatorname{tg}^2 d = \frac{\operatorname{tg}^2 r (1 + \operatorname{tg}^2 q_1 \operatorname{Sin}^2 \theta) - (2 \operatorname{tg} r \operatorname{tg} q_1 \operatorname{Cos} \theta - \operatorname{tg}^2 q_1)^2}{(1 + \operatorname{tg} r \operatorname{tg} q_1 \operatorname{Cos} \theta)^2},$$

und es kommt nun zunächst darauf an, die in diesem Bruch vor-

kommenden drei Ausdrücke aus den drei Seiten a, b, c des gegebenen sphärischen Dreieckes zu bestimmen, was in den nächsten Paragraphen geschehen soll.

§. 58.

Da in dem Ausdruck (r) nur $\operatorname{Sin}^2\theta$ und $\operatorname{Cos}\theta$ erscheint, so ist es gleichgiltig, welchen der zwei für θ gefundenen Werthe wir einsetzen, und man hat daher, weil nach §. 4. (3):

$$(3) \qquad \operatorname{tg} q_1 = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A},$$

$$1+\operatorname{tg}^2 q_1 \operatorname{Sin}^2\theta = 1 + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}A}.\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}(B-C),$$

oder weil nach **Gauss**:

$$\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A} = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b-c)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a},$$

wenn man gleichzeitig auf den Nenner stellt:

$$1+\operatorname{tg}^2 q_1 \operatorname{Sin}^2\theta = \frac{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(b+c-a)+\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(b-c)}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(b+c-a)};$$

der Zähler dieses Bruches ist auch gleich

$$\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(b+c-a)\{\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}a-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}(b-c)\}+\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}(b-c),$$

oder weil nach einer bekannten goniometrischen Formel

$$\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}a-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}(b-c) = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c),$$

$$\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}(b-c) = \operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}a-\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c),$$

auch gleich

$$\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}a-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c),$$

mithin

$$\text{(s)} \qquad 1+\operatorname{tg}^2 q_1 \operatorname{Sin}^2\theta = \frac{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a-\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(b+c-a)}.$$

§. 59.

Wir gehen nun an die Berechnung des zweiten Ausdruckes

$2 \operatorname{tg} r \operatorname{tg} q_1 \operatorname{Cos} \theta - \operatorname{tg}^2 q_1$ aus den drei Seiten a, b, c. Erinnert man sich, dass nach §. 19.:

$$(41) \qquad \operatorname{tg} r = \frac{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}a \operatorname{Sin} \frac{1}{2}b \operatorname{Sin} \frac{1}{2}c}{H_1},$$

so folgt mit Rücksicht auf Obiges:

$$\operatorname{tg} r \operatorname{tg} q_1 \operatorname{Cos} \theta = \frac{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}a \operatorname{Sin} \frac{1}{2}b \operatorname{Sin} \frac{1}{2}c}{H_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}A} \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(B-C),$$

oder weil nach den Gauss'schen Gleichungen:

$$\frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}A} = \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(b+c)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}a}, \text{ folglich } \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(b+c)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}a} \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}A,$$

$$\operatorname{tg} r \operatorname{tg} q_1 \operatorname{Cos} \theta = \frac{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}a \operatorname{Sin} \frac{1}{2}b \operatorname{Sin} \frac{1}{2}c}{H_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}A} \cdot \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(b+c)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}a} \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}A$$

$$= \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}a \operatorname{Sin} \frac{1}{2}b \operatorname{Sin} \frac{1}{2}c}{H_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2}A} \cdot \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(b+c)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}a} \operatorname{Sin} A;$$

ersetzt man nun $\operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2}A$ und $\operatorname{Sin} A$ durch seine bekannten Werthe in a, b, c und reducirt so viel als möglich, so zeigt sich:

$$(\mathrm{t}) \qquad \operatorname{tg} r \operatorname{tg} q_1 \operatorname{Cos} \theta = \frac{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}b \operatorname{Sin} \frac{1}{2}c \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(b+c)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+b+c) \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(b+c-a)}.$$

Nach §. 4. ist auch:

$$\operatorname{tg}^2 q_1 = \frac{\operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+b+c) \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2}(b+c-a)},$$

mithin

$$2 \operatorname{tg} r \operatorname{tg} q_1 \operatorname{Cos} \theta - \operatorname{tg}^2 q_1 = \frac{4 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}b \operatorname{Sin} \frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+b+c) \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2}(b+c-a)}$$

$$\times \{\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(b+c) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(b+c-a) - \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}b \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}c \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(b+c-a)\};$$

der in den Klammern enthaltene Ausdruck ist auch gleich

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(b+c) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(b+c-a) - \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(b+c-a) \{\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(b+c) + \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}b \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}c\}$$

$$= \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}a - \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}b \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}c \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(b+c-a),$$

und man hat demnach:

$$(\mathrm{u}) \qquad 2 \operatorname{tg} r \operatorname{tg} q_1 \operatorname{Cos} \theta - \operatorname{tg}^2 q_1$$

$$= \frac{4 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}a \operatorname{Sin} \frac{1}{2}b \operatorname{Sin} \frac{1}{2}c - 4 \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}b \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}c \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+b+c) \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2}(b+c-a)}$$

§. 60.

Zur Berechnung des dritten Ausdruckes $1+\operatorname{tg}r\operatorname{tg}q_1\operatorname{Cos}\theta$ bedienen wir uns der Gleichung (t) und erhalten sofort:

$$1+\operatorname{tg}r\operatorname{tg}q_1\operatorname{Cos}\theta=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)+2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)}.$$

Der Zähler dieses Bruches lässt sich nun auf folgende, unseren Zwecken dienliche Weise transformiren. Weil

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c)=\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\{(a+b+c)-a\}$$
$$=\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a-\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a,$$

so ist obiger Zähler auch gleich

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a)+2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)$$
$$-2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)$$
$$=\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a)+2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c\}$$
$$-2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c),$$

und da aus den Gleichungen (a) und (b) des §. 32. mit Leichtigkeit folgt:

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a)+2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c$$
$$=-\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)+2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c,$$

so ist obiger Zähler auch gleich

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c-\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\}$$
$$-2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c),$$

und setzt man endlich zur Abkürzung:

(142)

$$M=2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c-\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\left\{1+\frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}\right\},$$

so wird obiger Zähler gleich $M\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)$, mithin:

$$\text{(v)}\qquad 1+\operatorname{tg}r\operatorname{tg}q_1\operatorname{Cos}\theta=\frac{M}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)}.$$

§. 61.

Um nun endlich zur Bestimmung der Distanz d selbst zu gelangen, setzen wir statt der in der Gleichung (r) vorkommen-

den drei Ausdrücke ihre Werthe aus (s), (u) und (v) und erhalten mit Anwendung der Gleichung (42):

$$\operatorname{tg}^2 d = \frac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(b+c-a)}{M^2}\left\{\frac{4\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}c}{H_1^2}\right.$$

$$\times\frac{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a-\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(b+c-a)}$$

$$\left.-\frac{4\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c-4\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}c\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(b+c-a)}\right\},$$

oder

$$\operatorname{tg}^2 d = \frac{1}{M^2}\left\{\frac{4\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}c}{H_1^2}\right.$$

$$-\frac{4\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}c\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{H_1^2}$$

$$\left.-\frac{4\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}+\frac{4\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}c\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}\right\}.$$

Setzt man im zweiten Gliede des in der Klammer enthaltenen Ausdrucks für H_1^2 seinen bekannten Werth und reduzirt, so sieht man, dass dieses Glied von dem vierten nur im Zeichen verschieden ist, also mit diesem sich aufhebt, und man hat:

(143)

$$\operatorname{tg}^2 d = \frac{1}{M^2}\left\{\frac{4\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}c}{H_1^2}-\frac{4\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}\right\},$$

womit unsere obige Aufgabe gelöst ist. Mit Hilfe der Gleichungen (12) und (42) ergibt sich unmittelbar die Relation:

$$(144)\qquad \operatorname{tg}^2 d = \frac{\operatorname{tg}^2 r - 2\operatorname{tg} r\operatorname{tg}\varrho}{M^2},$$

bezüglich welcher wir hier nur in Kürze bemerken, dass sie bei dem Uebergang auf das ebene geradlinige Dreieck mit Leichtigkeit in jene $d^2 = r^2 - 2r\varrho$ übergeht, denn M verwandelt sich alsdann in die Einheit und die Tangenten werden den Bogen gleich.

Um auch M durch die Radien der eingeschriebenen und umschriebenen Kreise auszudrücken, benützen wir wieder die Gleichungen (12) und (42) und erinnern, dass $\varDelta' = \operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c$ ist. Dadurch wird:

$$(\text{w})\qquad M = 2\varDelta' - \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)(1+\operatorname{tg} r\operatorname{tg}\varrho);$$

nach §. 55. ist

(p) $$\Delta' = \tfrac{1}{4} H_1 \frac{\sqrt{\mathfrak{ABCD}}}{\mathfrak{A}},$$

oder mit Rücksicht auf §. 34.:

(x) $$\Delta' = \tfrac{1}{4} H_1 \frac{\sqrt{\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3}}{\operatorname{tg} r};$$

benutzt man noch für $\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(a+b+c)$ seinen Werth aus dem System (79) §. 33., so wird:

(145) $$M = \sqrt{\operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg} \varrho_1 \operatorname{tg} \varrho_2 \operatorname{tg} \varrho_3 \operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3}$$
$$\times \{\operatorname{ctg} r + \tfrac{1}{2}(1 + \operatorname{tg} r \operatorname{tg} \varrho)(\operatorname{ctg} r_1 + \operatorname{ctg} r_2 + \operatorname{ctg} r_3 - \operatorname{ctg} r)\}.$$

Die Gleichung (144) in Verbindung mit jener letzten (146) dient zur Berechnung der Distanz d, wenn die Radien der eingeschriebenen und umschriebenen Kreise gegeben sind.

§. 62.

2. Aufgabe. Es soll die Entfernung des Mittelpunktes des einem sphärischen Dreieck umschriebenen Kreises von dem Mittelpunkte des einem seiner Nebendreiecke eingeschriebenen Kreises berechnet werden, wenn die drei Seiten des Hauptdreieckes gegeben sind.

Ist O_1 (Taf. I. Fig. 3.) der Mittelpunkt des dem an der Seite a des Hauptdreieckes ABC liegenden Nebendreieckes eingeschriebenen Kreises, so ist $OO_1 = d_1$ die fragliche Distanz, und es liegt der Mittelpunkt O_1 auf der Verlängerung des sphärischen Hauptbogens Ao, mithin hat in dem sphärischen Dreiecke AOO_1 der Winkel θ denselben Werth wie früher, er ist nämlich gleich $\frac{1}{2}(B-C)$ oder gleich $-\frac{1}{2}(B-C)$, je nachdem B grösser oder kleiner als C ist. Setzt man $AO_1 = q$, so folgt aus dem Dreieck AOO_1: $\operatorname{Cos} d_1 = \operatorname{Cos} r \operatorname{Cos} q + \operatorname{Sin} r \operatorname{Sin} q \operatorname{Cos} \theta$, woraus man, nach demselben Verfahren, welches in §. 57. zur Bestimmung von $\operatorname{tg}^2 d$ diente, erhält:

(y) $$\operatorname{tg}^2 d_1 = \frac{\operatorname{tg}^2 r(1 + \operatorname{tg}^2 q \operatorname{Sin}^2 \theta) - (2 \operatorname{tg} r \operatorname{tg} q \operatorname{Cos} \theta - \operatorname{tg}^2 q)}{(1 + \operatorname{tg} r \operatorname{tg} q \operatorname{Cos} \theta)^2},$$

und es ist nun die Aufgabe darauf zurückgeführt, zunächst die drei in diesem Bruch vorkommenden Ausdrücke als Functionen der drei Seiten a, b, c des gegebenen sphärischen Dreieckes darzustellen.

§. 63.

Da nach §. 8. (9):

$$\text{(z)} \qquad \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A}$$

ist, so wird

$$1+\operatorname{tg}^2 q \operatorname{Sin}^2\theta$$

$$= 1+\frac{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}A}\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}(B-C) = 1+\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)\frac{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(b-c)}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a}$$

oder

$$1+\operatorname{tg}^2 q \operatorname{Sin}^2\theta = \frac{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(a+b+c)+\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(b-c)}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(a+b+c)};$$

der Zähler dieses Bruches kann auf folgende Art umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\text{Zähler} &= \operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}a-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}a-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}(b-c)\}\\ &= \operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}a-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c),\end{aligned}$$

mithin ist:

$$\text{(a')}$$

$$1+\operatorname{tg}^2 q\operatorname{Sin}^2\theta = \frac{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a-\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(a+b+c)}.$$

§. 64.

Bei der Berechnung des zweiten Ausdruckes $2\operatorname{tg} r\operatorname{tg} q\operatorname{Cos}\theta-\operatorname{tg}^2 q$ benutzen wir wieder die schon in §. 59. zu gleichem Zwecke angewandte Gleichung (42), ferner jene (z) des vorigen Paragraphen, und erhalten zunächst:

$$\operatorname{tg} r\operatorname{tg} q\operatorname{Cos}\theta = \frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{H_1}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B-C),$$

oder, mit Anwendung der Gauss'schen Gleichung

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A:$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} r\operatorname{tg} q\operatorname{Cos}\theta &= \frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{H_1}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A}\cdot\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A\\ &= \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{H_1}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}A}\cdot\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a}\operatorname{Sin}A;\end{aligned}$$

weil aber bekanntlich:

$$\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Sin}\,c} \quad \text{und} \quad \mathrm{Sin}\,A = \frac{2H_1}{\mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Sin}\,c},$$

so wird nach Einführung dieser Werthe und gehöriger Reduction:

$$(\mathrm{b}') \qquad \mathrm{tg}r\,\mathrm{tg}q\,\mathrm{Cos}\,\theta = \frac{2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c)}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)},$$

und weil nach §. 8.:

$$\mathrm{tg}^2 q = \frac{\mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)}$$

ist, so wird:

$$2\,\mathrm{tg}r\,\mathrm{tg}q\,\mathrm{Cos}\,\theta - \mathrm{tg}^2 q = \frac{4\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}c}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)}$$

$$\times\{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c) - \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\},$$

oder da der in den Klammern enthaltene Ausdruck auch gleich

$$\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c) - \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(b+c) + \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}c\}$$
$$= -\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}a - \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

ist, auch:

$$(\mathrm{c}') \qquad 2\,\mathrm{tg}r\,\mathrm{tg}q\,\mathrm{Cos}\,\theta - \mathrm{tg}^2 q$$
$$= -\frac{4\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}c + 4\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)}.$$

§. 65.

Um den dritten Ausdruck $1+\mathrm{tg}r\,\mathrm{tg}q\,\mathrm{Cos}\,\theta$, welcher im zweiten Theil der (y) den Nenner bildet, durch die drei Seiten zu bestimmen, verwenden wir die Gleichung (b′) und erhalten unmittelbar:

$$1+\mathrm{tg}r\,\mathrm{tg}q\,\mathrm{Cos}\,\theta = \frac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c) + 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c)}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)}$$

oder, da der Zähler dieses Bruches auch gleich

$$\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)\{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c) + 2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}c\}$$
$$+ 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)$$
$$= \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)\{2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c - \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)\}$$
$$+ 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)$$

ist, wenn wir zur Abkürzung

(146)

$$M_1 = 2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c - \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)\left\{1 - \frac{2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}c}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)}\right\}$$

setzen:

$$(d') \qquad 1 + \mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,q\,\mathrm{Cos}\,\theta = \frac{M_1}{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)}.$$

§. 66.

Mit Hilfe der Gleichungen (a′), (c′) und (d′) sind wir nun im Stande, $\mathrm{tg}^2 d$ als reine Function der drei Seiten a, b, c des gegebenen sphärischen Dreieckes darzustellen. In der That, setzen wir diese Werthe in die Gleichung (y), so folgt:

$$\mathrm{tg}^2 d_1 = \frac{\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{M_1^2}\left\{\frac{4\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}c}{H_1^2}\right.$$

$$\times \frac{\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}a - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)}$$

$$\left. - \frac{4\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}c + 4\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)}\right\}$$

oder

$$\mathrm{tg}^2 d_1 = \frac{1}{M_1^2}\left\{\frac{4\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}c}{H_1^2}\right.$$

$$- \frac{4\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{H_1^2}$$

$$\left. + \frac{4\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}c}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)} + \frac{4\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)}\right\}.$$

Setzt man im zweiten Gliede des in der Klammer enthaltenen Ausdruckes für H_1^2 seinen bekannten Werth und kürzt ab, so überzeugt man sich sogleich, dass dieses Glied von dem vierten nur im Zeichen verschieden ist, folglich mit diesem sich aufhebt; es ist daher

$$(147) \quad \mathrm{tg}^2 d_1 = \frac{1}{M_1^2}\left\{\frac{4\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}c}{H_1^2} + \frac{4\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}c}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)}\right\},$$

durch welche Formel die vorstehende Aufgabe gelöst ist. Mit Hilfe der Gleichungen (12), (42) geht dieselbe über in folgende:

$$(148) \qquad \mathrm{tg}^2 d_1 = \frac{\mathrm{tg}^2 r + 2\,\mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,\varrho_1}{M_1^2},$$

welche sich bei dem Uebergang auf das ebene geradlinige Dreieck, indem man letzteres als ein sphärisches von unendlich grossem Kugelradius betrachtet, auf die bekannte Relation $d_1{}^2 = r^2 + 2r\varrho_1$ reducirt, denn M_1 wird alsdann der Einheit und die Tangenten werden dem Bogen gleich.

Um auch wieder M_1 durch die Radien der eingeschriebenen und umschriebenen Kreise auszudrücken, verwenden wir die Gleichungen (12) und (42), setzen $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a \operatorname{Cos}\frac{1}{2}b \operatorname{Cos}\frac{1}{2}c = \varDelta'$ und erhalten zunächst:

$$M_1 = 2\varDelta' - \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a)\,(1 - \operatorname{tg} r \operatorname{tg} \varrho_1);$$

setzt man jetzt für $\varDelta'$ seinen Werth aus (x) §. 61. und für $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)$ seinen Werth aus (79) §. 33., so wird:

$$(149)\quad M_1 = \sqrt{\operatorname{tg}\varrho \operatorname{tg}\varrho_1 \operatorname{tg}\varrho_2 \operatorname{tg}\varrho_3 \operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3} \\ \times \{\operatorname{ctg} r - \tfrac{1}{2}(1 - \operatorname{tg} r \operatorname{tg}\varrho_1)(\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} r_3 - \operatorname{tg} r_1)\}.$$

§. 67.

Im Vorhergehenden bezeichnen d und d_1 die sphärischen Distanzen des Mittelpunktes des einem sphärischen Dreieck umschriebenen Kreises vom Mittelpunkt des demselben Dreieck eingeschriebenen Kreises und vom Mittelpunkt desjenigen äusseren Berührungskreises, welcher an der Seite a liegt; M und M_1 bezeichnen zwei Hilfsgrössen zur Berechnung dieser Distanzen. Bezeichnen wir die Distanzen desselben Punktes von den Mittelpunkten derjenigen äusseren Berührungskreise, welche an den Seiten b und c liegen, mit d_2 und d_3, mit M_2 und M_3 die zugehörigen Hilfsgrössen, so erhält man diese letzteren aus den Gleichungen (146), (147), (148), (149) durch einfache Vertauschung der Buchstaben a, ϱ_1, r_1 mit b, ϱ_2, r_2 und c, ϱ_3, r_3. Stellt man alsdann alles zusammen, so gelangt man zu folgenden vier Systemen von Gleichungen:

$$(150)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2 d = \dfrac{1}{M^2}\left\{\dfrac{4\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}c}{H_1{}^2} - \dfrac{4\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}\right\}, \\ \operatorname{tg}^2 d_1 = \dfrac{1}{M_1{}^2}\left\{\dfrac{4\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}c}{H_1{}^2} + \dfrac{4\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}\right\}, \\ \operatorname{tg}^2 d_2 = \dfrac{1}{M_2{}^2}\left\{\dfrac{4\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}c}{H_1{}^2} + \dfrac{4\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}\right\}, \\ \operatorname{tg}^2 d_3 = \dfrac{1}{M_3{}^2}\left\{\dfrac{4\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}c}{H_1{}^2} + \dfrac{4\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}\right\}; \end{cases}$$

(151)

$$M = 2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c - \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\left\{1 + \frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}\right\},$$

$$M_1 = 2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c - \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a)\left\{1 - \frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}\right\},$$

$$M_2 = 2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c - \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+c-b)\left\{1 - \frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}\right\},$$

$$M_3 = 2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c - \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b-c)\left\{1 - \frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}\right\}.$$

$$(152)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2 d = \dfrac{\operatorname{tg}^2 r - 2\operatorname{tg}r\operatorname{tg}\varrho}{M^2}, & \operatorname{tg}^2 d_1 = \dfrac{\operatorname{tg}^2 r + 2\operatorname{tg}r\operatorname{tg}\varrho_1}{M_1^2}, \\ \operatorname{tg}^2 d_2 = \dfrac{\operatorname{tg}^2 r + 2\operatorname{tg}r\operatorname{tg}\varrho_2}{M_2^2}, & \operatorname{tg}^2 d_3 = \dfrac{\operatorname{tg}^2 r + 2\operatorname{tg}r\operatorname{tg}\varrho_3}{M_3^2}; \end{cases}$$

$$(153)\quad \begin{cases} M = \sqrt{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3} \\ \times\{\operatorname{ctg}r + \tfrac{1}{2}(1+\operatorname{tg}r\operatorname{tg}\varrho)(\operatorname{ctg}r_1 + \operatorname{ctg}r_2 + \operatorname{ctg}r_3 - \operatorname{ctg}r)\}, \\ M_1 = \sqrt{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3} \\ \times\{\operatorname{ctg}r - \tfrac{1}{2}(1-\operatorname{tg}r\operatorname{tg}\varrho_1)(\operatorname{ctg}r + \operatorname{ctg}r_2 + \operatorname{ctg}r_3 - \operatorname{ctg}r_1)\}, \\ M_2 = \sqrt{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3} \\ \times\{\operatorname{ctg}r - \tfrac{1}{2}(1-\operatorname{tg}r\operatorname{tg}\varrho_2)\operatorname{ctg}r + \operatorname{ctg}r_1 + \operatorname{ctg}r_3 - \operatorname{ctg}r_2)\}, \\ M_3 = \sqrt{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3} \\ \times\{\operatorname{ctg}r - \tfrac{1}{2}(1-\operatorname{tg}r\operatorname{tg}\varrho_3)(\operatorname{ctg}r + \operatorname{ctg}r_1 + \operatorname{ctg}r_2 - \operatorname{ctg}r_3)\}. \end{cases}$$

§. 68.

Bestimmung der sphärischen Distanzen d, d_1, d_2, d_3 sammt den zugehörigen Hilfsgrössen M, M_1, M_2, M_3 durch die drei Winkel A, B, C des gegebenen sphärischen Dreieckes.

Wenn man in den Gleichungen (152) statt $\operatorname{tg}r$, $\operatorname{tg}\varrho$, $\operatorname{tg}\varrho_1$, $\operatorname{tg}\varrho_2$, $\operatorname{tg}\varrho_3$ die entsprechenden Werthe aus (43) und (33) setzt, so erhält man unmittelbar:

$$
(154)\begin{cases}
\operatorname{tg}^2 d = \dfrac{1}{M^2}\left\{\dfrac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(A+B+C)}{H'^2} + \dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}\right\},\\[2ex]
\operatorname{tg}^2 d_1 = \dfrac{1}{M_1^2}\left\{\dfrac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(A+B+C)}{H'^2} - \dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}\right\},\\[2ex]
\operatorname{tg}^2 d_2 = \dfrac{1}{M_2^2}\left\{\dfrac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(A+B+C)}{H'^2} - \dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}\right\},\\[2ex]
\operatorname{tg}^2 d_3 = \dfrac{1}{M_3^2}\left\{\dfrac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(A+B+C)}{H'^2} - \dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B}\right\}.
\end{cases}
$$

Um auch die zugehörigen vier Hilfsgrössen M, M_1, M_2, M_3 durch die drei Winkel A, B, C auszudrücken, verwenden wir zunächst die Gleichungen (72) §. 32. und (96) §. 40., dann auch wieder jene (43) und (33), und erhalten, weil

$$M = 2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c - \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)(1+\operatorname{tg}r\operatorname{tg}\varrho),$$

$$M_1 = 2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c - \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a)(1-\operatorname{tg}r\operatorname{tg}\varrho_1)$$

u. s. w.

ist:

$$
(155)\begin{cases}
M = -\dfrac{2H'^2}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}\\
\qquad + \dfrac{1-\operatorname{Cos}A-\operatorname{Cos}B-\operatorname{Cos}C}{4\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}\left\{1-\dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}\right\},\\[2ex]
M_1 = -\dfrac{2H'^2}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}\\
\qquad - \dfrac{1-\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}B+\operatorname{Cos}C}{4\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}\left\{1+\dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}\right\},\\[2ex]
M_2 = -\dfrac{2H'^2}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}\\
\qquad - \dfrac{1+\operatorname{Cos}A-\operatorname{Cos}B+\operatorname{Cos}C}{4\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}\left\{1+\dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}\right\},\\[2ex]
M_3 = -\dfrac{2H'^2}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}\\
\qquad - \dfrac{1+\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}B-\operatorname{Cos}C}{4\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B}\left\{1+\dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B}\right\}.
\end{cases}
$$

§. 69.

Bezeichnet d' die sphärische Distanz des Mittelpunktes des

dem Polardreieck von ABC umschriebenen Kreises von dem Mittelpunkte des demselben Dreieck eingeschriebenen Kreises und d_1' die sphärische Distanz desselben Mittelpunktes von dem Mittelpunkt desjenigen äusseren Berührungskreises, welcher an der Seite a' liegt, so können diese Distanzen d', d_1' aus den je zwei ersten der Gleichungen (150), (152), (154) offenbar dadurch bestimmt werden, dass man alle in den zweiten Theilen derselben vorkommenden Buchstaben mit Strichen versieht. M' und M_1' bezeichnen alsdann das, was aus M und M_1 in (151), (155) wird, wenn man auch hierin a', b', c' an die Stelle von a, b, c und A', B', C' an die Stelle von A, B, C setzt. Um dann diese Distanzen durch die Bestandtheile des Hauptdreieckes auszudrücken, bedient man sich wieder der bekannten Relationen zwischen den Seiten und Winkeln des Haupt- und Polardreieckes (§. 16) und erhält mit theilweiser Berücksichtigung der Resultate des §. 21. sofort:

(e′)

$$\operatorname{tg}^2 d' = \frac{1}{M'^2}\left\{\frac{4\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}C}{H'^2} + \frac{4\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C)}\right\},$$

$$\operatorname{tg}^2 d_1' = \frac{1}{M_1'^2}\left\{\frac{4\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}C}{H'^2} + \frac{4\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}\right\};$$

$$\text{(f′)}\quad \operatorname{tg}^2 d' = \frac{\operatorname{tg}^2 r - 2\operatorname{tg} r\operatorname{tg}\varrho}{(\operatorname{tg} r\operatorname{tg}\varrho M')^2},\quad \operatorname{tg} d_1' = \frac{\operatorname{tg}^2 r_1 + 2\operatorname{tg} r_1\operatorname{tg}\varrho}{(\operatorname{tg} r_1\operatorname{tg}\varrho M_1')^2};$$

$$\text{(g′)}\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 d' &= \frac{1}{M'^2}\left\{\frac{\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{H_1^2} - \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c}\right\},\\ \operatorname{tg}^2 d_1' &= \frac{1}{M_1'^2}\left\{\frac{\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{H_1^2} + \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c}\right\}; \end{aligned}\right.$$

(h′)

$$M' = 2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C + \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B+C)\left\{1 - \frac{2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C)}\right\},$$

$$M_1' = 2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C - \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(B+C-A)\left\{1 - \frac{2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}\right\};$$

$$\text{(i′)}\quad \left\{\begin{aligned} M' &= \frac{2H_1^2}{\operatorname{Sin} a\operatorname{Sin} b\operatorname{Sin} c\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)}\\ &\quad + \frac{-1+\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a+\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b+\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c}{2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c}\left\{1 + \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c}\right\},\\ M_1' &= \frac{2H_1^2}{\operatorname{Sin} a\operatorname{Sin} b\operatorname{Sin} c\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)}\\ &\quad - \frac{1+\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c}{2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c}\left\{1 - \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Die Ausdrücke für die Distanzen d_2', d_3', so wie die zugehörigen Hilfsgrössen M_2', M_3', welche sich auf die Mittelpunkte der an den Seiten b', c' liegenden äusseren Berührungskreise des Polardreieckes beziehen, könnten unmittelbar nach dem Vorhergehenden hingeschrieben werden. Da aber die genannten Hilfsgrössen in der Folge gänzlich aus unseren Rechnungen herausfallen und durch andere einfachere und direktere ersetzt werden sollen, so begnügen wir uns mit der Aufführung des aus den Gleichungen (f') folgenden Systems:

$$
(\mathrm{k}')\quad \left\{
\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2 d' &= \frac{\operatorname{tg}^2 r - 2\operatorname{tg} r \operatorname{tg}\varrho}{(\operatorname{tg} r \operatorname{tg}\varrho M')^2},\\
\operatorname{tg}^2 d_1' &= \frac{\operatorname{tg}^2 r_1 + 2\operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg}\varrho}{(\operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg}\varrho M_1')^2},\\
\operatorname{tg}^2 d_2' &= \frac{\operatorname{tg}^2 r_2 + 2\operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg}\varrho}{(\operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg}\varrho M_2')^2},\\
\operatorname{tg}^2 d_3' &= \frac{\operatorname{tg}^2 r_3 + 2\operatorname{tg} r_3 \operatorname{tg}\varrho}{(\operatorname{tg} r_3 \operatorname{tg}\varrho M_3')^2},
\end{aligned}
\right.
$$

auf welches wir später wieder zurückkommen werden.

§. 70.

Wenn wir mit δ_1, δ_2, δ_3 die Entfernungen des dem Hauptdreieck ABC eingeschriebenen Kreises von den Mittelpunkten der den drei Nebendreiecken umschriebenen Kreise bezeichnen, so können diese Entfernungen offenbar nach den Gleichungen des §. 67. bestimmt werden, wenn man die drei Nebendreiecke der Reihe nach als Hauptdreiecke und das Hauptdreieck als ihr gemeinschaftliches Nebendreieck betrachtet. d_1, d_2, d_3 werden also übergehen in δ_1, δ_2, δ_3, wenn man statt

$$
\begin{array}{lllllcllllll}
b, & c, & r, & \varrho_1, & M_1 & \text{setzt:} & b_1, & c_1, & r_1, & \varrho, & \mathrm{M}_1, \\
a, & c, & r, & \varrho_2, & M_2 & ,, & a_1, & c_1, & r_2, & \varrho, & \mathrm{M}_2, \\
a, & b, & r, & \varrho_3, & M_3 & ,, & a_1, & b_1, & r_3, & \varrho, & \mathrm{M}_3,
\end{array}
$$

wobei M_1, M_2, M_3 diejenigen Werthe bezeichnen, in welche M_1, M_2, M_3 übergehen, wenn man b_1, c_1; a_1, c_1; a_1, b_1 an die Stelle von b, c; a, c; a, b setzt, wobei, wie immer, $a_1 = 180^0 - a$, $b_1 = 180^0 - b$, $c_1 = 180^0 - c$ ist. So erhält man aus den Gleichungen (152) und (151):

$$(156)\quad \begin{cases} \mathrm{tg}^2\delta_1 = \dfrac{\mathrm{tg}^2 r_1 + 2\,\mathrm{tg}\,r_1\,\mathrm{tg}\,\varrho}{\mathrm{M}_1^{\,2}}, \\[2ex] \mathrm{tg}^2\delta_2 = \dfrac{\mathrm{tg}^2 r_2 + 2\,\mathrm{tg}\,r_2\,\mathrm{tg}\,\varrho}{\mathrm{M}_2^{\,2}}, \\[2ex] \mathrm{tg}^2\delta_3 = \dfrac{\mathrm{tg}^2 r_3 + 2\,\mathrm{tg}\,r_3\,\mathrm{tg}\,\varrho}{\mathrm{M}_3^{\,2}}; \end{cases}$$

$$\mathrm{M}_1 = 2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b_1\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c_1 - \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(b_1+c_1-a)\left\{1 - \frac{2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b_1\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c_1}{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(b_1+c_1-a)}\right\},$$

oder

(157)

$$\mathrm{M}_1 = 2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c + \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\left\{1 - \frac{2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c}{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)}\right\},$$

ebenso

$$\mathrm{M}_2 = 2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c + \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\left\{1 - \frac{2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c}{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)}\right\},$$

$$\mathrm{M}_3 = 2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b + \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\left\{1 - \frac{2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b}{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)}\right\}.$$

Denkt man sich über die Gleichungen (156) noch die erste des Systems (152), nämlich die:

$$(152)\qquad \mathrm{tg}^2 d = \frac{\mathrm{tg}^2 r - 2\,\mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,\varrho}{M^2},$$

gesetzt, und vergleicht die zweiten Theile dieser vier Gleichungen mit jenen (k′), so bemerkt man, dass sie sich der Reihe nach nur in den Nennern von einander unterscheiden. Könnte man also beweisen, dass

$$(\mathrm{l}')\quad \begin{cases} M = \mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,\varrho\,M'; \\ \mathrm{M}_1 = \mathrm{tg}\,r_1\,\mathrm{tg}\,\varrho\,M_1', \\ \mathrm{M}_2 = \mathrm{tg}\,r_2\,\mathrm{tg}\,\varrho\,M_2', \\ \mathrm{M}_3 = \mathrm{tg}\,r_3\,\mathrm{tg}\,\varrho\,M_3' \end{cases}$$

ist, so würde daraus auch die Gleichheit der ersten Theile der genannten Gleichungen, folglich auch, dass

$$(158)\qquad d' = d,\quad d_1' = \delta_1,\quad d_2' = \delta_2,\quad d_3' = \delta_3$$

ist, folgen. Mit Rücksicht darauf, dass jedes Dreieck das Polardreieck seines Polardreieckes ist, könnte man alsdann noch weiter schliessen, dass

(159) $\quad d=d', \quad d_1=\delta_1', \quad d_2=\delta_2', \quad d_3=\delta_3'$

ist, und man hätte folgenden merkwürdigen

Lehrsatz.

Die Entfernungen des Mittelpunktes des einem sphärischen Dreieck umschriebenen Kreises von den Mittelpunkten seiner vier Berührungskreise sind der Reihe nach gleich den correspondirenden Entfernungen des Mittelpunktes des dem Polardreieck eingeschriebenen Kreises von den Mittelpunkten der dem Polardreieck und seinen drei Nebendreiecken umschriebenen Kreise, und umgekehrt.

Indem wir nun zu dem Beweis der Gleichungen (I'), welcher uns erst in den Besitz des vorstehenden Lehrsatzes bringen kann, übergehen, bemerken wir, dass es nur nothwendig und schon hinreichend ist, die ersten zwei derselben zu verificiren, indem die dritte und vierte Gleichung dieselbe Relation wie die zweite Gleichung ausspricht, nur in Bezug auf je eine andere Seite des Dreieckes ABC.

§. 71.

Beweis der Gleichung $M=\operatorname{tg}r\operatorname{tg}\varrho M'$ oder, wenn man für M und M' die Werthe aus (151) und (i') setzt, dabei bedenkend, dass

$$\operatorname{tg}r.\operatorname{tg}\varrho=\frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}$$

ist, Beweis der Gleichung:

$$2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c-\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\left\{1+\frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}\right\}$$

$$=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}$$

$$+\frac{-1+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}a+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}b+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}c}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}\left\{1+\frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}\right\}.$$

Wir führen den Beweis durch Transformation beider Theile der Gleichung, das sich zu beiden Seiten als gleich ergebende jedesmal weglassend, bis wir zu einer identischen Gleichung gelangen. Um diese Transformation ausführen zu können, sind einige vorbereitende Rechnungen nothwendig. Setzt man zur

Abkürzung: $\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)=x$, so ist mit Rücksicht auf die Gleichungen (15) §. 11.:

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a)=\Delta+\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1=x+2\Delta-2\Delta_1,$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b)=\Delta+\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2=x+2\Delta-2\Delta_2,$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c)=\Delta+\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3=x+2\Delta-2\Delta_3;$$

folglich:

$$(\text{m}')\qquad \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c)$$

$$=-x(x+2\Delta)^2+4(\Delta_1\Delta_2+\Delta_1\Delta_3+\Delta_2\Delta_3)(x+2\Delta)-8\Delta_1\Delta_2\Delta_3,$$

worin man, weil

$$\Delta_1\Delta_2\Delta_3=\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c\,(\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c)^2$$

ist, statt $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ auch $\Delta\Delta'^2$ setzen kann.

Ferner ist

$$\Delta_1\Delta_2=(\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c)(\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b),$$

$$\Delta_1\Delta_3=(\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c)(\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c),$$

$$\Delta_2\Delta_3=(\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c)(\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c);$$

und wenn man diese drei Gleichungen addirt, dabei auf die in §. 32. eingeführte, schon öfter mit Vortheil verwendete Bezeichnung achtet, so erhält man:

$$\Delta_1\Delta_2+\Delta_1\Delta_3+\Delta_2\Delta_3=\Delta'\{\Delta'-\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\},$$

und hieraus folgt:

$$(\text{n}')\qquad \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\frac{\Delta'^2-\Delta_1\Delta_2-\Delta_1\Delta_3-\Delta_2\Delta_3}{\Delta'}.$$

Führen wir nun, unter Anwendung der Gleichung (m′), die Buchstaben Δ auch im zweiten Theil der zu beweisenden Gleichung ein, so gewinnt derselbe folgende Gestalt:

$$\frac{-x(x+2\Delta)^2+2\Delta'\{2\Delta'-2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\}(x+2\Delta)-8\Delta\Delta'^2}{2\Delta'x}$$

$$+\frac{-1+\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a+\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b+\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c}{2\Delta'}\left(1+\frac{2\Delta}{x}\right);$$

das erste Glied dieses zweigliedrigen Ausdruckes ist auch gleich

$$2\Delta'-\left\{\frac{x}{2\Delta'}(x+2\Delta)+2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\right\}\left(1+\frac{2\Delta}{x}\right),$$

welchen Werth man sich an dessen Stelle gesetzt zu denken hat. Soll nun die behauptete Gleichung richtig sein, so muss, weil der erste Theil offenbar gleich

$$2\Delta' - \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\left(1+\frac{2\Delta}{x}\right)$$

ist, folgende Gleichung identisch erfüllt sein:

$$-\frac{x}{2\Delta'}(x+2\Delta) - \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c) + \frac{-1+\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a+\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b+\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c}{2\Delta'} = 0,$$

oder auch, wenn man mit $2\Delta'$ multiplicirt:

$$-x(x+2\Delta) - 2\Delta'\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c) - 1 + \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a + \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b + \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c = 0.$$

Den Beweis für diese letzte Gleichung können wir auf folgende einfache Art führen:

Es ist $x = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta$, folglich:

$$x^2 = \Delta^2 + \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 - 2\Delta(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) + 2(\Delta_1\Delta_2 + \Delta_1\Delta_3 + \Delta_2\Delta_3);$$

setzt man in die letzte Gleichung statt x und x^2 diese Werthe, ebenso für $2\Delta'\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)$ seinen Werth aus (n'), so erhält man:

$$\begin{aligned}
-2(\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2+\Delta^2) + 4\Delta(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3) &- 4(\Delta_1\Delta_2+\Delta_1\Delta_3+\Delta_2\Delta_3)\\
&- 4\Delta(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3) + 4(\Delta_1\Delta_2+\Delta_1\Delta_3+\Delta_2\Delta_3)\\
&+ 4\Delta^2\\
&- 4\Delta'^2\\
- 2(1-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b&-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c) = 0
\end{aligned}$$

oder

$$\Delta^2 - \Delta_1^2 - \Delta_2^2 - \Delta_3^2 - 2\Delta'^2 = 1 - \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a - \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b - \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c,$$

und diese Gleichung ist als identisch leicht zu erkennen, denn man hat:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 &= \operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}a\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}c = (1-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a)(1-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b)(1-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c),\\
\Delta_1^2 &= \operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c = (1-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a)\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c,\\
\Delta_2^2 &= \operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c = (1-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b)\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c,\\
\Delta_3^2 &= \operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}c\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b = (1-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c)\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b
\end{aligned}$$

oder

$$\varDelta^2 = 1 - \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a - \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b - \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c$$
$$+ (\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b + \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c + \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c) - \varDelta'^2,$$
$$\varDelta_1^2 = \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c - \varDelta'^2,$$
$$\varDelta_2^2 = \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c - \varDelta'^2,$$
$$\varDelta_3^2 = \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b - \varDelta'^2;$$

werden nun die letzten drei Gleichungen addirt und die Summe von der ersten subtrahirt, so folgt unmittelbar:

$$\varDelta^2 - \varDelta_1^2 - \varDelta_2^2 - \varDelta_3^2 = 1 - \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a - \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b - \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c + 2\varDelta'^2,$$

womit also auch die am Eingane dieses Paragraphen aufgestellte Gleichung bewiesen ist.

§. 72.

Beweis der Gleichung $\mathrm{M}_1 = \mathrm{tg}\,r_1\,\mathrm{tg}\,\varrho M_1'$ oder, wenn für M_1 und M_1' die Werthe aus (157) und (i') gesetzt werden, dabei berücksichtigend, dass

$$\mathrm{tg}\,r_1\,\mathrm{tg}\,\varrho = \frac{2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)}$$

ist, Beweis der Gleichung:

$$2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}c + \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\left\{1 - \frac{2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)}\right\}$$
$$= \frac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)}$$
$$+ \frac{1 + \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a - \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b - \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c}{2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}c}\left\{1 - \frac{2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)}\right\}.$$

Vertauscht man in dem Producte

$$(\varDelta + \varDelta_2 + \varDelta_3 - \varDelta_1)(\varDelta + \varDelta_1 + \varDelta_3 - \varDelta_2)(\varDelta + \varDelta_1 + \varDelta_2 - \varDelta_3)$$

$\varDelta$ mit $-\varDelta_1$, also $-\varDelta$ mit $\varDelta_1$, so ändert sich dasselbe nicht, denn der erste Factor bleibt absolut derselbe, der zweite verwandelt sich in den dritten, der dritte Factor in den zweiten und beide ändern gleichzeitig das Zeichen. Da nun ferner

$$x = \varDelta_1 + \varDelta_2 + \varDelta_3 - \varDelta$$

bei dieser Vertauschung ebenfalls ungeändert bleibt, so kann man dieselbe auch im zweiten Theil der Gleichung (m') vornehmen,

ohne die Gleichheit mit dem ersten Theil, welcher obigem Producte gleich ist, zu stören, und man erhält sofort auch:

$$(\mathrm{o}') \qquad \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c)$$
$$=-x(x-2\Delta_1)^2+4(\Delta\Delta_2+\Delta\Delta_3-\Delta_2\Delta_3)(x-2\Delta_1)+8\Delta\Delta_2\Delta_3,$$

worin man, weil

$$\Delta\Delta_2\Delta_3=(\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c)(\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c)^2$$

ist, statt $\Delta\Delta_2\Delta_3$ auch $\Delta_1\Delta''^2$ setzen kann.

Ferner ist

$$\Delta\Delta_2=(\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c)(\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b),$$
$$\Delta\Delta_3=(\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c)(\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c),$$
$$\Delta_2\Delta_3=(\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c)(\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c);$$

werden nun die zwei ersten dieser Gleichungen addirt und hiervon die dritte subtrahirt, so sieht man leicht, dass

$$\Delta\Delta_2+\Delta\Delta_3-\Delta_2\Delta_3=-\Delta''\{\Delta''+\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\}$$

ist, woraus folgt:

$$(\mathrm{p}') \qquad \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\frac{-\Delta''^2-\Delta\Delta_2-\Delta\Delta_3+\Delta_2\Delta_3}{\Delta''}.$$

Mit Hilfe der Gleichung (o′) erhält der zweite Theil der zu beweisenden Gleichung leicht folgende Gestalt:

$$\frac{-x(x-2\Delta_1)^2-4(\Delta\Delta_2+\Delta\Delta_3-\Delta_2\Delta_3)(x-2\Delta_1)+8\Delta_1\Delta''^2}{2\Delta''x}$$
$$+\frac{1+\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c}{2\Delta''}\left(1-\frac{2\Delta_1}{x}\right);$$

das erste Glied dieses zweigliedrigen Ausdruckes ist vermöge der Gleichung (p′) auch gleich

$$\frac{-x(x-2\Delta_1)^2+4\Delta''\{\Delta''+\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\}(x-2\Delta_1)+8\Delta_1\Delta''^2}{2\Delta''x}$$
$$=\frac{-x(x-2\Delta_1)^2+4\Delta''^2x+4\Delta''(x-2\Delta_1)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{2\Delta''x}$$
$$=2\Delta''-\left(1-\frac{2\Delta_1}{x}\right)\left\{\frac{x}{2\Delta''}(x-2\Delta_1)-2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\right\},$$

und diesen Werth hat man sich an die Stelle jenes Gliedes gesetzt zu denken. Soll nun die behauptete Gleichung richtig sein,

so muss offenbar, das ohnehin Gleiche der so transformirten Gleichung auf beiden Seiten weglassend, folgende Restgleichung identisch erfüllt sein:

$$-\frac{x}{2\varDelta''}(x-2\varDelta_1)+\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)+\frac{1+\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c}{2\varDelta''}=0,$$

oder wenn man mit $2\varDelta''$ multiplicirt und das letzte Glied transportirt:

$$x(x-2\varDelta_1)-2\varDelta''\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)=1+\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c,$$

oder wenn man für $\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)$ seinen Werth aus (p') setzt:

$$x^2-2\varDelta_1 x+2(\varDelta''^2+\varDelta\varDelta_2+\varDelta\varDelta_3-\varDelta_2\varDelta_3)=1+\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c.$$

Wenn man bedenkt, dass $x=\varDelta_1+\varDelta_2+\varDelta_3-\varDelta$, also

$$x^2=\varDelta^2+\varDelta_1^2+\varDelta_2^2+\varDelta_3^2-2(\varDelta\varDelta_1-\varDelta_1\varDelta_2-\varDelta_1\varDelta_3)-2(\varDelta\varDelta_2+\varDelta\varDelta_3-\varDelta_2\varDelta_3),$$

so geht der erste Theil der zu beweisenden Restgleichung nun über in:

$$\begin{aligned}\varDelta^2+\varDelta_1^2+\varDelta_2^2+\varDelta_3^2-2(\varDelta\varDelta_1-\varDelta_1\varDelta_2-\varDelta_1\varDelta_3)&-2(\varDelta\varDelta_2+\varDelta\varDelta_3-\varDelta_2\varDelta_3)\\ -2(\varDelta_1\varDelta_2+\varDelta_1\varDelta_3-\varDelta\varDelta_1)&+2(\varDelta\varDelta_2+\varDelta\varDelta_3-\varDelta_2\varDelta_3)\\ -2\varDelta_1^2&\\ +2\varDelta''^2,&\end{aligned}$$

und wenn man hierin reducirt, so erhält man mit dem zweiten Theil in Verbindung folgende zu beweisende Gleichung:

$$\varDelta^2-\varDelta_1^2+\varDelta_2^2+\varDelta_3^2+2\varDelta''^2=1+\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c.$$

Da nun nach dem Schluss des vorigen Paragraphen:

$$\varDelta^2-\varDelta_1^2=1-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b+\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c,$$

$$\varDelta_2^2+\varDelta_3^2=\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b+\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c-2\varDelta'^2$$

ist, da ferner

$$\varDelta''^2=(\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c)^2=\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a(1-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b)(1-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c)$$

oder

$$2\varDelta''^2=2\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a-2\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b-2\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c+2\varDelta'^2$$

ist, so überzeugt man sich leicht durch directe Substitution, dass der erste Theil obiger Restgleichung mit dem zweiten identisch ist, womit also auch unsere Ausgangsgleichung bewiesen ist.

§. 73.

Da nunmehr die Giltigkeit der Gleichungen (l′) sich bewahrheitet hat, so gelten auch die Gleichungen (158), (159) oder der durch dieselben ausgesprochene am Schlusse des §. 70. aufgeführte Lehrsatz. Die Gleichungen (k′) gehen sonach über in:

$$(160)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2 d' = \dfrac{\operatorname{tg}^2 r - 2\operatorname{tg} r \operatorname{tg}\varrho}{M^2}, \\ \operatorname{tg}^2 d_1' = \dfrac{\operatorname{tg}^2 r_1 + 2\operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg}\varrho}{\mathrm{M}_1}, \\ \operatorname{tg}^2 d_2' = \dfrac{\operatorname{tg}^2 r_2 + 2\operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg}\varrho}{\mathrm{M}_2}, \\ \operatorname{tg}^2 d_3' = \dfrac{\operatorname{tg}^2 r_3 + 2\operatorname{tg} r_3 \operatorname{tg}\varrho}{\mathrm{M}_3}; \end{cases}$$

so dass also zur Berechnung der 14 Distanzen d, d'; d_1, δ_1'; d_2, δ_2'; d_3, δ_3'; δ_1, d_1'; δ_2, d_2'; δ_3, d_3', welche paarweise einander gleich sind, nur die Bestimmung der 7 Hilfsgrössen M, M_1, M_2, M_3, M_1, M_2, M_3, welche überdiess durch die aus (157) leicht nachweisbare Relation

$$(161)\qquad M = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3$$

auf 6 vermindert werden kann, nothwendig ist.

Dass übrigens $d' = d$ ist, kann auch leicht aus den synthetischen Betrachtungen des §. 47. gefolgert werden. Verbindet man die Mittelpunkte des dem Dreieck ABC eingeschriebenen und umschriebenen Kreises mit dem Kugelmittelpunkt, so ist der von diesen Radien eingeschlossene Winkel gleich d, und da diese Radien auf den Ebenen der genannten Kreise senkrecht stehen, so ist auch d das Maass des Neigungswinkels dieser beiden Ebenen. Ebenso ist d' das Maass des Neigungswinkels der Ebenen des dem Polardreieck $A'B'C'$ eingeschriebenen und umschriebenen Kreises. Da nun in dem citirten Paragraphen nachgewiesen wurde, dass die Ebene des dem Hauptdreieck eingeschriebenen Kreises mit der Ebene des dem Polardreieck umschriebenen Kreises und umgekehrt parallel ist, so sind die genannten Neigungswinkel einander gleich, mithin auch $d' = d$. Ebenso leicht lässt sich begreifen, dass $d_1' = \delta_1$ ist. Es ist nur nothwendig, sich zu vergegenwärtigen, dass das an der Seite a' des Dreieckes $A'B'C'$ liegende Nebendreieck seinen Abmessungen und seiner Lage nach

das Polardreieck des an der Seite a des Hauptdreieckes ABC liegenden Nebendreieckes ist. Die Ebenen des dem ersteren Dreieck eingeschriebenen und des dem letzteren umschriebenen Kreises sind also parallel. Die Ebenen des dem Polardreieck ABC umschriebenen und des dem Hauptdreieck ABC eingeschriebenen Kreises sind aber auch parallel, folglich ist die Neigung der zwei ersten Ebenen gleich der Neigung der zwei letzten. Diese Neigungen werden aber beziehungsweise durch die sphärischen Distanzen d_1' und δ_1 gemessen, folglich ist $d_1' = \delta_1$. Die übrigen Gleichungen in (158) und (159) sind nun von selbst klar.

§. 74.

Da das Perpendikel, welches man vom Mittelpunkt des einem sphärischen Dreieck umschriebenen Kreises auf eine Seite fällt, diese Seite halbirt, so ist offenbar der sphärische Bogen D_1, welcher die Mittelpunkte der einem sphärischen Dreieck und einem seiner Nebendreiecke umschriebenen Kreise verbindet, der Summe oder dem Unterschiede der beiden Perpendikel gleich, welche auf die gemeinschaftliche Seite gefällt werden, je nachdem die bei den Mittelpunkte auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite der den beiden Dreiecken gemeinschaftlichen Seite liegen. Ist diese Seite a, so ist das eine Perpendikel p_1; bezeichnen wir das zweite mit $\mathfrak{p}_1$, so geben die Formeln (124):

$$\operatorname{tg} p_1 = \pm \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B + C - A), \quad \operatorname{tg} \mathfrak{p}_1 = \pm \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B_1 + C_1 - A),$$

oder statt der letzten Gleichung

$$\operatorname{tg} \mathfrak{p}_1 = \mp \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B + C),$$

oder, wenn man

$$m = \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B + C - A), \quad n = \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B + C)$$

setzt:

$$\operatorname{tg} p_1 = \pm m, \quad \operatorname{tg} \mathfrak{p}_1 = \mp n,$$

wobei in jedem Falle das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem der Mittelpunkt des dem Dreieck umschriebenen Kreises bezüglich der Seite a mit diesem Dreieck auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite liegt. Um also aus diesen zwei Perpendikeln p_1, $\mathfrak{p}_1$ die Distanz D_1 der beiden Mittelpunkte bestimmen zu können, ist unumgänglich nothwendig, über die Wahl dieser Vorzeichen in jedem Falle entscheiden zu können, wozu uns die folgenden Betrachtungen befähigen werden. — Aus dem §. 51. wird einleuchtend, dass der einem Dreieck ABC umschrie-

bene Kreis seinen Mittelpunkt mit diesem Dreieck auf derselben Seite von a hat oder dass Dreieck und Mittelpunkt auf entgegengesetzter Seite von a liegen, je nachdem $A \lessgtr B + C$ ist. Der Mittelpunkt des dem an a liegenden Nebendreiecke umschriebenen Kreises wird also ebenfalls mit diesem Dreieck auf derselben Seite von a oder auf der entgegengesetzten Seite liegen, je nachdem $A \lessgtr B_1 + C_1$ oder, was dasselbe ist, je nachdem

$$A + B + C \lessgtr 2.180^0$$

ist. Man hätte also, um über die Lage der genannten Mittelpunkte, respective über die Lage der beiden Perpendikel p_1, $\mathfrak{p}_1$ zu entscheiden, folgende vier Fälle zu discutiren:

1) $A < B + C$ und $A + B + C < 2.180^0$,
2) $A < B + C$ „ $A + B + C > 2.180^0$,
3) $A > B + C$ „ $A + B + C < 2.180^0$,
4) $A > B + C$ „ $A + B + C > 2.180^0$,

von welchen sich jedoch der vierte als unmöglich erweist. Denn ist $A > B + C$, so ist $2A > A + B + C$, folglich, da A stets kleiner als 180^0 ist, um so mehr $A + B + C < 2.180^0$, so dass die Anzahl der zu betrachtenden Fälle mit dem dritten abgeschlossen ist. Gehen wir nun diese drei Fälle der Reihe nach durch.

Erster Fall. Der Mittelpunkt des dem Hauptdreieck umschriebenen Kreises liegt mit diesem auf derselben Seite von a. Der Mittelpunkt des dem an a liegenden Nebendreiecke umschriebenen Kreises liegt mit diesem auf derselben Seite von a. Die beiden Mittelpunkte liegen sonach auf entgegengesetzten Seiten von a. Also ist

$$\operatorname{tg} p_1 = + m, \quad \operatorname{tg} \mathfrak{p}_1 = - n \quad \text{und} \quad D_1 = p_1 + \mathfrak{p}_1.$$

Zweiter Fall. Der Mittelpunkt des dem Hauptdreieck umschriebenen Kreises liegt mit diesem auf derselben Seite von a. Der Mittelpunkt des dem Nebendreieck an a umschriebenen Kreises liegt in Hinsicht dieses Dreieckes auf der entgegengesetzten Seite von a. Die beiden Mittelpunkte liegen also auf derselben Seite von a, und zwar auf derjenigen Seite, auf welcher das Hauptdreieck liegt. Also ist

$$\operatorname{tg} p_1 = + m, \quad \operatorname{tg} \mathfrak{p}_1 = + n \quad \text{und} \quad D_1 = p_1 - \mathfrak{p}_1,$$

nicht $\mathfrak{p}_1 - p_1$, wie sich auf folgende Art zeigen lässt: Weil $A < B + C$, so ist $A + B + C < 2(B + C)$, also auch $180^0 < 2(B + C)$

oder $90^0 < B + C$; da aber A stets kleiner als 180^0 ist, so ist $\frac{1}{2}A < 90^0$, und also um so mehr $\frac{1}{2}A < B + C$. Zieht man diese Relation von $A = A$ ab, so folgt $\frac{1}{2}A > B + C - A$, also um so mehr $90^0 > B + C - A$, $90^0 > \frac{1}{2}(B + C - A)$. Es ist also

$$\frac{1}{2}(B + C - A) \gtrless {}^{0}_{90^0},$$

woraus ersichtlich, dass dieser Bogen im ersten Quadranten liegt. Aus der Voraussetzung $A + B + C \gtrless {}^{2.180^0}_{3.180^0}$ folgt:

$$\frac{1}{2}(A + B + C) \gtrless {}^{180^0}_{270^0},$$

woraus ersichtlich ist, dass dieser Bogen im dritten Quadranten liegt, während der Bogen

$$\frac{1}{2}(A + B + C) - 180^0 \gtrless {}^{0}_{90^0}$$

im ersten Quadranten liegt und mit dem unmittelbar vorhergehenden dieselbe Tangente hat. Die beiden Bogen

$$\frac{1}{2}(B + C - A), \quad \frac{1}{2}(A + B + C) - 180^0$$

liegen daher beide im ersten Quadranten und man darf also aus der von selbst ersichtlichen Relation

$$\frac{1}{2}(B + C - A) > \frac{1}{2}(A + B + C) - 180^0$$

auch schliessen, dass die Tangente des ersten Bogens grösser ist als die Tangente des zweiten, mithin ist auch:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B + C - A) > \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A + B + C),$$

und um so mehr, da $\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a$ stets positiv und kleiner als 1 ist,

$$\operatorname{tg} p_1 > \operatorname{tg} \mathfrak{p}_1, \quad p_1 > \mathfrak{p}_1.$$

Dritter Fall. Der Mittelpunkt des dem Hauptdreieck umschriebenen Kreises liegt in Hinsicht auf dieses Dreieck auf der entgegengesetzten Seite von a. Der Mittelpunkt des dem Nebendreieck an a umschriebenen Kreises liegt mit demselben auf einerlei Seite von a. Die beiden Mittelpunkte liegen sonach auf derselben Seite von a, und zwar auf derjenigen Seite, auf welcher das Hauptdreieck nicht liegt, also auf der entgegengesetzten Seite als im zweiten Fall. Also ist

$$\operatorname{tg} p_1 = -m, \quad \operatorname{tg} \mathfrak{p}_1 = -n \text{ und } D_1 = \mathfrak{p}_1 - p_1,$$

nicht $p_1 - \mathfrak{p}_1$, wie auf folgende Art einleuchtet: Weil $A > B + C$,

so ist $2A > A + B + C > 180^\circ$, also um so mehr $A > 90^\circ$, folglich $B < 90^\circ$, $C < 90^\circ$, und demnach auch $A - B - C < 90^\circ$, so dass

$$\tfrac{1}{2}(A - B - C) \begin{matrix} > 0 \\ < 90^\circ \end{matrix}$$

im ersten Quadranten liegt. Ferner ist der Voraussetzung nach

$$\tfrac{1}{2}(A + B + C) \begin{matrix} < 180^\circ \\ > 90^\circ \end{matrix},$$

so dass dieser Bogen im zweiten Quadranten, aber jener

$$180^\circ - \tfrac{1}{2}(A + B + C) \begin{matrix} > 0 \\ < 90^\circ \end{matrix}$$

im ersten Quadranten liegt und mit demselben einerlei Tangente hat, nur mit positivem Vorzeichen. Da nun augenscheinlich

$$180^\circ - \tfrac{1}{2}(A + B + C) > \tfrac{1}{2}(A - B - C),$$

so besteht dieselbe Relation zwischen den Tangenten dieser Bogen, d. h. es ist $-n > -m$, folglich um so mehr

$$\operatorname{tg} \mathfrak{p}_1 > \operatorname{tg} p_1, \quad \mathfrak{p}_1 > p_1.$$

Bedient man sich zur Berechnung von $\operatorname{tg} D_1$ aus $\operatorname{tg} p_1$, $\operatorname{tg} \mathfrak{p}_1$ der bekannten Formel:

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

so findet man in allen drei Fällen gleich:

$$\operatorname{tg} D_1 = \frac{m - n}{1 + mn},$$

so dass man nur nöthig hat, die Rechnung für einen dieser Fälle, z. B. für den ersten durchzuführen, um eine für alle Fälle giltige Formel zu erhalten. Dieses soll nun geschehen.

Weil bekanntlich

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{Sin}(x - y)}{\operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} y},$$

so wird

$$m - n = \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}a \frac{-\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(A + B + C) \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(B + C - A)},$$

oder auch, wenn man bedenkt, dass

$$-\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(A + B + C) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(B + C - A) = \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2}a \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} C$$

ist:

$$m-n=\frac{\operatorname{Sin}A}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C}.$$

Ferner ist

$$1+mn$$

$$=1-\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A)}{\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C}\cdot\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B+C)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(B+C-A)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A)}$$

oder

$$1+mn=\frac{\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C-\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B+C)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(B+C-A)}{\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C},$$

und mit Rücksicht auf die folgende allgemeine goniometrische Formel:

$$\operatorname{Sin}y\operatorname{Sin}z=\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(x+y+z)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(y+z-x)+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(x+z-y)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(x+y-z):$$

$$1+mn=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+C-B)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B-C)}{\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C};$$

setzt man nun die für $m-n$ und $1+mn$ gefundenen Werthe in den obigen Ausdruck für $\operatorname{tg}D_1$, so erhält man mit Leichtigkeit:

$$(162)\quad\left\{\begin{aligned}
\operatorname{tg}D_1&=\frac{\operatorname{Sin}A}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a}\cdot\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+C-B)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B-C)},\\
&\text{und ebenso}\\
\operatorname{tg}D_2&=\frac{\operatorname{Sin}B}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b}\cdot\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(B+C-A)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B-C)},\\
\operatorname{tg}D_3&=\frac{\operatorname{Sin}C}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}\cdot\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(B+C-A)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+C-B)},
\end{aligned}\right.$$

wobei D_2 und D_3 die analogen Distanzen des Mittelpunktes des dem Hauptdreieck umschriebenen Kreises von den Mittelpunkten derjenigen Kreise bezeichnen, welche den an *b* und *c* liegenden Nebendreiecken umschrieben sind.

§. 75.

Bezeichnen wir die Entfernungen des Mittelpunktes des einem sphärischen Dreieck eingeschriebenen Kreises von den Mittelpunkten der seinen drei Nebendreiecken eingeschriebenen Kreise mit D_1, D_2, D_3, so dass diese Distanzen mit der Reihenfolge der Seiten *a*, *b*, *c* einerlei Ordnung befolgen, so haben wir in §. 9. gefunden:

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg} D_1 &= \frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A}\cdot\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b-c)},\\ \operatorname{tg} D_2 &= \frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B}\cdot\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b-c)},\\ \operatorname{tg} D_3 &= \frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}\cdot\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+c-b)}. \end{aligned}\right.$$

Bezeichnen wir die ähnlichen Distanzen für das Polardreieck, mit Beibehaltung derselben Ordnung, mit D_1', D_2', D_3', so erhält man dieselben aus den vorstehenden Gleichungen offenbar, wenn man alle im zweiten Theil vorkommenden Buchstaben mit Strichen versieht. Geht man alsdann mit Hilfe der bekannten, in §. 16. aufgeführten Relationen von den Seiten und Winkeln des Polardreieckes auf die Seiten und Winkel des Hauptdreieckes zurück, so ergibt sich:

$$(163)\quad\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg} D_1' &= \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a}\cdot\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+C-B)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B-C)},\\ \operatorname{tg} D_2' &= \frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b}\cdot\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(B+C-A)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B-C)},\\ \operatorname{tg} D_3' &= \frac{\operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}\cdot\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(B+C-A)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+C-B)}. \end{aligned}\right.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit jenen (162), so sieht man, dass

$$(164)\qquad D_1' = \mathrm{D}_1,\quad D_2' = \mathrm{D}_2,\quad D_3' = \mathrm{D}_3$$

ist, und da von den zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ immer eines als das Polardreieck des andern zu betrachten ist, so ist auch:

$$(165)\qquad D_1 = \mathrm{D}_1',\quad D_2 = \mathrm{D}_2',\quad D_3 = \mathrm{D}_3';$$

es gilt daher folgender

Lehrsatz.

Die Entfernungen des Mittelpunktes des einem sphärischen Dreieck umschriebenen Kreises von den Mittelpunkten der seinen drei Nebendreiecken umschriebenen Kreise sind der Reihe nach gleich den Entfernungen des Mittelpunktes des dem Polardreieck eingeschriebenen Kreises von den Mittelpunkten der seinen drei Nebendreiecken eingeschriebenen Kreise, und umgekehrt.

III.

Neuer Beweis des von Herrn Grunert in der Abhandlung:

Das sphärische Dreieck, mit seinem Sehnendreieck verglichen, mit besonderer Rücksicht auf Geodäsie. Neuer merkwürdiger Lehrsatz. Archiv. Thl. XXV. S. 197.

gegebenen Theorems.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lehrer der Mathematik in der k. k. österreichischen Kriegs-Marine, eingeschifft auf Sr. Maj. Propeller-Fregatte Donau.

In der vorhergehenden Abhandlung haben wir in §. 44. zur Berechnung der Winkel A, B, C des einem sphärischen Dreieck *ABC* entsprechenden Sehnendreieckes aus den Elementen des sphärischen Dreieckes unter andern folgende allgemein giltige Formeln aufgestellt:

$$\mathrm{Cos\,A} = \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon),$$

$$\mathrm{Cos\,B} = \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon),$$

$$\mathrm{Cos\,C} = \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Cos}\,(C-\tfrac{1}{2}\varepsilon).$$

Aus diesen Formeln lässt sich nun mit Leichtigkeit Herrn Grunert's Theorem, welches sich auf ein Dreieck mit sehr kleinen Seiten bezieht und von demselben a. a. O. auf andere Art entwickelt worden ist, ableiten, was im Nachfolgenden gezeigt werden soll.

Aus der ersten der obigen Gleichungen folgt:

$$\mathrm{Sin}^2\mathrm{A} = 1 - \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}^2(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)$$

oder

$$\text{Sin}^2 A = \text{Sin}^2(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon) + \text{Sin}^2\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos}^2(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon),$$

ebenso ist

$$\text{Sin}^2 B = \text{Sin}^2(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon) + \text{Sin}^2\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos}^2(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon),$$

mithin

$$\left(\frac{\text{Sin}\,A}{\text{Sin}\,B}\right)^2 = \frac{\text{Sin}^2(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}{\text{Sin}^2(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)} \cdot \frac{1+\text{Sin}^2\tfrac{1}{2}a\,\text{ctg}^2(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}{1+\text{Sin}^2\tfrac{1}{2}b\,\text{ctg}^2(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)},$$

oder mit Vernachlässigung von Grössen, welche in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreieckes von der vierten Ordnung sind:

$$\frac{\text{Sin}\,A}{\text{Sin}\,B} = \frac{\text{Sin}(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}{\text{Sin}(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)} \cdot \frac{1+\tfrac{1}{8}a^2\text{ctg}^2(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}{1+\tfrac{1}{8}b^2\text{ctg}^2(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}$$

$$= \frac{\text{Sin}(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}{\text{Sin}(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)} \{1+\tfrac{1}{8}a^2\text{ctg}^2(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\}\{1-\tfrac{1}{8}b^2\text{ctg}^2(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\}$$

$$= \frac{\text{Sin}(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}{\text{Sin}(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)} \{1+\tfrac{1}{8}a^2\text{ctg}^2(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon) - \tfrac{1}{8}b^2\text{ctg}^2(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\}.$$

Weil $A-\tfrac{1}{2}\varepsilon = (A-\tfrac{1}{4}\varepsilon)-\tfrac{1}{4}\varepsilon$, $B-\tfrac{1}{2}\varepsilon = (B-\tfrac{1}{4}\varepsilon)-\tfrac{1}{4}\varepsilon$ und ε in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreieckes von der zweiten Ordnung ist, so ist bis auf Grössen der vierten Ordnung:

$$\text{Sin}(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon) = \text{Sin}(A-\tfrac{1}{4}\varepsilon) - \tfrac{1}{4}\varepsilon\,\text{Cos}(A-\tfrac{1}{4}\varepsilon),$$

$$\text{Sin}(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon) = \text{Sin}(B-\tfrac{1}{4}\varepsilon) - \tfrac{1}{4}\varepsilon\,\text{Cos}(B-\tfrac{1}{4}\varepsilon);$$

mithin mit demselben Grade der Genauigkeit:

$$\frac{\text{Sin}(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}{\text{Sin}(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)} = \frac{\text{Sin}(A-\tfrac{1}{4}\varepsilon)}{\text{Sin}(B-\tfrac{1}{4}\varepsilon)} \cdot \frac{1-\tfrac{1}{4}\varepsilon\,\text{ctg}(A-\tfrac{1}{4}\varepsilon)}{1-\tfrac{1}{4}\varepsilon\,\text{ctg}(B-\tfrac{1}{4}\varepsilon)}$$

$$= \frac{\text{Sin}(A-\tfrac{1}{4}\varepsilon)}{\text{Sin}(B-\tfrac{1}{4}\varepsilon)} \{1-\tfrac{1}{4}\varepsilon\,\text{ctg}(A-\tfrac{1}{4}\varepsilon)+\tfrac{1}{4}\varepsilon\,\text{ctg}(B-\tfrac{1}{4}\varepsilon)\}.$$

Es ist daher auch:

$$\frac{\text{Sin}\,A}{\text{Sin}\,B} = \frac{\text{Sin}(A-\tfrac{1}{4}\varepsilon)}{\text{Sin}(B-\tfrac{1}{4}\varepsilon)} \{1-\tfrac{1}{4}\varepsilon\,\text{ctg}(A-\tfrac{1}{4}\varepsilon)+\tfrac{1}{4}\varepsilon\,\text{ctg}(B-\tfrac{1}{4}\varepsilon)\}$$

$$\times\{1+\tfrac{1}{8}a^2\text{ctg}^2(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)-\tfrac{1}{8}b^2\text{ctg}^2(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\},$$

oder bis auf Grössen der vierten Ordnung:

$$\frac{\text{Sin}\,A}{\text{Sin}\,B} = \frac{\text{Sin}(A-\tfrac{1}{4}\varepsilon)}{\text{Sin}(B-\tfrac{1}{4}\varepsilon)} \{1-\tfrac{1}{4}\varepsilon\,[\text{ctg}(A-\tfrac{1}{4}\varepsilon)-\text{ctg}(B-\tfrac{1}{4}\varepsilon)]$$

$$+\tfrac{1}{8}a^2\text{ctg}^2(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)-\tfrac{1}{8}b^2\text{ctg}^2(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\}.$$

Wenn man nun bedenkt, dass mit Vernachlässigung von Grössen, welche bezüglich der Seiten des sphärischen Dreieckes von der vierten Ordnung sind:

$$a^2 = 2\varepsilon\frac{\operatorname{Sin}(A-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C},\quad b^2 = 2\varepsilon\frac{\operatorname{Sin}(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}C}$$

ist, wenn man ferner zur Abkürzung

$$M = \operatorname{ctg}(A-\tfrac{1}{4}\varepsilon) - \operatorname{ctg}(B-\tfrac{1}{4}\varepsilon),$$

$$N = \frac{\operatorname{Sin}(A-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C}\operatorname{ctg}^2(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon) - \frac{\operatorname{Sin}(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}C}\operatorname{ctg}^2(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)$$

setzt, so wird

$$\frac{\operatorname{Sin}A}{\operatorname{Sin}B} = \frac{\operatorname{Sin}(A-\frac{1}{4}\varepsilon)}{\operatorname{Sin}(B-\frac{1}{4}\varepsilon)}\{1-\tfrac{1}{4}\varepsilon(M-N)\},$$

und die Gleichung

$$\frac{\operatorname{Sin}A}{\operatorname{Sin}B} = \frac{\operatorname{Sin}(A-\frac{1}{4}\varepsilon)}{\operatorname{Sin}(B-\frac{1}{4}\varepsilon)}$$

wird bis auf Grössen der vierten Ordnung richtig sein, wenn $M-N$ bis auf Grössen der zweiten Ordnung gleich Null ist. Bis auf Grössen der zweiten Ordnung ist offenbar:

$$M = \operatorname{ctg}A - \operatorname{ctg}B = -\frac{\operatorname{Sin}(A-B)}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B},$$

$$N = \frac{\operatorname{Sin}A}{\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C}\operatorname{ctg}^2A - \frac{\operatorname{Sin}B}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}C}\operatorname{ctg}^2B$$

$$= \frac{\operatorname{Cos}^2A - \operatorname{Cos}^2B}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C} = -\frac{\operatorname{Sin}(A-B)\operatorname{Sin}(A+B)}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C},$$

oder weil genau $A+B=180^0-(C-\varepsilon)$, $\operatorname{Sin}(A+B)=\operatorname{Sin}(C-\varepsilon)$, bis auf Grössen der zweiten Ordnung $\operatorname{Sin}(A+B)=\operatorname{Sin}C$, mithin auch

$$N = -\frac{\operatorname{Sin}(A-B)}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B} = M,\quad M-N=0,$$

wodurch die obige Gleichung verificirt wird. In Bezug auf alles daraus Folgende verweisen wir den Leser auf Herrn Grunert's Abhandlung.

IV.

Zur Auflösung der Gleichung $x^2+y^2=z^2$ in ganzen Zahlen.

Von
Herrn *J. B. Sturm*
in Regensburg.

Nachstehendes hat den Zweck, auf den Zusammenhang hinzuweisen, in welchem die der in Rede stehenden Gleichung genügenden Zahlen zu den Dreieckszahlen stehen, was meines Wissens noch nicht geschehen ist. Ich gehe hierbei von folgender Lösung aus.

Es sei $2m+1$ irgend eine ungerade Zahl, so kann sie in die Differenz zweier Quadrate verwandelt werden, denn es ist:

$$2m+1=(m+1)^2-m^2.$$

Es wird nun $2m+1$ ebenfalls eine Quadratzahl sein, wenn $2m+1=(2n+1)^2$ gesetzt wird, woraus $m=2n(n+1)$ folgt, und sofort:

$$(2n+1)^2=(2n(n+1)+1)^2-(2n(n+1))^2$$

oder:

$$\text{I.}\qquad (2n+1)^2+(4\frac{n(n+1)}{1.2})^2=(4\frac{n(n+1)}{1.2}+1)^2.$$

Lassen wir 3 als die erste ungerade Zahl gelten, so können wir die Gleichung I. so aussprechen:

Die Summe der Quadrate von der *n*ten ungeraden

Zahl und der vierfachen ebensovielten Dreieckszahl ist gleich dem Quadrate eben dieser um 1 vermehrten vierfachen Dreieckszahl.

Ist $2m+1$ ein Produkt aus zwei anderen ungeraden Zahlen, also $2m+1=(2p+1)(2q+1)$, wo $q<p$ sein soll, so ist nach einem bekannten Satze:

$$(2p+1)(2q+1)=\left(\frac{2p+1+2q+1}{2}\right)^2-\left(\frac{2p+1-2q-1}{2}\right)^2$$

oder

$$(2p+1)(2q+1)=(p+q+1)^2-(p-q)^2$$

und

$$(2p+1)(2q+1)+(p-q)^2=(p+q+1)^2.$$

Das Produkt $(2p+1)(2q+1)$ wird eine Quadratzahl, wenn in ihm $2m^2+2m$ statt q und $2n^2+2n$ statt p gesetzt wird; man erhält sodann:

$$\text{II.}\qquad (2m+1)^2(2n+1)^2+\left[4\frac{n(n+1)}{1.2}-4\frac{m(m+1)}{1.2}\right]^2$$
$$=\left[4\frac{n(n+1)}{1.2}+4\frac{m(m+1)}{1.2}+1\right]^2.$$

Es hat nicht die mindeste Schwierigkeit, auf analoge Weise $(2n+1)^2(2p+1)^2(2q+1)^2$ in die Differenz zweier Quadrate zu verwandeln; es soll jedoch davon Umgang genommen werden, da das Vorstehende genügt, um den Eingangs erwähnten Zusammenhang sehen zu lassen.

V.

Zur Theorie der periodischen Dezimalbrüche.

Von

Herrn *J. B. Sturm*

in Regensburg.

Selbst die besten Lehrbücher haben eine Darstellung der Verwandlung periodischer Dezimalbrüche in gemeine, die ein höchst überflüssiges und den Anfänger nur belästigendes Element, nämlich die unendliche Reihe, einführt. Es lässt sich aber dieser Uebelstand leicht vermeiden, wenn man gleich von vorn herein bei der Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche den Rest mit in Betracht zieht.

Es sei $\frac{a}{b}$ irgend ein ächter Bruch; wird er in einen Dezimalbruch verwandelt und werden dabei n Dezimalen berücksichtigt, so ist:

$$\frac{a}{b} = 0, \alpha\beta\gamma \ldots\ldots \mu\nu + \frac{r}{10^n b},$$

wo r selbstverständlich den Rest bezeichnet. Ist nun der Dezimalbruch ein periodischer, so ist $r = a$, und sofort:

$$\frac{a}{b} = 0, \alpha\beta\gamma \ldots\ldots \mu\nu + \frac{a}{10^n b}$$

oder

$$\frac{a}{b}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 0, \alpha\beta\gamma \ldots\ldots \mu\nu$$

und

$$\frac{a}{b} = 0, \alpha\beta\gamma \ldots\ldots \mu\nu \times \left(\frac{10^n}{10^n - 1}\right) = \frac{\alpha\beta\gamma \ldots\ldots \mu\nu}{10^n - 1}.$$

Selbst für solche Schüler, die den Gebrauch allgemeiner Zahlzeichen noch nicht kennen, hat das so eben dargelegte Verfahren nicht die mindeste Schwierigkeit; ich verfahre beim Unterrichte solcher Schüler gewöhnlich so:

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = 1 \text{ Dezimale} + \frac{\text{Rest}}{10} : \text{Nenner};$$

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = 2 \text{ Dezimalen} + \frac{\text{Rest}}{100} : \text{Nenner};$$

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = 3 \text{ Dezimalen} + \frac{\text{Rest}}{1000} : \text{Nenner};$$

u. s. f.

Ist nun der Dezimalbruch ein periodischer, und hat die Periode z. B. 3 Ziffern, so ist:

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{\text{Periode}}{1000} + \frac{\text{Zähler}}{1000} : \text{Nenner}$$

oder

$$\text{Bruch} = \frac{\text{Periode}}{1000} + \frac{1}{1000} \text{ Bruch},$$

woraus auf der Stelle:

$$\text{Bruch} = \frac{\text{Periode}}{999}$$

folgt.

VI.

Ueber die Bestimmung jener drei Gleichungen, welche dienen, aus gemachten Ablesungen am Limbus eines Winkelinstrumentes die Excentricität desselben zu berechnen.

Von

Herrn *Theodor Andres*,

k. k. Hauptmann im 16ten Linien-Infanterie-Regimente zu Prag.

Um über die Grösse der Excentricität eines Winkelinstrumentes, welches deshalb mindestens mit zwei diamentral gegenüber liegenden Nonien versehen sein muss, Aufschluss zu erhalten,

stellt man bekanntlich den einen Nonius beispielsweise nach und nach auf 0°, 30°, 60°,.... bis auf $(n-1)\frac{360^o}{n}$, wo in diesem Falle $n=12$ ist, und liest die gegenüber liegenden oder auch alle vier Nonien ab.

Hiedurch erhält man n Gleichungen, welche jedoch nur drei Unbekannte enthalten. Diese werden aus jenen n Gleichungen, wie dies Brünnow in seinem Werke über sphärische Astronomie angab, gleichsam durch einen Kunstgriff bestimmt. Es ist jedoch nicht schwer, zu erkennen, dass diese drei Unbekannten eigentlich gefunden werden sollen, indem man jene n Gleichungen der Methode der kleinsten Quadratsumme unterzieht. Indem ich letzteres that, erhielt ich dieselben Formeln wie der genannte Autor, und indem dies vielleicht manchen Leser dieses sehr verbreiteten Journales interessiren dürfte, so erlaube ich mir zuerst in Kürze die Entwickelung jener n Gleichungen zu geben, um dann zu zeigen, wie Brünnow und wie ich zu jenen Endgleichungen kamen, aus welchen die erwähnten drei Unbekannten gefunden werden.

Es sei in Taf. I. Fig. 4. O der Mittelpunkt des Limbus-Kreises, O' jener des Nonius-Kreises, und es sei der Winkel $PO'A'$ gemessen; so ist die Lesung bei A' nicht die für den Winkel $A'O'P$, sondern entspricht dem Winkel $A'OP$. Wäre keine Excentricität vorhanden, d. h. wäre $OO'=e=0$, so hätte man Winkel $AOP=A'O'P$. Nennen wir nun den Halbmesser des Limbus $OP=r$, und die bei P, A' und A gemachten Ablesungen: p, a' und a, so haben wir:

$$A'R=r\sin(a'-p)=A'O'.\sin(a-p)$$

und

$$O'R=r\cos(a'-p)-e=A'O'.\cos(a-p).$$

Die erste Gleichung multiplicirt mit $\cos(a'-p)$,
„ zweite „ „ „ $\sin(a'-p)$

und dann die untere von der oberen abgezogen; ferner:

die erste Gleichung multiplicirt mit $\sin(a'-p)$,
„ zweite „ „ „ $\cos(a'-p)$

und beide Gleichungen addirt, geben:

$$A'O'.\sin(a-a')=e\sin(a'-p), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$A'O'.\cos(a-a')=r-e\cos(a'-p). \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Gleichung (1), getheilt durch (2), gibt:

$$\operatorname{tang}(a-a')=\frac{\frac{e}{r}\sin(a'-p)}{1-\frac{e}{r}\cos(a'-p)},$$

woraus:

$$(a-a')=\frac{e}{r}\sin(a'-p)+\tfrac{1}{2}\frac{e^2}{r^2}.\sin 2(a'-p)+\tfrac{1}{3}\frac{e^3}{r^3}.\sin 3(a'-p)+\ldots\ ^{*})$$

Vernachlässigen wir aber schon die zweite Potenz der immer sehr kleinen Grösse $\frac{e}{r}$, so genügt:

$$(a-a')''=\frac{e}{r}.\sin(a'-p).206264{\cdot}8,$$

oder, $\frac{e}{r}.206264{\cdot}8=\varepsilon$ gesetzt:

$$a=a'+\varepsilon\sin(a'-p).\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (3)$$

Ebenso hat man für den gegenüber liegenden Nonius

$$b=b'+\varepsilon\sin(b'-p);\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (4)$$

somit (4) — (3):

$$b-a=b'-a'+2\varepsilon.\cos(\tfrac{1}{2}(a'+b')-p)\sin\tfrac{1}{2}(b'-a').\quad(5)$$

Liegen die Indexstriche der Nonien I. und II. nicht genau 180° von einander entfernt, sondern $180^0+\alpha$, so dass

$$b-a=180^0+\alpha$$

ist, so geht, wenn man bedenkt, dass $(b'-a')$ immer sehr nahe $=180^0$, und somit $\sin\frac{1}{2}(b'-a')=1$ und $b'=a'+180^0$ gesetzt werden kann, Gleichung (5) über in:

$$b'-a'-180^0=\alpha-2\varepsilon.\cos(\alpha'+90^0-p)$$

oder,

$$\left.\begin{aligned} b'-a'-180^0 &= \text{gesetzt } \mu,\\ 2\varepsilon\cos p &= \quad ,, \quad z \text{ und}\\ 2\varepsilon\sin p &= \quad ,, \quad y: \end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ (6)$$

$$\mu=\alpha+z\sin a'-y\cos a'.$$

Stellt man, wie bereits erwähnt, den Nonius I. nach und nach auf 0, 30, 60, ... $(n-1).\frac{360}{n}$ Grad, so erhält man folgende n (hier 12) Gleichungen:

---

*) Siehe Encke's Reihen-Entwickelungen: Astronomische Nachrichten S. 562. oder Brünnow's Astronomie S. 20.

$$\left.\begin{aligned}
\mu_0 &= \alpha + z\sin 0^\circ - y\cos 0^\circ,\\
\mu_{30} &= \alpha + z\sin 30^\circ - y\cos 30^\circ,\\
\mu_{60} &= \alpha + z\sin 60^\circ - y\cos 60^\circ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mu_{(n-1)\frac{360}{n}} &= \alpha + z\sin (n-1)\frac{360^\circ}{n} - y\cos (n-1)\frac{360^\circ}{n}.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Aus diesen Gleichungen (7) werden nun in dem oben citirten astronomischen Werke die drei Unbekannten α, z und y auf folgende Art bestimmt.

Addirt man die Gleichungen (7):

1. wie sie sind,
2. indem man die erste mit $\cos 0^\circ$, die zweite mit $\cos 30^\circ$ u. s. w.

und

3. „ „ „ „ „ $\sin 0^\circ$, „ „ „ $\sin 30^\circ$ „ „ „

früher multiplizirt, so bekommt man mit Berücksichtigung der bekannten periodischen Funktionen, dass nemlich

$$\sum_{x=0^\circ}^{x=(n-1)\frac{360^\circ}{n}} (\sin x) = 0; \qquad \sum_{x=0^\circ}^{x=(n-1)\frac{360^\circ}{n}} (\cos x) = 0;$$

$$\sum_{x=0^\circ}^{x=(n-1)\frac{360^\circ}{n}} (\sin x \cos x) = 0;$$

$$\sum_{x=0^\circ}^{x=(n-1)\frac{360^\circ}{n}} (\sin^2 x) = \sum_{x=0^\circ}^{x=(n-1)\frac{360^\circ}{n}} (\cos^2 x) = \frac{n}{2}$$

ist, wenn n eine in 360° ohne Rest theilbare Zahl bedeutet, folgende Bestimmungs-Gleichungen:

(8)

$$n\alpha = \mu_0 + \mu_{30} + \mu_{60} + \ldots \mu_{330} \text{ oder allgemein } = \sum_{x=0^\circ}^{x=(n-1)\frac{360^\circ}{n}} (\mu_x),$$

$$-\tfrac{1}{2}ny = \mu_0 \cos 0^\circ + \mu_{30}\cos 30^\circ \ldots \mu_{330}\cos 330^\circ \text{ oder allgemein}$$

$$= \sum_{x=0^\circ}^{x=(n-1)\frac{360^\circ}{n}} (\mu_x \cos x),$$

$$\tfrac{1}{2}nz = \mu_0 \sin 0^\circ + \mu_{30}\sin 30^\circ \ldots \mu_{330}\sin 330^\circ \text{ oder allgemein}$$

$$= \sum_{x=0^\circ}^{x=(n-1)\frac{360^\circ}{n}} (\mu_x \sin x).$$

Ich ging aber bei Entwickelung dieser drei Bestimmungsgleichungen (8) folgendermassen vor.

Die Ausdrücke μ_0, μ_{30} u. s. w. sind mit Fehlern behaftet, welche vom Ablesen und der nicht absolut richtigen Theilung herrühren. Bezeichne ich dieselben wie gewöhnlich mit v_0, v_{30} u. s. w., so hat man:

$$\begin{aligned}
\mu_0 + v_0 &= \alpha + z\sin 0^0 - y\cos 0^0,\\
\mu_{30} + v_{30} &= \alpha + z\sin 30^0 - y\cos 30^0,\\
&\vdots\\
\mu_\varrho + v_\varrho &= \alpha + z\sin\varrho^0 - y\cos\varrho^0,
\end{aligned}$$

wenn ich $(n-1).\frac{360^0}{n}$ mit ϱ^0 bezeichne. Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
v_0^2 = {} & \alpha^2 + z^2\sin^2 0^0 + y^2\cos^2 0^0 + \mu_0^2 + 2\alpha z\sin 0^0 - 2\alpha y\cos 0^0 - 2\alpha\mu_0\\
& - 2yz\sin 0^0\cos 0^0 - 2\mu_0 z\sin 0^0\\
& + 2\mu_0 y\cos 0^0,\\
v_{30}^2 = {} & \alpha^2 + z^2\sin^2 30^0 + y^2\cos^2 30^0 + \mu_{30}^2 + 2\alpha z\sin 30^0 - 2\alpha y\cos 30^0 - 2\alpha\mu_{30}\\
& - 2yz\sin 30^0\cos 30^0 - 2\mu_{30} z\sin 30^0\\
& + 2\mu_{30} y\cos 30^0,\\
&\vdots\\
v_\varrho^2 = {} & \alpha^2 + z^2\sin^2\varrho^0 + y^2\cos^2\varrho^0 + \mu_\varrho^2 + 2\alpha z\sin\varrho^0 - 2\alpha y\cos\varrho^0 - 2\alpha\mu_\varrho\\
& - 2yz\sin\varrho^0\cos\varrho^0 - 2\mu_\varrho z\sin\varrho^0\\
& + 2\mu_\varrho y\cos\varrho^0.
\end{aligned}$$

Es ist somit die Summe der Quadrate von v, die ich, wie üblich, durch $[v^2]$ anzeige:

$$\left.\begin{aligned}
[v^2] = n\alpha^2 + \frac{n}{2}z^2 + \frac{n}{2}y^2 + [\mu^2] - 2\alpha[\mu]\\
- 2z(\mu_0\sin 0^0 + \mu_{30}\sin 30^0 + \mu_{60}\sin 60^0 \ldots\ldots + \mu_\varrho\sin\varrho^0)\\
+ 2y(\mu_0\cos 0^0 + \mu_{30}\cos 30^0 + \mu_{60}\cos 60^0 \ldots\ldots + \mu_\varrho\cos\varrho^0)
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Um nun die wahrscheinlichsten Werthe für α, y und z zu erlangen, hat man bekanntlich (9) nach α, z und y zu differentiiren und die parziellen Differential-Quotienten gleich 0 zu setzen.

Dies gibt endlich mit Berücksichtigung der oben angeführten periodischen Funktionen, indem ich die Coefficienten von $2z$ und $2y$ mit A und B bezeichne:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial.[v^2]}{\partial\alpha}\right) &= n\alpha-[\mu]=0,\\ \left(\frac{\partial.[v^2]}{\partial z}\right) &= nz-2A=0,\\ \left(\frac{\partial.[v^2]}{\partial y}\right) &= ny+2B=0;\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(10)$$

welche Gleichungen mit jenen (8) vollkommen übereinkommen.

Diese Uebereinstimmung rührt aber daher, dass Dr. **Brünnow** in seinem angeführten Werke durch Anwendung der bei (7) angegebenen Operationsweise im Grunde nichts anderes gethan, als sich dadurch auf schnellstem Wege die sogenannten Normalgleichungen gebildet hat (siehe Gleich. (10)), ohne auf die Sätze der Methode der kleinsten Quadrate zurückzugehen, wodurch zwar Nichts an Richtigkeit, wohl aber immerhin Etwas an gründlich wissenschaftlicher Strenge der Ableitung verloren ging.

Es erhellet dies ferner deutlich aus folgender allgemeiner Betrachtungsweise:

Besteht zwischen der beobachteten Grösse F und den Unbekannten x, y und z die Relation

$$ax+by+cz=F,$$

worin a, b und c bestimmte Werthe haben, und man hat mehr als drei Beobachtungen gemacht, so hat man, wie dies bekannt ist, nach der Methode der kleinsten Quadrate und bei der Annahme, die Beobachtungen seien von gleicher Genauigkeit, folgende Bestimmungs-Gleichungen (siehe z. B. Dr. J. **Dienger's** „**Ausgleichung der Beobachtungsfehler**“ S. 18.):

$$\left.\begin{aligned}[a^2]x+[ab]y+[ac]z &= [aF],\\ [ab]x+[b^2]y+[bc]z &= [bF],\\ [ac]x+[bc]y+[c^2]z &= [cF].\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(11)$$

In unserem vorliegenden Falle, nach den Gleichungen (7), bedeutet

$$F{:}\mu;\quad x{:}\alpha;\quad y{:}y;\quad z{:}z;\quad a{:}1;\quad b{:}-\cos a' \text{ und } c{:}\sin a';$$

und man hat:

$$[a^2]=n,\quad [ab]=0,\quad [aF]=[\mu];$$

$$[b^2]=\frac{n}{2},\quad [ac]=0,\quad [bF]=-1.(\mu_0\cos 0^0+\mu_{30}\cos 30^0\ldots.)=-B,$$

$$[c^2]=\frac{n}{2},\quad [bc]=0,\quad [cF]=(\mu_0\sin 0^0+\mu_{30}\sin 30^0+\ldots.)=+A;$$

somit (11) übergehen in:

$$n\alpha = [\mu],$$

$$\frac{n}{2}y = -B = -\sum_{x=0^\circ}^{x=\frac{n-1}{n}.360^\circ} (\mu_x \cos x),$$

$$\frac{n}{2}z = +A = \sum_{x=0^\circ}^{x=(n-1)\frac{360^\circ}{n}} (\mu_x \sin x),$$

so wie oben.

Diese Ausdrücke $[a^2]$, $[ab]$, $[ac]$ .... u. s. w., welche hier direkte, sind bei (7) durch die dortselbst angeführten drei Operationsarten, in Folge der Eigenthümlichkeit der dadurch entstehenden trigonometrischen Reihen, indirekt entwickelt, und ohne dass man sich bewusst ist, hiedurch der kleinsten Fehler-Quadratsumme Genüge geleistet zu haben.

Schliesslich erlaube ich mir noch zu zeigen, wie ich für diesen vorliegenden Fall die Formeln entwickelte, aus welchen man unmittelbar die verschiedenen wahrscheinlichen Fehler berechnen kann.

Bezeichne ich den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung vom Gewichte $=1$ mit f, so ist bekanntlich

$$f = 0{\cdot}67448 \sqrt{\frac{[v^2]}{n-w}}, \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

worin w die Anzahl der bestimmten Unbekannten, hier also drei, und n jene der gemachten Beobachtungen bedeutet.

Sonach erhalte ich für den wahrscheinlichen Fehler, welcher beim Ablesen eines Nonius begangen wird, und welcher theils von der Unrichtigkeit im Ablesen und theils von der nicht ganz richtigen Theilung herrührt:

$$f' = \frac{f}{\sqrt{m}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

wenn m die Anzahl der abgelesenen Nonien ist.

Ich brauche wohl kaum speziell zu erwähnen, dass (13) den wahrscheinlichen Fehler nur im Allgemeinen angibt, weil man, um die Theilungsfehler an den verschiedenen Stellen des Kreises zu erforschen, jene von Bessel zuerst angegebene Methode einzuschlagen hätte.

Um nun die Formel zur Bestimmung des wahrscheinlichen

Fehlers der ermittelten Excentricität, d. i. der Grösse ε, zu finden, bilde ich zuerst nach den bekannten Sätzen folgende Gleichungen:

$$1 = nQ_1, \qquad 0 = \frac{n}{2} q_1, \qquad 0 = nq_1,$$

$$0 = \ldots \frac{n}{2} q_2, \qquad 1 = \ldots \frac{n}{2} Q_2, \qquad 0 = \ldots \frac{n}{2} q_2,$$

$$0 = \ldots\ldots \frac{n}{2} q_3; \qquad 0 = \ldots\ldots \frac{n}{2} q_3; \qquad 1 = \ldots\ldots \frac{n}{2} Q_3;$$

woraus:

$$Q_1 = \frac{1}{n}; \quad Q_2 = \frac{2}{n}; \quad Q_3 = \frac{2}{n}.$$

Es sind sonach die wahrscheinlichen Fehler von α, z, y, die ich mit f_α, f_z und f_y bezeichne:

$$f_\alpha = f\sqrt{\frac{1}{n}}; \quad f_z = f_y = f\sqrt{\frac{2}{n}} \quad \ldots \quad (14)$$

Von der Gleichung (6) hatten wir:

$$2\varepsilon \cos p = z \quad \text{und} \quad 2\varepsilon \sin p = y.$$

Beide Gleichungen quadrirt und addirt geben:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\sqrt{y^2 + z^2}. \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Um also den wahrscheinlichen Fehler von ε, der mit R_ε bezeichnet sein soll, zu erhalten, bilde ich zuerst:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right) = \frac{y}{2\sqrt{y^2+z^2}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right) = \frac{z}{2\sqrt{y^2+z^2}},$$

daher:

$$R_\varepsilon = \sqrt{f_y^2 \cdot \left(\frac{y}{2\sqrt{y^2+z^2}}\right)^2 + f_z^2 \cdot \left(\frac{z}{2\sqrt{y^2+z^2}}\right)},$$

welches, entwickelt und gehörig reduzirt, gibt:

$$R_\varepsilon = f\sqrt{\frac{1}{2n}} \text{ in Bogensekunden} \quad \ldots \quad (16)$$

oder

$$R_\varepsilon = 0{\cdot}67448\sqrt{\frac{[v^2]}{2n(n-3)}}. \quad \ldots \quad (16')$$

Will man die Excentricität in Längenmaass ausgedrückt haben, so hat man nach (3):

$$e = \frac{r}{206264 \cdot 8} \varepsilon, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

worin r den Halbmesser des Kreises bezeichnet. Sonach:

$$R_e = \frac{rf}{206264 \cdot 8} \sqrt{2n}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Für den Fall, dass ein Beispiel hierzu wünschenswerth wäre, gebe ich folgende Beobachtungen an einem Theodoliten, wobei Nonius I. nach und nach auf 0°, 30°, 60°,.... u. s. w. gestellt wurde.

Lesung am Nonius I $= a'$	II $= b'$	$b' - a' - 180^\circ = \mu$	$\mu_x \sin x$	$\mu_x \cos x$	μ^2
Grad 0	180° 0′ 6″	+6	+0·00	+6·00	36
30	210 0 10	+10	+5·00	+8·70	100
60	240 0 22	+22	+19·05	+11·00	484
90	270 0 8	+8	+8·00	±0·00	64
120	299 59 54	−6	−5·22	+3·00	36
150	329 59 58	−2	−1·00	+1·74	4
180	359 59 52	−8	±0·00	+8·00	64
210	29 59 48	−12	+10·44	+6·00	144
240	59 59 50	−10	+5·00	+8·70	100
270	89 59 56	−4	+4·00	±0·00	16
300	120 0 12	+12	−10·44	+6·00	144
330	150 0 16	+16	−8·00	+13·92	256
	Σ	+32	+26·83	+73.06	+1448

Somit (8):

$$12\alpha = 32, \quad \text{woraus} \quad \alpha = +2 \cdot 66,$$
$$-6y = 73 \cdot 06, \quad „ \quad y = -12 \cdot 1766,$$
$$6z = 26 \cdot 83, \quad „ \quad z = +4 \cdot 4716.$$

Für ε nach (15):

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} \sqrt{(12 \cdot 17)^2 + (4 \cdot 47)^2} = 6 \cdot 48 \text{ Bogensekunden.}$$

Zur Berechnung des p ist am Vortheilhaftesten aus

$$\begin{matrix} 2\varepsilon \sin p = y \\ 2\varepsilon \cos p = z \end{matrix}, \quad \text{d. i.} \quad \operatorname{tang} p = \frac{y}{z} = \frac{-12 \cdot 17}{+4 \cdot 47},$$

$$p = 360^\circ - (69^\circ\, 50'\, 3'' \cdot 8).$$

Endlich zur Bestimmung der wahrscheinlichen Fehler bilde man sich nach (9) die $[v^2]$.

Es ist $n\alpha^2 = 84\cdot84$

$$\frac{n}{2}z^2 = 119\cdot88 \qquad 2\alpha[\mu] = 170\cdot24$$

$$\frac{n}{2}y^2 = 888\cdot60 \qquad 2z[\mu_x \sin x] = 239\cdot86$$

$$[\mu^2] = 1448\cdot00 \qquad 2y[\mu_x \cos x] = -1779\cdot00$$

$$2541\cdot32 \qquad 2189\cdot10$$

daher $[v^2] = 352\cdot22$, und als wahrscheinlicher Fehler einer Beobachtung vom Gewichte $=1$:

$$f = 0\cdot67448\sqrt{\frac{352\cdot22}{9}} = 4''\cdot22,$$

und als wahrscheinlicher Fehler für den Werth der Excentricität nach (16):

$$R_e = 4\cdot22\sqrt{\frac{1}{24}} = 0\cdot861.$$

VII.

Ueber das Rationalmachen des Nenners in Brüchen von der Form

$$\frac{Z}{a_1 + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \ldots + \sqrt{a_n}}.$$

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lehrer der Mathematik in der k. k. österreichischen Kriegsmarine, eingeschifft auf Sr. Maj. Propeller-Fregatte „Donau."

Brüche von der obigen Form, in welchen a_1 das rationale Glied oder die Summe aller solchen vorstellt, werden bekanntlich dadurch mit rationalem Nenner dargestellt, dass man Zähler und

Nenner mit einem Polynome multiplicirt, welches aus dem Nenner durch Veränderung des Zeichens einer gewissen Anzahl von Gliedern gebildet wird. Im Nenner erscheint dann das Product aus Summe und Unterschied gleicher Grössen, welcher Umstand die Anzahl der Irrationalgrössen zu vermindern strebt. Es entsteht nun erstlich die Frage, in wie viel Gliedern muss eine Zeichenänderung vorgenommen werden, damit die Anzahl der neuen Irrationalgrössen in Hinsicht auf jede andere Eintheilungsart am Kleinsten sei, und zweitens damit die Anzahl der neuen Irrationalgrössen kleiner als die Anzahl der alten sei.

Verändert man in x Gliedern das Zeichen und multiplicirt mit diesem Polynom Zähler und Nenner, so enthält der neue Nenner Irrationalgrössen

$$\frac{(n-x)(n-x-1)}{1.2}+\frac{x(x-1)}{1.2}$$

an der Zahl. Zur Beantwortung der ersten Frage muss x einen solchen Werth erhalten, dass

$$(n-x)(n-x-1)+x(x-1)=n^2-(2x+1)n+2x^2$$

am Kleinsten wird. Setzt man $x=\frac{1}{2}n+\varepsilon$, so verwandelt er sich in

$$n(\tfrac{1}{2}n-1)+2\varepsilon^2.$$

Dieser Ausdruck wächst aber sowohl für positive als negative Werthe von ε, d. h. der erste Ausdruck wächst, man mag x grösser oder kleiner als $\frac{1}{2}n$ wählen, und erhält somit seinen kleinsten Werth, wenn $x=\frac{1}{2}n$ ist. Hieraus erhellt, dass man in Hinsicht auf alle möglichen Eintheilungsarten im neuen Nenner die geringste Anzahl Irrationalgrössen $\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)$ erhalten wird, wenn man in der halben Gliederanzahl die Zeichen ändert und hiermit Zähler und Nenner multiplicirt. Diese Eintheilung ist nur möglich, wenn $n=2r$ eine gerade Zahl ist. Ist die Gliederzahl ungerade $n=2r+1$, so wird man dieser Vorschrift so nahe kommen als möglich, und also in r oder $r+1$ Gliedern das Zeichen ändern. Der neue Nenner wird für $n=2r$, $r(r-1)$; für $n=2r+1$, $\frac{r(r-1)}{1.2}+\frac{(r+1)r}{1.2}=r^2$ Irrationalgrössen enthalten. Soll man sich also dem Ziele des Rationalmachens genähert haben, so muss im ersten Falle $r(r-1)<2r$, im zweiten Falle $r^2<2r+1$ sein. Beide Relationen geben mit Leichtigkeit $r\overline{\overline{<}}2$, also im ersten Falle $n\overline{\overline{<}}4$, im zweiten Falle $n\overline{\overline{<}}5$, und man sieht also, dass die Mög-

lichkeit, einen Bruch von obiger Beschaffenheit mit rationalem Nenner darzustellen, nicht mehr vorhanden ist, sobald sein Nenner mehr als fünf Glieder hat.

Natürlich wird vorausgesetzt, dass der Nenner $a_1+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\ldots+\sqrt{a_n}$ vollständig reducirt sei; $4\sqrt{2}-\sqrt{18}$ z. B. müsste darin auf $\sqrt{2}$ zusammengezogen werden.

VIII.

Ueber eine Eigenschaft der geometrischen Progression 1, 3, 9, 27,....

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lehrer der Mathematik in der k. k. österreichischen Kriegs-Marine, eingeschifft auf Sr. Maj. Propeller-Fregatte „Donau."

Ist 1, 2, 3, ... $(r-1)$, r ein Anfangsstück der natürlichen Zahlenreihe und $X_1>2r$, so ist auch

$$\begin{array}{l} X_1-r, \\ X_1-(r-1), \\ X_1-(r-2), \\ \ldots\ldots \\ X_1-2, \\ X_1-1, \\ X_1, \\ X_1+1, \\ X_1+2, \\ \ldots\ldots \\ X_1+(r-2), \\ X_1+(r-1), \\ X_1+r \end{array}$$

ein stetiges Stück derselben, dessen sämmtliche Glieder grösser als r sind. Dieses letztere Stück, welches nur aus den Elementen 1, 2, 3, ... r und X_1 gebildet ist, wird sich an den Anfang unmittelbar anschliessen, wenn $X_1 = 2r + 1$ ist; ein Ergebniss, welches, in folgenden Worten zusammengefasst, den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bilden soll:

Die Zahlen 1, 2, 3, ... $r-1$, r geben in Verbindung mit der Zahl $2r+1$ durch algebraische Addition alle Glieder der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis incl. $X_1 + r = 3r + 1 = r_1$.

Da wir nun die Zahlen von 1 bis r_1 besitzen, so können wir kraft dieses Satzes durch Hinzufügung einer Grösse $X_2 = 2r_1 + 1 = 3(2r+1)$ neue Bildungen veranlassen, welche continuirlich bis $X_2 + r_1 = 9r + 4 = r_2$ reichen werden, und wir können daher sagen: Die Zahlen 1, 2, 3, ... $(r-1)$, r geben in Verbindung mit den zwei Zahlen X_1, X_2 durch algebraische Addition alle Glieder der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis einschliesslich $9r+4 = r_2$. Nehmen wir noch eine Zahl $X_3 = 2r_2 + 1 = 3^2(2r+1)$ hinzu, so ergeben sich aus diesen Elementen alle Zahlen von 1 bis $X_3 + r_2 = 27r + 13$, u. s. w. Auf diese Weise ergibt sich bei Hinzufügung von $s-1$ Grössen X das Bildungsgesetz von X_{s-1}, r_{s-1}, welches durch die Formeln:

$$X_{s-1} = 3^{s-2}(2r+1), \quad r_{s-1} = \tfrac{1}{2}\{3^{s-1}(2r+1) - 1\}$$

ausgesprochen ist, und wir können obigen Satz zu folgendem allgemeineren erweitern:

Die Zahlen 1, 2, 3, ... $(r-1)r$ geben in Verbindung mit jenen X_1, X_2, ... X_{s-1} durch algebraische Addition alle Glieder der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis einschliesslich r_{s-1}.

Ist $r = 1$, besteht also die Anfangsreihe nur aus diesem einzigen Gliede, so lautet der Satz so:

Die s Glieder der geometrischen Progression 1, 3, 9, 27, ... 3^{s-1} geben durch algebraische Addition alle Glieder der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis incl. $\frac{1}{2}(3^s - 1)$ *).

---

*) Auf dieser Eigenschaft beruht auch die Auflösung der folgenden, namentlich in älteren Beispiel-Sammlungen öfter aufgeführten Aufgabe: Ein Kaufmann, welcher ein Geschäft eröffnet, will sich aus Ersparniss nur fünf Gewichte anschaffen, mit denen er im Stande ist, auf einer gleicharmigen Waage alle Gewichte von einem Pfund bis zu einem Zent-

Auf specielle Fälle angewendet geben also die Zahlen

1, 3	alle Zahlen von 1 bis	4,
1, 3, 9	„ „ „ 1 „	13,
1, 3, 9, 27	„ „ „ 1 „	40,
1, 3, 9, 27, 81	„ „ „ 1 „	121,
1, 3, 9, 27, 81, 243 . .	„ „ „ 1 „	364,
1, 3, 9, 27, 81, 243, 729	„ „ „ 1 „	1093.

Zur Erläuterung des dabei zu beobachtenden, am Eingange unseres Aufsatzes angezeigten Bildungsgesetzes folgt hier die Darstellung der Zahlen von 1 bis 13 durch die Zahlen 1, 3, 9:

$$
\begin{aligned}
1&=1,\\
2&=3-1,\\
3&=3,\\
4&=3+1,\\
5&=9-3-1,\\
6&=9-3,\\
7&=9-3+1,\\
8&=9-1,\\
9&=9,\\
10&=9+1,\\
11&=9+3-1,\\
12&=9+3,\\
13&=9+3+1.
\end{aligned}
$$

Wir nehmen uns nun noch vor, zu zeigen, dass die Formel $\frac{1}{2}(3^s-1)$ auch das Maximum der Anzahl von Zahlen anzeigt, welche durch s Zahlen überhaupt gebildet werden können.

Hierzu ist zunächst die Beantwortung folgender Frage nothwendig: Sind $a, b, c, \ldots . k$ n Grössen, welche sowohl positiv als negativ genommen werden können, wie gross ist dann die Anzahl der verschiedenen algebraischen Summen $a+b+c+\ldots .+k$, welche durch beliebige Wahl der Vorzeichen dieser n Grössen gebildet werden können?

In der algebraischen Summe können vorkommen:

---

ner zu wiegen; welche Gewichte sind zu wählen? — eine Aufgabe, welche gewöhnlich durch die Zahlen 1, 3, 9, 27, 60, deren Summe gerade 100 ausmacht, erlediget wird.

n Zeichen	+	und	0 Zeichen	—	oder
$n-1$ „	+	„	1 „	—	oder
$n-2$ „	+	„	2 „	—	
. . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
$n-r$ „	+	„	r „	—	
. . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
0 „	+	„	n „	—	

Damit sind alle $n+1$ Fälle über das quantitative Vorkommen der Zeichen + und — erschöpft. Betrachten wir den allgemeinen Fall mit $n-r$ Zeichen + und r Zeichen — in Bezug auf die in demselben sich darbietenden Vertauschungen, so finden wir unter n Elementen $n-r$ gleiche der einen Art und r gleiche der andern Art, welche also

$$\frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{r}$$

Versetzungen gestatten; mithin hat man im ersten Falle $\binom{n}{0}$, im zweiten Falle $\binom{n}{1}$, im dritten Falle $\binom{n}{2}$, im letzten Falle $\binom{n}{n}$ und im Ganzen

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n$$

verschiedene Bildungen zu unterscheiden. n Grössen geben also bei beliebiger Wahl der Vorzeichen im Allgemeinen 2^n verschiedene Summen.

Indem wir nun zu dem beabsichtigten Maximumbeweis übergehen, bemerken wir zunächst, dass, wenn von den s gegebenen Zahlen entweder 1, 2, 3, ... $(s-1)$ oder s algebraisch summirt werden, man im ersten Falle $\binom{s}{1}$, im zweiten Falle $\binom{s}{2}$, im dritten Falle $\binom{s}{3}$, im letzten Falle $\binom{s}{s}$ verschiedene Combinationen erhält. Allgemein bei der Verbindung von r Grössen erhält man alle Verbindungen von s Elementen zur $r$ten Classe ohne Wiederholungen, nämlich $\binom{s}{r}$ an der Zahl, und da in keiner dieser Complexionen dieselben Elemente vorkommen, so gibt jede für sich durch freie Wahl der Vorzeichen im Allgemeinen

2^r, also alle Complexionen dieser Classe $\binom{s}{r}2^r$ verschiedene Summen. Diese Anzahl theilt sich in zwei Hälften, welche nicht der Grösse, sondern nur dem Zeichen nach von einander verschieden sind. Da uns aber in dem vorliegenden Falle nur die Summen mit positiven Vorzeichen interessiren, so geben s Zahlen, abgesehen von ihrem Werthe im Allgemeinen, $\binom{s}{r}2^{r-1}$ verschiedene Summenbildungen mit r Gliedern. Also

$\binom{s}{1}2^0$ verschiedene Summenbildungen mit 1 Glied,

$\binom{s}{2}2^1$ „ „ „ 2 Gliedern,

$\binom{s}{3}2^2$ „ „ „ 3 Gliedern,

. . . .

$\binom{s}{s}2^{s-1}$ „ „ „ s Gliedern,

und im Ganzen

$$\binom{s}{1}+\binom{s}{2}2+\binom{s}{3}2^2+\ldots+\binom{s}{s}2^{s-1}=S$$

verschiedenartig gebildete Summen. Da aber

$$\begin{aligned}(1+2)^s &= 1+\binom{s}{1}2+\binom{s}{2}2^2+\ldots+\binom{s}{s}2^{s-1} \\ &= 1+2\left\{\binom{s}{1}+\binom{s}{2}2+\ldots+\binom{s}{s}2^{s-1}\right\} \\ &= 1+2S\end{aligned}$$

ist, so ist $S=\frac{1}{2}(3^s-1)$ die grösstmögliche Anzahl von Zahlen, welche aus s Zahlen gebildet werden können, womit die oben aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

IX.

Ueber einige Sätze der höheren Geometrie.

Von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. in Würtemberg.

I.

Gleichung der Fläche, welche die Normal-Ebenen eines Kegels umhüllen.

$$1)\qquad x^2+y^2+z^2=1,$$

$$2)\qquad \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=0,$$

$$3)\qquad \frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=0.$$

Diese Gleichungen beziehen sich auf drei orthogonale und konzentrische Flächen, wovon die erste eine Kugel ist; 2) und 3) sind Kegel zweiten Grades, welche durch (μ) und (ν) bezeichnet werden sollen. Diese Kegel sind konfokal, denn die Gleichung ihrer Fokallinien:

$$x=\pm\frac{b}{\sqrt{c^2-b^2}}z$$

ist unabhängig von μ und ν. c und b sind constant. Durch Veränderung von μ und ν innerhalb der Grenzen $c>\mu>b$ und $c>b>\nu$ erhält man in Verbindung mit 1) zwei Systeme von sphärischen Kegelschnitten, welche sich gleichfalls rechtwinklig schneiden und konfokal sind. Durch Elimination erhält man aus 1), 2) und 3):

$$4) \qquad bcx = \mu\nu,$$

$$5) \qquad b\sqrt{c^2-b^2}.y = \sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2},$$

$$6) \qquad c\sqrt{c^2-b^2}.z = \sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2};$$

$$7) \qquad \frac{xx'}{\mu^2} + \frac{yy'}{\mu^2-b^2} - \frac{zz'}{c^2-\mu^2} = 0,$$

$$8) \qquad \frac{xx'}{\nu^2} - \frac{yy'}{b^2-\nu^2} - \frac{zz'}{c^2-\nu^2} = 0.$$

Die Gleichungen 7) und 8) sind die Gleichungen der Berührungs- und der Normal-Ebene von (μ). Man setze nun in 8) die Werthe von xyz aus 4), 5) und 6) und lasse der Einfachheit wegen das Zeichen $'$ weg, so ergibt sich:

$$9) \qquad \frac{\mu x}{bc\nu} - \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\,y}{b\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}} - \frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\,z}{c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} = 0.$$

Durch Differenziation dieser Gleichung nach ν ergibt sich:

$$10) \qquad \frac{\mu x}{bc\nu^2} + \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\,y\nu}{b\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}^3} + \frac{\sqrt{c^2-\nu^2}\,z.\nu}{c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}^3} = 0.$$

Durch Elimination von ν aus 9) und 10) erhält man:

$$\nu = \frac{c\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}, \quad \sqrt{c^2-\nu^2} = \frac{c}{\sqrt{1+\delta^2}}, \quad \sqrt{b^2-\nu^2} = \frac{\sqrt{b^2+(b^2-c^2)\delta^2}}{\sqrt{1+\delta^2}};$$

wo der Kürze halber

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{\mu b x}{\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\,z}}$$

gesetzt wurde. Die Substitution dieser Werthe in 9) gibt:

$$11) \qquad \frac{\mu x^{\frac{2}{3}}}{bc^2\left(\frac{\mu b}{\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\,y}{b^2\sqrt{c^2-b^2}\left(z^{\frac{2}{3}} - \frac{\mu^{\frac{2}{3}}(b^2-c^2)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}(c^2-\mu^2)^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\,z^{\frac{2}{3}}}{c^2\sqrt{c^2-b^2}} = 0.$$

Hieraus findet man sogleich für die Umhüllungsfläche der Normal-Ebenen von (μ), die wir mit (β) bezeichnen wollen:

$$12)\qquad \beta^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}+\beta_{,}^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-\beta_{,,}^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}=0,$$

$$\beta=\frac{\mu}{c^2b^2},\quad \beta_{,}=\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}}{b^2(c^2-b^2)},\quad \beta_{,,}=\frac{\sqrt{c^2-\mu^2}}{c^2(c^2-b^2)};$$

und analog für die Umhüllungsfläche (γ) der Normal-Ebenen von (ν):

$$13)\qquad \gamma^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}-\gamma_{,}^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-\gamma_{,,}^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}=0,$$

$$\gamma=\frac{\nu}{c^2-b^2},\quad \gamma_{,}=\frac{\sqrt{b^2-\nu^2}}{b^2\sqrt{c^2-b^2}},\quad \gamma_{,,}=\frac{\sqrt{c^2-\nu^2}}{c^2(c^2-b^2)};$$

$$14)\qquad \beta^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}x_{,}+\beta_{,}^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}y_{,}-\beta_{,,}^{\frac{2}{3}}z^{-\frac{1}{3}}z_{,}=0,$$

$$15)\quad \left(\frac{z^{\frac{2}{3}}}{\beta_{,,}^{\frac{2}{3}}}+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{\beta_{,}^{\frac{2}{3}}}\right)\frac{x_{,}}{x^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}}-\left(\frac{z^{\frac{2}{3}}}{\beta''^{\frac{2}{3}}}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\beta^{\frac{2}{3}}}\right)\frac{y_{,}}{y^{\frac{1}{3}}\beta_{,}^{\frac{2}{3}}}-\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\beta^{\frac{2}{3}}}-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{\beta_{,}^{\frac{2}{3}}}\right)\frac{z_{,}}{z^{\frac{1}{3}}\beta_{,,}^{\frac{2}{3}}}=0,$$

$$16)\qquad y=\pm\frac{\beta_{,}}{\beta}x.$$

Die Gleichungen 14) und 15) sind die Gleichungen der Tangential- und der Normal-Ebene von (β); 16) ist die Gleichung derjenigen Normal-Ebenen von (β), welche durch die z-Axe gehen.

II.

Beweis eines Theorems von Meunier.

$$\varrho'=\varrho\cos\beta.$$

ϱ ist der Krümmungshalbmesser eines Normalschnitts einer Fläche; ϱ' der Krümmungshalbmesser eines schiefen Schnitts, dessen Ebene diejenige von ϱ in einer Flächentangente schneidet; β ist der Winkel beider Ebenen.

Die allgemeine Gleichung mit zwei Variabeln ist:

$$A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2=0.$$

Stellt diese Gleichung eine Linie vor, welche die x-Axe im Ursprung berührt, so ist $A=B=0$. Man differenziire zweimal und setze $x=y=\frac{dy}{dx}=0$, so ist

$$0=C\frac{d^2y}{dx^2}+2D,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2D}{C}=\frac{1}{\varrho},$$

wo ϱ der Krümmungshalbmesser im Ursprunge ist.

Die allgemeine Gleichung mit drei Variabeln ist:

$$A+Bx+Cy+Dz+Exy+Fxz+Gyz+Hx^2+Jy^2+Kz^2=0.$$

Stellt diese Gleichung eine Fläche vor, welche die xy-Ebene im Ursprunge berührt, so ist $A=B=C=0$. Wir setzen in

$$Dz+Exy+Fxz+Gyz+Hx^2+Jy^2+Kz^2=0$$

$x=0$, und erhalten wie oben

$$\varrho=-\frac{D}{2J},$$

wenn ϱ der Krümmungshalbmesser des der Ebene zy entsprechenden Schnittes ist. Man lege durch die y-Axe eine Ebene, welche mit der zy-Ebene den Winkel β bildet und die Fläche in einer Linie L schneidet, deren Coordinaten z' und y sind. $z=z'\cos\beta$, $x=z'\sin\beta$. Diese Werthe in die Gleichung der Fläche gesetzt geben:

$$\varrho'=-\frac{D}{2J}\cos\beta=\varrho\cos\beta.$$

ϱ' ist der Krümmungshalbmesser von L für den Ursprung.

III.

Beweis eines Theorems von Chasles.

Gegeben ist ein Ellipsoid, dessen Gleichung

$$\frac{x_i^2}{\varrho_i^2}+\frac{y_i^2}{\varrho_i^2-b^2}+\frac{z_i^2}{\varrho_i^2-c^2}=1.$$

O ist der Ursprung des Coordinatensystems. Durch einen Punkt M im Raume lege man die drei homofokalen Flächen

$$\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-c^2}=1,\qquad \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=1;$$

$$\varrho>c>b;\qquad c>\mu>b;\qquad c>b>\nu;$$

xyz sind die Coordinaten von M; von diesem Punkt aus schneide man auf den Normalen dieser drei Flächen Stücke ab, beziehungsweise gleich ihren grossen Halbaxen ϱ, μ, ν, und betrachte diese drei Stücke als Halbaxen eines Ellipsoids E, dessen Mittelpunkt

also M ist, so hat dieses Ellipsoid folgende Eigenschaften: Es berührt die zy-Ebene in O; die Halbaxen seines mit der zy-Ebene parallelen Diametralschnitts sind gleich b und c; b parallel der y-Axe, c parallel der z-Axe.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachte man das Ellipsoid, von welchem b, c und OM drei conjugirte Semidiameter sind, und suche dessen noch unbekannte Halbaxen ϱ_0, μ_0, ν_0, so ergeben sich durch Anwendung nachstehender Sätze von dem Ellipsoid:

> „die Quadratsumme von drei conjugirten Semidiametern ist gleich der Quadratsumme der Halbaxen. Die Quadratsumme der drei Parallelogramme, welche sich aus je zwei von drei conjugirten Semidiametern konstruiren lassen, ist gleich der Quadratsumme von drei Rechtecken, welche sich aus je zwei von den drei Halbaxen bilden lassen. Das Parallelepiped aus drei conjugirten Semidiametern ist gleich demjenigen über den drei Halbaxen"

folgende drei Gleichungen:

$$\varrho_0^2 + \mu_0^2 + \nu_0^2 = b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$
$$\varrho_0^2\mu_0^2 + \varrho_0^2\nu_0^2 + \mu_0^2\nu_0^2 = b^2c^2 + b^2(x^2 + z^2) + c^2(x^2 + y^2),$$
$$\varrho_0^2\mu_0^2\nu_0^2 = b^2c^2x^2;$$

welche beweisen, dass ϱ_0^2, μ_0^2, ν_0^2 die drei Wurzeln sind von

$$\varrho^6 - (b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2)\varrho^4 + \{b^2c^2 + b^2(x^2 + z^2) + c^2(x^2 + y^2)\}\varrho^2 - b^2c^2x^2 = 0,$$

wo ϱ die Variabele ist. Diese Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1;$$

mithin ist

$$\varrho_0 = \varrho, \quad \mu_0 = \mu, \quad \nu_0 = \nu,$$

d. h. das Ellipsoid, dessen konjugirte Semidiameter b, c und OM sind, ist identisch mit dem Ellipsoid E.

X.

Note über Differenz- und Differential-Quotienten von allgemeiner Ordnungszahl.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie zu Wien.

Ich bin wiederholt bei meinen Studien zu Ausdrücken von folgender Form gelangt:

$$f(x) = \left\{ \frac{\partial^x \varphi(r)}{\partial r^x} \right\}_\lambda,$$

wo $\varphi(r)$ eine bestimmte Function von r bedeutet, die $x$mal zu differenziren ist, und in welcher man nach vollbrachter Differentiation statt r eine Constante λ zu substituiren hat. Das Resultat dieser Operation sei $f(x)$.

Ich will nun versuchen, Ausdrücke von der Form $f(x)$ der Operation des endlichen Differenzirens zu unterwerfen. Denkt man sich, so wie es Liouville macht, $\varphi(r)$ in folgender Form:

$$\varphi(r) = S[A_m e^{mr}],$$

so hat man:

$$f(x) = \left\{ \frac{\partial^x}{\partial r^x} S[A_m e^{mr}] \right\}_\lambda,$$

$$f(x+1) = \left\{ \frac{\partial^x}{\partial r^x} S[A_m m e^{mr}] \right\}_\lambda,$$

somit:

$$\Delta f(x) = \left\{ \frac{\partial^x}{\partial r^x} S[A_m (m-1) e^{mr}] \right\}_\lambda,$$

und ganz eben so:

$$\varDelta^2 f(x) = \Big\{ \frac{\partial^x}{\partial r^x} S[A_m(m-1)^2 e^{mr}] \Big\}_\lambda,$$

$$\varDelta^3 f(x) = \Big\{ \frac{\partial^x}{\partial r^x} S[A_m(m-1)^3 e^{mr}] \Big\}_\lambda,$$

. . . .

$$\varDelta^\mu f(x) = \Big\{ \frac{\partial^x}{\partial r^x} S[A_m(m-1)^\mu e^{mr}] \Big\}_\lambda.$$

Nun hat man:

$$e^{-r}\varphi(r) = S[A_m e^{r(m-1)}],$$

und wird diese Gleichung μmal differenzirt:

$$\frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu}[e^{-r}\varphi(r)] = e^{-r} S[A_m(m-1)^\mu e^{mr}];$$

daher ist:

$$\varDelta^\mu f(x) = \Big\{ \frac{\partial^x}{\partial r^x} . e^r \frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu}[e^{-r}\varphi(r)] \Big\}_\lambda,$$

und wenn man die $x$malige Differentiation durchführt:

$$\varDelta^\mu f(x) = \{ e^r \frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu}[e^{-r}\frac{\partial^x \varphi(r)}{\partial r^x}] \}\lambda.$$

Kennt man also in der Gleichung

$$f(x) = \Big\{ \frac{\partial^x \varphi(r)}{\partial r^x} \Big\}_\lambda$$

$\varphi(r)$ und $f(x)$, so lässt sich äusserst einfach die μte Differenz von $f(x)$ bestimmen; es ist nämlich

$$\varDelta^\mu f(x) = e^\lambda \Big\{ \frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu}[e^{-r}\frac{\partial^x \varphi(r)}{\partial r^x}] \Big\}_\lambda,$$

unter μ eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl verstanden.

Ganz eben so leicht geht die Bestimmung des μten Differentialquotienten, nur ist der Ausdruck, zu dem man hierbei kömmt, weder einfach noch durchsichtig. Man hat nämlich, da

$$f(x) = \Big\{ \frac{\partial^x}{\partial r^x} S[A_m e^{mr}] \Big\}_\lambda$$

vorausgesetzt wird:

$$f(x+h) = \left\{ \frac{\partial^x}{\partial r^x} S[A_m m^h e^{mr}] \right\}_\lambda,$$

und somit

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \left\{ \frac{\partial^x}{\partial r^x} S[A_m \frac{m^h-1}{h} e^{mr}] \right\}_\lambda,$$

was sich für ohne Ende der Null nähernde Werthe von h auf

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial^x}{\partial r^x} S[A_m \log m e^{mr}] \right\}_\lambda$$

zurückzieht. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens kömmt man zu der Formel

$$\frac{\partial^\mu f(x)}{\partial x^\mu} = \left\{ \frac{\partial^x}{\partial r^x} S[A_m (\log m)^\mu e^{mr}] \right\}_\lambda.$$

XI.

Note zur Integration einer linearen Differentialgleichung der Form

(1) $$y^{(n)} = Ax^m y'' + Bx^{m-1} y' + Cx^{m-2} y.$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie zu Wien.

Im 29sten Bande dieses Archivs Seite 403. habe ich Differential-Gleichungen der Form (1) mittelst bestimmter Integrale zu integriren versucht. Es ist natürlich, dass ich die bereits gefundenen Methoden zu erweitern strebe und Differentialgleichungen, welche sich nach dieser Methode nicht oder nicht leicht integriren lassen, auf andere Weise zu integriren suche.

Ich habe kürzlich jene lineare Differentialgleichung gesucht, welcher genügt wird durch

$$(2) \qquad y = \frac{\partial^\mu e^{mx^3}}{\partial x^\mu},$$

unter m und μ constante Zahlen verstanden, und habe eine Gleichung erhalten, welche die Form (1) hat. Man kann diess leicht darthun. Denn es ist:

$$\frac{\partial^{-\mu} y}{\partial x^{-\mu}} = e^{mx^3}.$$

Differenzirt man diese Gleichung, so erhält man:

$$\frac{\partial^{1-\mu} y}{\partial x^{1-\mu}} = 3mx^2 e^{mx^3};$$

somit hat man aus beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial^{1-\mu} y}{\partial x^{1-\mu}} = 3mx^2 \frac{\partial^{-\mu} y}{\partial x^{-\mu}}.$$

Wird diese Gleichung nun $(\mu+2)$mal differenzirt, so erhält man:

$$(3) \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 3mx^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 6mx(\mu+2)\frac{\partial y}{\partial x} + 3m(\mu+2)(\mu+1)y,$$

und diese Gleichung ist in der That ein specieller Fall der Gleichung (1). Ich will nun, um das vollständige Integral der Gleichung (3) zu erhalten, diese Gleichung (3) integriren. Aus ihr folgt:

$$\frac{\partial^{\mu+2}}{\partial x^{\mu+2}} \left[\frac{\partial^{1-\mu} y}{\partial x^{1-\mu}} - 3mx^2 \frac{\partial^{-\mu} y}{\partial x^{-\mu}} \right] = 0,$$

und wird diese Gleichung $(\mu+2)$mal integrirt, so erhält man:

$$(4) \qquad \frac{\partial^{1-\mu} y}{\partial x^{1-\mu}} - 3mx^2 \frac{\partial^{-\mu} y}{\partial x^{-\mu}} = \psi(x),$$

woselbst $\psi(x)$ die Form hat:

$$\psi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_r x^r,$$

und die von **Liouville** sogenannte „fonction complémentaire" ist. Aus (4) folgt durch Multiplication mit e^{-mx^3}:

$$e^{-mx^3} \left(\frac{\partial^{1-\mu} y}{\partial x^{1-\mu}} - 3mx^2 \frac{\partial^{-\mu} y}{\partial x^{-\mu}} \right) = e^{-mx^3} \psi(x),$$

und diess gestattet folgende Schreibweise:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[e^{-mx^3} \frac{\partial^{-\mu} y}{\partial x^{-\mu}} \right] = \psi(x) e^{-mx^3},$$

und gibt integrirt:

$$e^{-mx^3}\frac{\partial^{-\mu}y}{\partial x^{-\mu}}=\int\psi(x)\,e^{-mx^3}\partial x+C;$$

hieraus folgt weiter:

$$\frac{\partial^{-\mu}y}{\partial x^{-\mu}}=e^{mx^3}\int\psi(x)\,e^{-mx^3}\partial x+Ce^{mx^3},$$

und wenn man beiderseits μmal differenzirt:

$$y=\frac{\partial^{\mu}}{\partial x^{\mu}}\left[e^{mx^3}\int\psi(x)\,e^{-mx^3}\partial x\right]+C\frac{\partial^{\mu}e^{mx^3}}{\partial x^{\mu}},$$

was das Integral der Gleichung (3) ist.

Erstes Beispiel. Ist $\mu=0$, so hat man die Gleichung:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=3mx^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+12mx\frac{\partial y}{\partial x}+6my,$$

und für das Integral derselben:

$$y=C_1e^{mx^3}+e^{mx^3}\int(C_2+C_3x)\,e^{-mx^3}\partial x,$$

unter C_1, C_2, C_3 willkührliche Constanten verstanden.

Zweites Beispiel. Ist $\mu=1$, so hat man:

$$y=C_1\frac{\partial e^{mx^3}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{mx^3}\int(C_2+C_3x+C_4x^2)\,e^{-mx^3}\partial x\right]$$

als Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=3mx^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+18mx\frac{\partial y}{\partial x}+18my. \tag{5}$$

Da aber das gefundene y vier Constanten enthält, so sind dieselben nicht ganz willkührlich, und müssen dermassen gewählt werden, dass sie der Gleichung (5) genügen.

Druckfehler.

Im Literarischen Berichte Nr. CXXVI. S. 1. muss es in der ersten Zeile des Artikels über die Tables d'intégrales définies etc. statt „Bierens à Haan" heissen: „Bierens De Haan."

Thl. XXV. S. 123. Z. 2. v. u. statt „plasieurs" s. m. „plusieurs."

Thl. XXX. S. 251. Z. 15. statt „$Dx+A_1\xi+B_1v+C_1\zeta$" muss es heissen: „$Dx=A_1\xi+B_1v+C_1\zeta$."

Thl. XXXII. S. 121. Z. 8. (von dem Anfange des Aufsatzes Nr. X. an) muss es statt „d'un manière" heissen: „d'une manière."

Thl. XXXIII. S. 37. Z. 4. v. u., S. 45. Z. 3. v. o. und S. 48. Z. 7. v. o. ist statt „spärischen": „sphärischen" und S. 48. Z. 14. v. u. statt „eingescriebenen": „eingeschriebenen" zu lesen.

XII.

Zur Bestimmung der Rauminhalte und Schwerpunkte von Körpern zwischen zwei Parallel-Ebenen und einer zusammenhängenden Umfläche.

Von

Herrn Dr. *Wilh. Matzka,*

Professor der Mathematik an der Hochschule in Prag.

Viele geometrische Körper werden von je einem Paare paralleler Ebenen (Grundebenen) und von einer zusammenhängenden, bald gebrochenen, bald gebogenen, bald gemischten Fläche (der Um- oder Mantelfläche) eingeschlossen; und eigentlich kann jeder allseitig begrenzte Körper in eine von zwei Parallelebenen eingegrenzte Schicht so gestellt werden, dass diese Ebenen seine Oberfläche entweder blos berühren oder zum Theil mit ausmachen (ergänzen) *). Ist es nun möglich, den zwischen beiden Grundebenen und zu ihnen parallel gelegten wandelbaren Schnitt (Parallel- oder Querschnitt) des Körpers als Function seines senkrechten Abstandes von einer, wo immer zu den Grundebenen parallel und festgestellten Ebene auszudrücken; so vermag die Integralrechnung bekanntlich für die verschiedensten Formen solcher Functionen den Rauminhalt und Schwerpunkt (eigentlich die Parallelebene dieses Punktes) solcher Körper zu ermitteln. Allein auch die bekannte und beliebte elementare Behandlung derartiger

---

*) Die Benennungen Konoïd, Stumpf- oder Afterkegel, besser Kegelstumpf oder Kegelstutz, so wie Pyramidoïd, Stumpf- oder Afterpyramide, Pyramidenstumpf oder -stutz, und ähnliche passen eigentlich nur auf gewisse Arten solcher Körper, eine allumfassende Benennung aller der beschriebenen Körper ist mir jedoch nicht bekannt.

Integrationsaufgaben, nemlich das verdeckte Integriren, d. i. die Grenzbestimmung der Summen von unendlich sich vermehrenden unendlich abnehmenden Bestandtheilchen des Körpers, löst derlei Fragestücke in mancherlei Fällen ohne sonderliche Schwierigkeit, vornehmlich wenn die erwähnte Function des Querschnittes eine ganze algebraische ist.

Ich habe die allgemeine leichtfassliche Lösung dieser Aufgabe schon in meiner im Sommer 1834 verfassten Bearbeitung des 2ten Bandes der „Vorlesungen über die Mathematik von G. Freiherrn v. Vega“ (7. Aufl. Wien 1835.) in §. 442. u. §. 516. durchgeführt und gefunden, dass wenn x den Abstand des wandelbaren Querschnittes Q eines Körpers von seiner Grundebene g vorstellt und

$$Q = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \dots$$

bei durchweg positiven Exponenten $a, b, c, \dots$ ist, der Rauminhalt V des veränderlichen, zwischen g und Q enthaltenen Körpers sei:

$$V = \frac{A}{a+1} x^{a+1} + \frac{B}{b+1} x^{b+1} + \frac{C}{c+1} x^{c+1} + \dots$$

Diese Formel wurde in §. 516. auf Prismen ($Q = A$ und $Q = Ax$), in §. 517. auf ganze Pyramiden ($Q = Ax^2$), in §. 528. auf Kugelplatten ($Q = \pi(a^2 - x^2)$), und in §. 534. Aufg. VI. auf zwei andere Körper ($Q = \frac{B}{a} x$ und $Q = B - \frac{B}{a^2} x^2$) angewendet.

Seit den Veröffentlichungen der höchst anziehenden Lehre von den Obelisken durch Herrn Oberlehrer Karl Koppe*) und seit der von Herrn Prof. Grunert (in seinem Archiv. 1847. Thl. IX. S. 82. Thl. XXI. S. 119. und in seinem Lehrbuch der Stereometrie) veröffentlichten äusserst einfachen und netten, rein geometrischen Inhaltsbestimmungen der Obelisken haben mich, sowohl bei meinen hiesigen Vorlesungen über elementare Körperlehre, als auch bei jenen über Integralrechnung und über analytische Mechanik diese Berechnungen mehrmal angezogen; und in jüngster Zeit haben meine Vorträge über analytische Schwerpunktsbestimmungen sammt der zufälligen Lesung der, von dem überaus emsigen Herrn Herausgeber des Archivs (in 1858, 31. Thl., 4. Hft., S. 487.) nach

*) Vergl. Crelle, Journ. f. Mathematik. 1838. 18. Bd.; Koppe, Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie, 1844; Koppe, Die Planimetrie und Stereometrie, 1846.

der oben gekennzeichneten gemeinfasslichen Weise durchforschten Reihe beachtenswerther, schon von L. Mascheroni *) untersuchter Körper mich dermassen angesprochen, dass ich mich veranlasst sehe, die folgenden Betrachtungen, von denen etliche bereits im Jahre 1855 gemacht worden waren, betreffend die rechnenden Bestimmungen der Rauminhalte und Schwerpunkte von Körpern der früher beschriebenen allgemeinen Gestalt, in dem viel gelesenen und weit verbreiteten Archiv in der Erwartung zu veröffentlichen, dass selbe nicht unliebsam werden aufgenommen werden.

1.

Sei nun überhaupt ein Körper K (in Taf. I. Fig. 5.) von den zwei, um die so genannte Höhe h von einander abstehenden, parallelen Grundebenen g, G und einer zwischen ihnen begriffenen ununterbrochenen Mantelfläche allseits begrenzt. Parallel zu den Grundebenen sei in einem (bekannten oder noch erst zu ermittelnden) Abstande $AO=a$ von der einen (unteren) Grundebene g eine unbegrenzte Ebene $\mathfrak{E}$, zu beiden Grundebenen parallel, fest gelegt, so dass ihr Abstand von der anderen (oberen) Grundebene G die Senkrechte $OB=OA+AB=a+h=b$ werde.

Zwischen den Grundebenen werde irgendwo, durch P, im beliebigen Abstande $OP=x$ der Querschnitt Q zu den Grundebenen oder zur unverrückbaren Ebene $\mathfrak{E}$ parallel gelegt; und nehmen wir an, es sei möglich, des Querschnitts Flächeninhalt Q, der Natur der Umfläche gemäss, durch die Veränderliche x und durch sonstige beständige Grössen auszudrücken, als Function von x darzustellen, auch falle dieser Querschnitt innerhalb beider Grundebenen reell und positiv aus. Durch einen um etwas, $Pp=\Delta x$, entfernteren Punkt p im Abstande $Op=x+\Delta x$ führe man den entsprechenden Querschnitt $Q'=Q+\Delta Q$; dann ist der zwischen beiden Querschnitten Q und Q' enthaltene scheiben- oder plattenförmige Körper der allgemeine, von Stelle zu Stelle nach der Entfernung x veränderliche Bestandtheil des Körpers K und kann auch als Zuwachs zu dem zwischen g und Q begriffenen wandelbaren Körpertheil, dessen Rauminhalt (Volum) v sein möge, angesehen und durch Δv dargestellt werden. Des ganzen Körpers K Rauminhalt V ist demnach die Summe (Gesammtschaft, andeutbar durch das Summenzeichen Σ) aller seiner derartigen

*) Problemi di geometria, colle dimostrazione del Sacchi. Milano 1800. — Problèmes de Géom. résolus de différentes manières, trad. de l'Italien, Paris 1802.

Bestandstücke Δv, wie sie von da, wo $x=a$ ist, bis dahin, wo $x=b$ ist, in den Abständen Δx ununterbrochen auf einander folgen, nemlich

$$V=\sum_{x=a}^{x=b} \Delta v.$$

Nun kann der zwischen den Parallelebenen Q, Q' enthaltene Theil der Umfläche erstlich so geartet sein, dass man durch den ganzen Umfang des grösseren Querschnitts, Q, eine cylindrische oder prismatische Fläche ganz ausserhalb dieser Platte Δv, und dagegen durch den ganzen Umfang des kleineren Querschnitts Q' eine andere solche Fläche ganz innerhalb derselben herumführen, folglich eben der Platte einen Cylinder oder ein Prisma dort umschreiben und hier einschreiben kann, deren Inhalte also $Q\Delta x$ und $Q'\Delta x$ sind, so dass entschieden $\Delta v < Q\Delta x$ und $\Delta v > Q'\Delta x$ sich darstellt. Es kann aber auch der andere Fall eintreten, dass man wegen des Baues der Umfläche die Querschnitte Q, Q' vorerst noch durch passliche Theilungslinien dermassen zerschneiden muss, damit man über ihren Theilen solche um- und eingeschriebene Prismen in die Platte Δv aufstellen könne. Dann sind $Q\Delta x$ und $Q'\Delta x$ die Summen der Inhalte aller, den scheibenartigen Bestandstücken des Körpers um- und eingeschriebenen Prismen und es ist auch da $\Delta v < Q\Delta x$ und $\Delta v > Q'\Delta x$.

Sohin ist Δv ein Mittel von $Q\Delta x$ und $Q'\Delta x = (Q+\Delta Q)\Delta x$ oder auch $\Delta v = \text{Med.}(Q,\ Q+\Delta Q).\Delta x$, und da ein derlei Mittel durch $Q+\theta\Delta x$ bei der Voraussetzung, dass θ eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl bedeute, sich darstellen lässt, auch

$$\Delta v = (Q+\theta\Delta x)\Delta x,$$

und sonach des Körpers Rauminhalt:

$$V=\sum_{x=a}^{x=b} (Q+\theta\Delta Q)\Delta x.$$

Lässt man nunmehr die an sich schon klein gedachte Scheibendicke Δx unendlich abnehmen, ohne aber zu verschwinden, das Differential dx werden, so wird auch der Unterschied ΔQ der benachbarten Querschnitte unendlich abnehmen, die Summe $Q+\theta\Delta Q$ ihrer Grenze Q zustreben, und die besprochene begrenzte Summation der endlichen Bestandstücke bekanntlich *) in eine eben so (von $x=a$ bis $x=b$) eingegrenzte Integration (allesammtliche Zu-

*) Cauchy, Resumé des Leçons sur le calcul infinitésimal, 1823, p. 81—84. — Moigno, Calcul intégral, 1844, p. 1—5.

sammenfassung) aller kleinsten Bestandtheilchen (Elemente) des Körpers übergehen, und sonach wird der fragliche **Körperinhalt**

$$V = \int_a^b Qdx.$$

Für das statische Moment des Gewichtes des plattenartigen Bestandstücks $\varDelta v$ ist der Abstand seines offenbar zwischen seinen Begrenzungsebenen Q und Q' enthaltenen Schwerpunktes von der **Normalebene** $\mathfrak{E}$ ein Mittel zwischen den Abständen x und $x + \varDelta x$ dieser Ebenen, also $= x + \theta' \varDelta x$, wenn auch θ' eine zwischen 0 und 1 begriffene Zahl vorstellt. Dann ist in Bezug auf diese Ebene $\mathfrak{E}$ sein statisches Moment $= \varDelta v (x + \theta' \varDelta x)$, und die Summe der Momente sämmtlicher dieser plattenartigen Bestandtheile das Moment des ganzen Körperraums V beziehlich derselben Momentenebene, nemlich wenn X den Abstand seines Schwerpunktes von dieser Standebene vorstellt:

$$VX = \sum_{x=a}^{x=b} (x + \theta' \varDelta x) \varDelta v = \sum_{x=a}^{x=b} (x + \theta' \varDelta x) . (Q + \theta \varDelta Q) \varDelta x.$$

Wenn man nun wieder $\varDelta x$ und $\varDelta Q$ unendlich abnehmen, jedoch nicht verschwinden lässt, übergeht bei ähnlichen Betrachtungen wie früher auch diese Summe in das wie sie (zwischen $x = a$ und $x = b$) begrenzte Integral, und es wird des Körpers statisches Schwermoment:

$$VX = \int_a^b x . Qdx.$$

2.

In allen hier folgenden Untersuchungen der Rauminhalte und Schwermomente der zu betrachtenden Körpergattung ist überhaupt beachtenswerth:

1. die Bestimmung und Form der Function des wandelbaren Querschnitts Q von seiner senkrechten Entfernung x von der fest gelegten Standebene $\mathfrak{E}$, und

2. nach Ermittelung des Ausdrucks für den Rauminhalt oder für das statische Moment des Körpers die Einführung der Inhalte der Grundebenen und passlicher Zwischenschnitte an die Stelle des Abstandes a oder b und der Coefficienten der Function des Querschnittes.

3.

Sei nun der Querschnitt Q, wie hier durchweg vorausgesetzt werden soll, eine ganze algebraische Function seiner senkrechten Entfernung x von der Standebene $\mathfrak{E}$, nemlich

(1) $$Q = Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots,$$

mit der Annahme, dass die Exponenten $m, n, p, \ldots$ beliebige reelle positive Zahlen seien. Dann ist (nach 1.)

$$V = \int_a^b (Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots) dx,$$

$$VX = \int_a^b (Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots) x dx;$$

folglich, weil allgemein $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + \text{Const.}$ für positive r ist,

(2)

$$V = \frac{A}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1}) + \frac{B}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) + \frac{C}{p+1}(b^{p+1} - a^{p+1}) + \ldots,$$

(3)

$$VX = A\frac{b^{m+2} - a^{m+2}}{m+2} + B\frac{b^{n+2} - a^{n+2}}{n+2} + C\frac{b^{p+2} - a^{p+2}}{p+2} + \ldots,$$

mit der ständigen Beziehungsgleichung

(4) $$b - a = h.$$

Hat man demnach den Ausdruck (1) des mit x wandelhaften Querschnittes Q aus der Bildungsweise (Construction) des Körpers, mithin nebst den Exponenten $m, n, p, \ldots$ auch die Coefficienten $A, B, C, \ldots$ aufgefunden; so wären nur noch zwei der Abstände $a, b, h, \ldots$ anzugeben oder zu ermitteln, um danach V, VX und X zu berechnen. Gewöhnlich bedingt man jedoch, es seien die Grundebenen g, G nach ihrem Flächeninhalt mit ihrem beiderseitigen Abstande h und sonstige Mittel- oder Zwischenschnitte $M, M', \ldots$ in den Abständen $\mu h, \mu' h', \ldots < h$ von der Grundebene g bekannt, so dass danach die Bedingungsgleichungen gelten:

(5) $$g = Aa^m + Ba^n + Ca^p + \ldots$$

(6) $$G = Ab^m + Bb^n + Cb^p + \ldots,$$

(7) $$M = A(a + \mu h)^m + B(a + \mu h)^n + \ldots,$$

$$M' = A(a + \mu' h)^m + B(a + \mu' h)^n + \ldots,$$

. . . .

Nach diesen Gleichungen (4) bis (7) wird man daher die Abstände a, b und die Coefficienten A, B, C,.... durch die Höhe h und die Schnitte g, G, M, M',.... ausdrücken und ihre Ausdrücke in jene von V und VX einsetzen. Natürlich wird dieser Vorgang nach der Anzahl der im Ausdrucke von Q vorkommenden Glieder sich modificiren (abändern), und mag hier, bei der allgemeinsten Lage der Standebene $\mathfrak{E}$, blos an der eingliedrigen Form von Q erläutert werden.

4.

Ist Q eingliedrig, also

(8) $$Q = Ax^m,$$

so ist

(9) $$V = A\frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},$$

(10) $$VX = A\frac{b^{m+2} - a^{m+2}}{m+2},$$

(11) $$g = Aa^m,$$

(12) $$G = Ab^m,$$

und aus den zwei letzten Gleichungen, verbunden mit der Gleichung (4), sind a, b, A durch h, g, G auszudrücken, was sich, wofern wir den Fall, wo $m=0$, also $Q=A$, und der Körper ein Prisma oder Cylinder ist, als zu einfach übergehen, wie folgt bewerkstelligen lässt. Aus (11) und (12) folgt, nachdem man daraus die $m$te Wurzel gezogen hat,

(13) $$\frac{1}{\sqrt[m]{A}} = \frac{a}{\sqrt[m]{g}} = \frac{b}{\sqrt[m]{G}} = \frac{b-a=h}{\sqrt[m]{G}-\sqrt[m]{g}},$$

wonach sich A, a, b ausdrücken liessen. Anstatt aber ihre Ausdrücke sogleich in (9) und (10) einzuschreiben, multipliciren wir in diesen mit A, ersetzen Aa^m, Ab^m durch g, G und tragen endlich die Ausdrücke für a und b ein, wonach wir erhalten:

(14) $$V = \frac{h}{m+1} \cdot \frac{G\sqrt[m]{G} - g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g}},$$

(15) $$VX = \frac{h^2}{m+2} \cdot \frac{G\sqrt[m]{G^2} - g\sqrt[m]{g^2}}{(\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g})^2}.$$

Ist insbesondere m eine ganze Zahl, wie meistens, so kann man in (9) und (10) den Factor $b-a=h$ immer, und da, wo der Exponent gerad ist, sogar $b^2-a^2=(b+a)h$ herausheben; man findet sonach:

$$V = \frac{Ah}{m+1}(b^m + b^{m-1}a + b^{m-2}a^2 + \ldots. + ba^{m-1} + a^m),$$

und wenn $m+1$ gerad und >2, also m ungerad und >1 ist,

$$= \frac{Ah}{m+1}(b+a)(b^{m-1} + b^{m-3}a^2 + b^{m-5}a^4 + \ldots. + a^{m-1});$$

ferner das auf die Standebene $\mathfrak{E}$ beziebliche Moment:

$$VX = \frac{Ah}{m+2}(b^{m+1} + b^m a + b^{m-1}a^2 + \ldots. + ba^m + a^{m+1}),$$

und wenn $m+2$, also auch m gerad ist,

$$= \frac{Ah}{m+2}(b+a)(b^m + b^{m-2}a^2 + b^{m-4}a^4 + \ldots + a^m),$$

und sonach, wenn $x_1 = X - a$ den Abstand des Schwerpunktes des Körpers K von der Grundebene g bezeichnet, das auf diese Grundebene g bezogene Moment:

$$Vx_1 = VX - Va = Ah\frac{(m+1)b^{m+1} - b^m a - b^{m-1}a^2 - \ldots. - ba^m - a^{m+1}}{(m+1)(m+2)},$$

oder weil der Zähler für $b=a$ verschwindet, also durch $b-a=h$ theilbar ist, auch

$$Vx_1 = \frac{Ah^2}{m+1} \cdot \frac{(m+1)b^m + mb^{m-1}a + (m-1)b^{m-2}a^2 + \ldots. + 2ba^{m-1} + a^m}{m+2}.$$

In diesen Ausdrücken schreiben wir gemäss (13):

$$b = \sqrt[m]{\frac{G}{A}}, \quad a = \sqrt[m]{\frac{g}{A}} \text{ und wo nöthig am Ende noch } \frac{1}{\sqrt[m]{A}} = \frac{h}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g}};$$

dann wird:

$$(16) \quad V = \frac{h}{m+1}(G + \sqrt[m]{G^{m-1}g} + \sqrt[m]{G^{m-2}g^2} + \ldots + g)$$

und für ungerade $m > 1$:

$$= \frac{h}{m+1}(\sqrt[m]{G} + \sqrt[m]{g})(\sqrt[m]{G^{m-1}} + \sqrt[m]{G^{m-3}g^2} + \sqrt[m]{G^{m-5}g^4} + \ldots + \sqrt[m]{g^{m-1}}),$$

$$(17) \quad VX = \frac{h^2}{m+2} \frac{G\sqrt[m]{G} + G\sqrt[m]{g} + \sqrt[m]{G^{m-1}g^2} + \ldots + g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g}}$$

und für gerade $m > 0$:

$$= \frac{h^2}{m+2}(\sqrt[m]{G} + \sqrt[m]{g}) \frac{G + \sqrt[m]{G^{m-2}g^2} + \sqrt[m]{G^{m-4}g^4} + \ldots + g}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g}},$$

endlich:

$$(18)$$

$$Vx_1 = \frac{h^2}{m+1} \frac{(m+1)\,G + m\sqrt[m]{G^{m-1}g} + (m-1)\sqrt[m]{G^{m-2}g^2} + \ldots + g}{m+2}.$$

Erstes Beispiel. Für $m = 1$ ist $Q = Ax$, also

$$V = h\frac{G+g}{2}, \quad VX = \frac{h^2}{3}\frac{G^2 + Gg + g^2}{G-g}, \quad Vx_1 = \frac{h^2}{2}\frac{2G+g}{3},$$

$$X = \frac{2}{3}h\frac{G^2 + Gg + g^2}{G^2 - g^2}, \quad x_1 = \frac{h}{3}\frac{2G+g}{G+g}.$$

Dieser Fall tritt ein: 1) bei einem vierseitigen Prisma, welches aus einem dreiseitigen, mittels eines zu einer Seitenebene G im Abstande h parallelen Schnittes g ausgeschnitten wird, wenn die Standebene $\mathfrak{E}$ durch die zu G gleichlaufende Seite des dreiseitigen Prisma gelegt ist; 2) bei einem elliptischen Paraboloid, wenn auf der Axe senkrecht durch den Scheitel die Standebene $\mathfrak{E}$ und an zwei um h aus einander stehenden Stellen die Schnitte g und G gelegt werden.

Zweites Beispiel. Bei $m = 2$ ist $Q = Ax^2$, daher

$$V = h\frac{G + \sqrt{Gg} + g}{3}, \quad VX = \frac{h^2}{4}(G+g)\frac{\sqrt{G} + \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}},$$

$$Vx_1 = \frac{h^2}{2} \cdot \frac{3G + 2\sqrt{Gg} + g}{6}, \quad X = \frac{3}{4}h\frac{\sqrt{G} + \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} \frac{G+g}{G + \sqrt{Gg} + g},$$

$$x_1 = \frac{h}{4}\frac{3G + 2\sqrt{Gg} + g}{G + \sqrt{Gg} + g}.$$

Diese Ausdrücke gelten für Pyramiden und Kegel, wenn die Standebene $\mathfrak{E}$ durch deren Spitze geführt ist.

5.

Die Stammausdrücke (2) und (3) des Rauminhaltes und Momentes eines Körpers der in Rede stehenden Gattung werden wir offenbar wesentlich vereinfachen, wenn wir die Integrationsgrenzen, mit Bewahrung ihres Intervalls (Zwischenraums) $b-a=h$, dermassen abändern, dass die untere entweder Null oder die negative obere wird, nemlich wenn wir die Standebene $\mathfrak{E}$ entweder mit der unteren Grundebene g zusammenfallen oder durch die Mitte der Höhe h gehen lassen. Hiebei darf jedoch nicht vergessen werden, dass wenn der Ausdruck des Querschnittes Q durch seinen Abstand x' von einer gewissen ursprünglichen Standebene $\mathfrak{E}'$ bekannt, namentlich

$$Q = Ax'^m + Bx'^n + Cx'^p + \ldots. = f(x')$$

ist und hierbei die Exponenten $m, n, p, \ldots.$ fallend gereiht sind, man beziehlich einer ihm um c näheren Ebene $\mathfrak{E}$, von welcher er um $x = x' - c$ absteht, hiernach nur $x' = c + x$ einzusetzen haben wird, um den auf diese neue Standebene $\mathfrak{E}$ bezüglichen Ausdruck des Querschnittes

$$Q = A(c+x)^m + B(c+x)^n + C(c+x)^p + \ldots. = f(c+x)$$

zu erhalten.

Sind hier die Exponenten $m, n, p, \ldots.$ nicht insgesammt ganz, so ist bei solchem Umtauch der Veränderlichen nichts zu gewinnen, weil die Reihe der Entwickelung des Q nach Potenzen von x nicht abbricht. Hingegen wenn Q ursprünglich schon, also für was immer für eine Standebene $\mathfrak{E}'$, eine ganze rationale Function von x' ist, wird auch sein neuer Ausdruck eine eben solche Function von x, und zwar vom selben $m$ten Grade wie der frühere, nemlich von der Form

$$Q = C_m x^m + C_{m-1} x^{m-1} + \ldots. + C_1 x + C_0.$$

Die Berechnung dieser Coefficientenreihe aus der Stammreihe $A, B, C, \ldots.$ kann entweder durch Ausführung der angedeuteten Potenzirungen oder bei höherem Grade (m) nach dem von mir in meiner Bearbeitung des ersten Bandes von Vega's Vorlesungen über Mathematik, 1838 und 1850, §. 286. gelehrten zusammenhängenden Rechnungszuge ausgeführt werden.

6.

A. Ziehen wir demnach zuvörderst den Sonderfall in Betrachtung, wo wir die Abstände x der Parallelschnitte, also auch den Abstand x_1 des Schwerpunkts des zu erforschenden Körpers K von dessen Grundebene g an zählen. Da muss in unserer allgemeinen Forschung (Art. 3.) $a=0$, also $b=h$, mithin, weil für $x=a=0$ der Querschnitt Q in g übergeht, $m=0$ und $A=g$ sein; folglich ist dieser Querschnitt noch allgemein:

$$(19)\qquad Q=A+Bx^n+Cx^p+\ldots., \text{ mit } A=g,$$

der Rauminhalt

$$(20)\qquad V=h(g+\frac{Bh^n}{n+1}+\frac{Ch^p}{p+1}+\ldots.),$$

dann, indem man X in x_1 vertauscht, das Moment:

$$(21)\qquad Vx_1=h^2\left(\frac{g}{2}+\frac{Bh^n}{n+2}+\frac{Ch^p}{p+2}+\ldots.\right),$$

und die zweite Grundebene

$$(22)\qquad G=g+Bh^n+Ch^p+\ldots.$$

Aus dieser Gleichung kann man ein Glied, Bh^n, bestimmen und seinen Ausdruck $Bh^n=G-g-(Ch^p+\ldots.)$ in die vorhergehenden einsetzen, wodurch man erhält:

$$(23)\qquad V=h\left(\frac{ng+G}{n+1}-\frac{p-n}{(n+1)(p+1)}Ch^p-\ldots.\right),$$

$$(24)\qquad Vx_1=h^2(\tfrac{1}{2}\frac{ng+2G}{n+2}-\frac{p-n}{(n+2)(p+2)}Ch^p-\ldots.\Big).$$

Diese Ausdrücke sind demnach vollständig durch g und G bestimmt, wenn

I. des Querschnitts Q Ausdruck nur auf zwei Glieder beschränkt, also

$$(25)\qquad Q=A+Bx^n$$

ist. Denn da ist $C=D=\ldots.=0$, also

$$(26)\qquad V=h\frac{ng+G}{n+1},$$

$$(27)\qquad Vx_1=\frac{h^2}{2}\frac{ng+2G}{n+2}.$$

Setzt man abkürzend

(28) $$\frac{ng + G}{n+1} = \gamma,$$

so wird

(29) $$V = h\gamma,$$

und γ ist ein arithmetisches Mittel der Grundebenen g und G, welches für $n = 1$ mitten inne zwischen beiden, für $n > 1$ aber näher an g als an G steht. Setzt man dann eben so:

(30) $$\frac{ng + 2G}{n+2} = \Gamma,$$

so wird

(31) $$Vx_1 = \frac{h^2}{2}\Gamma,$$

und es ist Γ ebenfalls ein arithmetisches Mittel zwischen g und G; aber weil noch

($\overline{30}$) $$\Gamma = \frac{(n+1)\gamma + G}{(n+1)+1}$$

gestellt werden kann, ist Γ auch ein arithmetisches Mittel zwischen γ und G, welches, weil $n + 1 > 1$ ist, immer näher an γ als an G liegt.

II. Wenn ferner Q dreigliedrig sich darstellt, also

(32) $$Q = A + Bx^n + Cx^p$$

ist, und wenn hierin $p > n > 0$ ist, so muss zur Bestimmung von Ch^p für die Ausdrücke (23) und (24) noch ein Zwischenschnitt M im Abstande $\mu h < h$ von g geführt werden, und, weil $A = g$ ist, erhält man für ihn:

($\overline{22}$) $$M = g + \mu^n . Bh^n + \mu^p . Ch^p,$$

womit man noch

(22) $$G = g + Bh^n + Ch^p$$

verbindet. Aus beiden Gleichungen findet man sofort:

$$Ch^p = \frac{(G-g)\mu^n - (M-g)}{\mu^n - \mu^p},$$

und die Ausdrücke (23) und (24) werden mit Beachtung der Satzungen (28) und (30):

(33) $$V = h(\gamma - \frac{p-n}{(n+1)(p+1)} . Ch^p),$$

(34) $$Vx_1 = h^2\left(\frac{\Gamma}{2} - \frac{p-n}{(n+2)(p+2)} . Ch^p\right).$$

Zur ferneren Umwandlung von Ch^p für V setzen wir darin nach (28)

$$G-g=(n+1)(\gamma-g),$$

und da wir hiernach

$$(35) \qquad Ch^p=\frac{(n+1)\mu^n\gamma-M-[(n+1)\mu^n-1]g}{\mu^n-\mu^p}$$

erhalten, setzen wir abkürzend

$$(36) \qquad (n+1)\mu^n-1=i, \quad \frac{p-n}{(n+1)(p+1)(\mu^n-\mu^p)}=q,$$

und finden

$$(37) \qquad V=h[qM+iqg+(1-q-iq)\gamma].$$

Zur Umwandlung von Ch^p für Vx_1 setzen wir hingegen darin gemäss (30):

$$G-g=\frac{n+2}{2}(\Gamma-g),$$

und da wir hiernach

$$(38) \qquad Ch^p=\frac{(n+2)\mu^n\Gamma-2M-[(n+2)\mu^n-2]g}{2(\mu^n-\mu^p)}$$

finden, setzen wir abkürzend:

$$(39) \qquad (n+2)\mu^n-2=i', \quad \frac{p-n}{(n+2)(p+2)(\mu^n-\mu^p)}=q',$$

und erhalten:

$$(40) \qquad Vx_1=\frac{h^2}{2}[2q'M+i'q'g+(1-2q'-i'q')\Gamma].$$

In (37), dem Ausdrucke des Körperinhaltes, ist der zusammengesetzte Factor ein arithmetisches Mittel der Flächen M, g und γ, wenn ihre zu 1 sich ergänzenden Multiplicatoren q, iq, $1-q-iq$ allesammt positiv und <1 sind. Da das Verhältniss μ noch willkürlich ist, wird es zur Vereinfachung dieses Ausdruckes (37) am Einfachsten sein, g oder γ herausfallen, also i oder $1-(i+1)q$ verschwinden zu machen, folglich im ersten Falle

$$(41) \qquad (n+1)\mu^n=1, \quad \mu^n=\frac{1}{n+1}$$

zu setzen; dann ist

$$(42) \qquad V=h[qM+(1-q)\gamma]$$

und hierin die mit h multiplicirte Fläche ein arithmetisches Mittel von M und γ, wofern in (36) die Zahl q zwischen 0 und 1 fällt.

Auch kann man, weil $q=1-(1-q)$ ist, schreiben:

$$V=hM+(1-q).h(\gamma-M). \tag{43}$$

Im anderen Falle soll $(i+1)q-1=0$ sein, welches nach (36) durch

$$\mu^{p-n}=\frac{n+1}{p+1} \tag{44}$$

erfüllt wird, und zufolge (37) ist dann:

$$V=h[qM+(1-q)g]=hM+(1-q).h(g-M). \tag{45}$$

In beiden Fällen kann man für die Werthe von n, p, μ, i, q noch Vx_1 nach (34) berechnen, indem man darin für Γ und Ch^p die gemäss (30) oder ($\overline{30}$) und (35) sich ergebenden Ausdrücke durch g, γ, M einsetzt.

In (40), dem Ausdrucke des statischen Momentes, ist der zusammengesetzte Factor ein arithmetisches Mittel der Flächen M, g, Γ, wenn ihre zu 1 sich ergänzenden Multiplicatoren $2q'$, $i'q'$ und $1-2q'-i'q'$ allesammt positiv und <1 sind.

Da das Verhältniss μ noch willkürlich ist, wird es zur Vereinfachung dieses Ausdruckes (40) am einfachsten sein, g oder Γ herausfallen, also $i'=0$ oder $1-(i'+2)q'=0$ zu machen, folglich im ersten Falle

$$\mu^n=\frac{2}{n+2} \tag{46}$$

zu setzen; dann ist

$$Vx_1=h^2[2q'M+(1-2q')\gamma]=h^2M+(1-2q').h^2(\gamma-M), \tag{47}$$

und darin die mit h^2 multiplicirte Fläche ein arithmetisches Mittel von M und γ, wofern nach (39) die Zahl $2q'$ zwischen 0 und 1 fällt.

Im anderen Falle soll $(i'+2)q'-1=0$ sein, welches nach (39) durch

$$\mu^{p-n}=\frac{n+2}{p+2} \tag{48}$$

erfüllt wird, und gemäss (40) ist dann:

$$Vx_1=h^2[2q'M+(1-2q')g]. \tag{49}$$

In beiden Fällen kann man für die Werthe von n, p, μ, i', q' noch V nach (33) berechnen, indem man hierin für γ und Ch^p

die gemäss (28) und (38) sich ergebenden Ausdrücke durch g, Γ, M einsetzt.

Anwendung. Wenden wir diese Ergebnisse auf etliche Beispiele an.

1) Zum Querschnitte $Q = A + Bx$ findet man (wie im ersten Beispiele des 4. Art.):

$$V = h\frac{g+G}{2}, \quad Vx_1 = \frac{h^2}{2}\frac{g+2G}{3}, \quad x_1 = \tfrac{2}{3}h\frac{g+2G}{g+G}.$$

2) Zum Querschnitte $Q = A + Bx^2$ erhält man:

$$V = h\frac{2g+G}{3}, \quad Vx_1 = h^2\frac{g+G}{2}, \quad x_1 = \tfrac{3}{2}h\frac{g+G}{2g+G}.$$

3) Zum Querschnitte $Q = A + Bx^3$ ergeben sich:

$$V = h\frac{3g+G}{4}, \quad Vx_1 = h^2\frac{3g+2G}{5}, \quad x_1 = \tfrac{4}{5}h\frac{3g+2G}{3g+G}.$$

4) Für den viel verbreiteten Querschnitt $Q = A + Bx + Cx^2$ nimmt man entweder nach (41):

α. die Zahl $\mu = \frac{1}{2}$, d. i. man führt den Schnitt M mitten zwischen g und G, und findet $\gamma = \dfrac{G+g}{2}$,

$$V = h\frac{\gamma+2M}{3} = hM + \tfrac{1}{3}h(\gamma - M) = h\frac{g+G+4M}{6},$$

$$Vx_1 = \frac{h^2}{2}\,\frac{G+2M}{3}, \quad x_1 = h\cdot\frac{G+2M}{g+G+4M} = \frac{h}{2}\,\frac{G+2M}{\gamma+2M};$$

β. oder man nimmt $\mu = \frac{2}{3}$ nach (44) und erhält:

$$V = h\frac{g+3M}{4} = hM + \tfrac{1}{4}h(g-M),$$

$$Vx_1 = \frac{h^2}{2}\cdot\frac{9M+2G+g}{12}, \quad x_1 = \frac{h}{6}\,\frac{9M+2G+g}{3M+g} = \frac{h}{2}\,\frac{3M+\Gamma}{3M+g}$$

$$= \frac{h^2}{2}\cdot\frac{3M+\Gamma}{4} \text{ für } \Gamma = \frac{2G+g}{3};$$

γ. oder man wählt $\mu = \frac{3}{4}$ nach (48) und findet:

$$V = h\frac{16M+5g-3G}{18} = h\frac{8M+\gamma'}{9} \text{ für } \gamma' = \frac{5g-3G}{2}, \quad Vx_1 = \frac{h^2}{2}\cdot\frac{8M+g}{9},$$

$$x_1 = h\,\frac{8M+g}{16M+5g-3G} = \frac{h}{2}\,\frac{8M+g}{8M+\gamma'}.$$

7.

Es lässt sich nun leicht erachten, dass diese Beispiele in's Unbestimmte vermehrt werden könnten, weshalb wir uns blos auf die hier vorgelegten beschränken, dagegen es für nicht unangemessen halten, die Benützung der in verschiedenen Abständen zu führenden Mittelschnitte M und der mancherlei arithmetischen Mittel γ, Γ der Grundebenen g, G in einer allgemeineren und symmetrischen Weise darzulegen.

I. Hierzu nehmen wir erstlich betreffs des Rauminhaltes die Gleichung

$$(20) \qquad \frac{V}{h} = g + \frac{Bh^n}{n+1} + \frac{Ch^p}{p+1}$$

in Verbindung mit

$$(22) \qquad G = g + Bh^n + Ch^p,$$

$$(\overline{22}) \qquad M = g + \mu^n Bh^n + \mu^p Ch^p$$

in Betracht, indem wir letztere mit den vor der Hand unbestimmten Multiplicatoren $\varkappa$ und λ multipliciren und von der ersteren abziehen, sonach im Unterschiede die Glieder mit Bh^n und Ch^p dadurch verschwinden machen, dass wir

$$(50) \qquad \varkappa + \lambda\mu^n = \frac{1}{n+1}, \quad \varkappa + \lambda\mu^p = \frac{1}{p+1}$$

bedingen, und endlich noch der Gleichförmigkeit halber

$$(51) \qquad 1 - \varkappa - \lambda = \theta$$

setzen, wonach wir erhalten:

$$(52) \qquad \frac{V}{h} = \theta g + \varkappa G + \lambda M$$

und

$$(\overline{51}) \qquad \theta + \varkappa + \lambda = 1,$$

zum Zeichen, dass $\frac{V}{h}$ ein arithmetisches Mittel von g, G, M ist, wenn θ, $\varkappa$, λ gleichstimmig sind.

Im Ausdrucke (52) kann nun M nicht fehlen, also keinesfalls $\lambda = 0$ werden, weil sonst in (50) $\varkappa$ zweierlei Werthe erhielte, da n und p verschieden sein müssen. Dagegen kann G oder g entfallen, also $\varkappa = 0$ oder auch $\theta = 0$ werden.

a) Soll G wegfallen, also $\varkappa=0$ sein, so muss gemäss (50), wenn getheilt wird,

$$\mu^{p-n}=\frac{n+1}{p+1} \tag{44}$$

gesetzt werden, und man erhält:

$$\lambda=\frac{1}{(n+1)\mu^n}=\frac{1}{(p+1)\mu^p}, \quad \theta=1-\lambda, \tag{53}$$

endlich

$$\frac{V}{h}=(1-\lambda)g+\lambda M. \tag{54}$$

b) Soll g wegfallen, also $\theta=0$ werden, so findet man aus (50) und (51), indem man $\varkappa$ und λ daraus verdrängt, für μ die Bedingung

$$\frac{1-\mu^p}{1-\mu^n}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{p}{p+1}=\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{p}}, \tag{55}$$

sohin

$$\frac{1}{\lambda}=(1+\frac{1}{n})(1-\mu^n)=(1+\frac{1}{p})(1-\mu^p), \quad \varkappa=1-\lambda, \tag{56}$$

und endlich:

$$\frac{V}{h}=(1-\lambda)G+\lambda M. \tag{57}$$

c) Man kann aber auch aus $\frac{V}{h}$ sowohl g als G ausmerzen und dafür eine Hilfsfläche von dem Ausdrucke

$$mG+(1-m)g=\gamma \tag{58}$$

einführen, welche ein arithmetisches Mittel der Grundebenen g und G ist, falls die willkürliche Zahl m zwischen 0 und 1 gewählt wird. Hierzu multipliciren wir diese Gleichung (58) mit dem unbestimmten Multiplicator ϱ, addiren sie zur Gleichung (52) und stellen in der Summe die Coefficienten von g und G beiderseits des Gleichheitszeichens einander gleich, nemlich

$$(1-m)\varrho=\theta, \quad m\varrho=\varkappa;$$

folglich

$$\frac{V}{h}=\varrho\gamma+\lambda M.$$

Demnach muss sein:

$$\varrho = \frac{\theta}{1-m} = \frac{\varkappa}{m} = \frac{\theta+\varkappa}{1} = 1-\lambda,$$

und sofort ist:

$$(59) \qquad \frac{V}{h} = (1-\lambda)\gamma + \lambda M.$$

Da man hierbei die Zahl m frei wählen kann, so frägt es sich, für welche Werthe von μ diese Einführung von γ geschehe. Hierzu setzen wir den Ausdruck $\varkappa = m(1-\lambda)$ in die Gleichungen (50), schaffen daraus λ weg und erhalten für μ, und danach auch für λ, die Bestimmungsgleichungen

$$\frac{\mu^n - m}{\frac{1}{n+1} - m} = \frac{\mu^p - m}{\frac{1}{p+1} - m} = \frac{\mu^n - \mu^p}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{p+1}} = \frac{1}{\lambda},$$

denen zufolge dann nach Obigem

$$\theta = (1-m)(1-\lambda), \quad \varkappa = m(1-\lambda)$$

bestimmt wird.

d) Endlich könnte man wohl auch im Ausdrucke (52), nachdem er genügend vereinfacht worden, für jedes beliebig gewählte Verhältniss μ geradehin die Hilfsfläche

$$\frac{\theta g + \varkappa G}{\theta + \varkappa} = \Gamma$$

einführen, indem man $\theta g + \varkappa G = (\theta + \varkappa)\Gamma = (1-\lambda)\Gamma$ einsetzt und sofort findet:

$$(60) \qquad \frac{V}{h} = (1-\lambda)\Gamma + \lambda M.$$

II. Betrachten wir nun andererseits in Bezug auf das statische Moment die Gleichung

$$(21) \qquad \frac{Vx_1}{\frac{1}{2}h^2} = g + \frac{2}{n+2}Bh^n + \frac{2}{p+2}Ch^p$$

wieder verbunden mit

$$(22) \qquad G = g + Bh^n + Ch^p,$$

$$(\overline{22}) \qquad M = g + \mu^n . Bh^n + \mu^p . Ch^p;$$

so multipliciren wir die letzteren mit den vorerst noch unbestimmten Zahlen $\varkappa'$ und λ', ziehen sie von jenen ersteren ab und setzen

$$(61) \qquad \varkappa' + \lambda'\mu^n = \frac{2}{n+2}, \quad \varkappa' + \lambda'\mu^p = \frac{2}{p+2},$$

$$(62) \qquad 1 - \varkappa' - \lambda' = \theta',$$

um zu erhalten:

$$\frac{Vx_1}{\frac{1}{2}h^2} = \theta' g + \varkappa' G + \lambda' M \tag{63}$$

mit

$$\theta' + \varkappa' + \lambda' = 1, \tag{64}$$

woraus zu ersehen, dass $\theta' g + \varkappa' G + \lambda' M$ ein arithmetisches Mittel von g, G, M ist, wenn θ', $\varkappa'$, λ' gleichstimmig sind.

Auch in diesem Ausdrucke (63) kann M nicht fehlen, folglich keinesfalls $\lambda' = 0$ sich ergeben, weil sonst in (61) $\varkappa'$ zwei ungleiche Werthe annähme. Hingegen kann G oder g herausfallen, also $\varkappa' = 0$ oder $\theta' = 0$ werden.

α) Soll G wegfallen, also $\varkappa' = 0$ sein, so muss den Gleichungen (61) gemäss

$$\mu^{p-n} = \frac{n+2}{p+2} \tag{65}$$

angenommen werden, und man erhält:

$$\lambda' = \frac{2}{(n+2)\mu^n} = \frac{2}{(p+2)\mu^p}, \quad \theta' = 1 - \lambda' \tag{66}$$

und

$$\frac{Vx_1}{\frac{1}{2}h^2} = (1 - \lambda')g + \lambda' M. \tag{67}$$

β) Soll g wegfallen, also $\theta' = 0$ werden, so findet man aus (61) und (62) für μ die Bestimmungsgleichung

$$\frac{1-\mu^p}{1-\mu^n} = \frac{n+2}{n} \cdot \frac{p}{p+2}, \tag{68}$$

sohin

$$\frac{1}{\lambda'} = \left(1 + \frac{2}{n}\right)(1 - \mu^n) = \left(1 + \frac{2}{p}\right)(1 - \mu^p), \quad \varkappa' = 1 - \lambda' \tag{69}$$

und

$$\frac{Vx_1}{\frac{1}{2}h^2} = (1 - \lambda')G + \lambda' M. \tag{70}$$

γ) Will man in den Ausdruck von $\frac{Vx_1}{\frac{1}{2}h^2}$ anstatt G und g die Hilfsfläche γ nach der Gleichung (58) einführen, so findet man ähnlich wie in I. c) für μ und λ' die Bestimmungsgleichungen

$$\frac{\mu^n - m}{\frac{2}{n+2} - m} = \frac{\mu^p - m}{\frac{2}{p+2} - m} = \frac{\mu^n - \mu^p}{\frac{2}{n+2} - \frac{2}{p+2}} = \frac{1}{\lambda'}, \tag{71}$$

dann

(72) $$\theta' = (1-m)(1-\lambda'), \quad \varkappa' = m(1-\lambda'),$$

und endlich:

(73) $$\frac{Vx_1}{\frac{1}{2}h^2} = (1-\lambda')\gamma + \lambda' M.$$

δ) Soll in dem Ausdrucke (63) geradezu die Hilfsfläche

$$\frac{\theta' g + \varkappa' G}{\theta' + \varkappa'} = \Gamma$$

eingeführt werden, so erhält man sofort:

$$\frac{Vx_1}{\frac{1}{2}h^2} = (1-\lambda')\Gamma + \lambda' M.$$

Es möchte nur noch zu bemerken sein, dass, sobald μ gemäss einer seiner Bestimmungsgleichungen aus den Werthen von n und p ausgerechnet ist, für V die Coefficienten $\theta, \varkappa, \lambda$ nach den Gleichungen (50) und (51), dann für Vx_1 die Coefficienten $\theta', \varkappa', \lambda'$ nach den Gleichungen (61) und (62) zu suchen und gehörigen Ortes einzustellen sind.

Beispiel. Der Querschnitt sei $Q = A + Bx + Cx^3$, also $n=1$, $p=3$, und im Ausdrucke von V soll G nicht vorkommen, dann ist nach (44) $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$, daher gemäss (53) $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und nach (54)

$$V = h\frac{(\sqrt{2}-1)g + M}{\sqrt{2}}.$$

Ferner ist

$$\varkappa' = \frac{2}{15}, \quad \lambda' = \frac{8\sqrt{2}}{15}, \quad \theta' = \frac{13-8\sqrt{2}}{15},$$

also

$$Vx_1 = \frac{h^2}{2} \cdot \frac{(13-8\sqrt{2})g + 2G + (8\sqrt{2})M}{15},$$

und dabei ist:

$$M = A + \frac{Bh}{\sqrt{2}} + \frac{Ch^3}{2\sqrt{2}}.$$

8.

B. Noch einfacher gestalten sich die Rechnungen und Ausdrücke, wenn man die **Standebene** $\mathfrak{E}$ **durch die Mitte der**

Höhe des Körpers legt, die Mittenebene sein lässt. Hier wird $a = -\frac{h}{2} = -k$ und $b = \frac{h}{2} = k$, wenn man in den Zwischenrechnungen die halbe Höhe h mit k bezeichnet; und am Auffallendsten werden die Vereinfachungen der Endergebnisse sich bewähren, wenn der Querschnitt Q des Körpers eine ganze rationale Function des Abstandes x ist. Zur rascheren Uebersicht scheiden wir in Q die Potenzen von x mit geraden Exponenten von jenen mit ungeraden Exponenten, indem wir setzen:

$$Q = \Sigma A_m x^{2m} + \Sigma B_n x^{2n+1}, \tag{74}$$

und hierin das Summenzeichen auf den schrittweisen Durchlauf von m und n durch die ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3,.... beziehen. Da ist denn, wie leicht zu sehen:

$$V = \int_{-k}^{k} Q dx = 2\Sigma \frac{A_m}{2m+1} k^{2m+1} = 2k\Sigma \frac{A_m k^{2m}}{2m+1},$$

und wenn ξ den Abstand des Schwerpunktes von der Ebene $\mathfrak{E}$ vorstellt, das Moment

$$V\xi = \int_{-k}^{k} Qx dx = 2\Sigma \frac{B_n}{2n+3} k^{2n+3} = 2k^2 \Sigma \frac{B_n k^{2n+1}}{2n+3},$$

oder wenn man durch $2k = h$ und $2k^2 = \frac{1}{2}h^2$ theilt:

$$\frac{V}{h} = \Sigma \frac{A_m k^{2m}}{2m+1} = A_0 + \tfrac{1}{3}A_1 k^2 + \tfrac{1}{5}A_2 k^4 + \ldots, \tag{75}$$

$$\frac{V\xi}{\frac{1}{2}h^2} = \Sigma \frac{B_n k^{2n+1}}{2n+3} = \tfrac{1}{3}B_0 k + \tfrac{1}{5}B_1 k^3 + \tfrac{1}{7}B_2 k^5 + \ldots, \tag{76}$$

woraus als bemerkenswerth erhellt, dass im Ausdrucke des Rauminhaltes V nur die Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ der geraden, und im Ausdrucke des Momentes Vx_1 blos die Coefficienten $B_0, B_1, B_2, \ldots$ der ungeraden Potenzen von x in Q vorkommen.

Dabei ist für $x = -k$ und $x = +k$:

$$g = \Sigma A_m k^{2m} - \Sigma B_n k^{2n+1}, \quad G = \Sigma A_m k^{2m} + \Sigma B_n k^{2n+1},$$

also

$$\Sigma A_m k^{2m} = \frac{G+g}{2}, \quad \Sigma B_n k^{2n+1} = \frac{G-g}{2}. \tag{77}$$

Denkt man sich noch in der Mitte zwischen den Grundebenen den Mittenschnitt M, so ist dafür $x = 0$, daher

$$A_0 = M.$$

Durch diese beiden Grundebenen g, G und den Mittenschnitt M könnte man drei der Coefficienten A und B bestimmen oder beziehungsweise aus den Ausdrücken von V und Vx_1 herausschaffen. Wären in Q noch mehr Coefficienten vorhanden, so würde man noch weitere Zwischenschnitte $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, ... in den Abständen $x = \mu k$, $\mu' k$, $\mu'' k$, ... $< k$ führen und durch sie noch eben so viel Coefficienten verdrängen.

Führt die Veränderliche x im Ausdrucke von Q nur gerade Exponenten, sind also alle Coefficienten B Null, so fallen jede zwei beiderseits der Mittenebene $\mathfrak{C}$ in gleichen Abständen geführte Querschnitte gleich aus, folglich ist auch

$$g = G = \Sigma A_m k^{2m},$$

ferner ist $V\xi = 0$, also auch $\xi = 0$.

9.

Betrachten wir einige besondere Fälle.

A. Ist Q zweigliedrig, und zwar

1) $$Q = A_0 + A_m x^{2m},$$

so ist

$$A_0 = M, \quad A_m k^{2m} = g - M \quad \text{und} \quad V = h\frac{g + 2mM}{1 + 2m}, \quad \xi = 0.$$

2) Ist $Q = A_0 + B_n x^{2n+1}$, so hat man:

$$A_0 = \frac{G + g}{2}, \quad B_n k^{2n+1} = \frac{G - g}{2},$$

daher

$$V = h\frac{G + g}{2}, \quad V\xi = \frac{h^2}{4}\frac{G - g}{2n + 3}, \quad \xi = \frac{h}{2(2n + 3)}\frac{G - g}{G + g}.$$

3) Ist $Q = A_m x^{2m} + B_n x^{2n+1}$ und dabei $m \overline{\gtrless} 1$, so ist

$$A_m k^{2m} = \frac{G + g}{2}, \quad B_n k^{2n+1} = \frac{G - g}{2},$$

daher

$$V = \frac{h}{2m + 1}\frac{G + g}{2}, \quad V\xi = \frac{h^2}{4}\frac{G - g}{2n + 3}, \quad \xi = \frac{2m + 1}{2n + 3}\frac{h}{2}\frac{G - g}{G + g}.$$

B. Ist Q dreigliedrig und zunächst

1) $$Q = A_0 + A_m x^{2m} + B_n x^{2n+1},$$

so ist:

$$A_0 + A_m k^{2m} = \frac{G+g}{2}, \quad B_n k^{2n+1} = \frac{G-g}{2}, \quad A_0 = M,$$

und danach

$$V = hM + \frac{h}{2m+1}\left(\frac{G+g}{2} - M\right) = h\frac{2mM + \frac{G+g}{2}}{2m+1},$$

$$V\xi = \frac{h^2}{2}\,\frac{G-g}{2(2n+3)}, \quad \xi = \frac{2m+1}{2n+3}\,\frac{h}{2}\,\frac{G-g}{G+g+4mM}.$$

Erstes Beispiel. Hierher gehört besonders der Fall, wo der Querschnitt durch ein vollständiges Trinom zweiten Grades ausgedrückt wird, nemlich $m=1$, $n=0$ und

(78) $$Q = A_0 + A_1 x^2 + B_0 x = A_0 + B_0 x + A_1 x^2$$

ist. Hierfür ist

(79) $$V = hM + \frac{h}{3}\left(\frac{G+g}{2} - M\right) = h\frac{G+g+4M}{6},$$

(80) $$V\xi = \frac{h^2}{4}\,\frac{G-g}{3}, \quad \xi = \frac{h}{2}\,\frac{G-g}{G+g+4M}.$$

Zweites Beispiel. Bleibt $m=1$ und wird $n=1$, sonach

$$Q = A_0 + A_1 x^2 + B_1 x^3,$$

so wird ebenfalls:

$$V = h\frac{G+g+4M}{6}, \quad V\xi = \frac{h^2}{4}\,\frac{G-g}{5}, \quad \xi = \frac{3}{10}h\frac{G-g}{G+g+4M}.$$

Bemerkung. Es fällt hier sogleich in die Augen, dass der Ausdruck des räumlichen Inhaltes V derselbe bleibt, wenn bei derselben Zahl m was immer für Glieder mit ungeraden Exponenten im Ausdrucke von Q stehen. So ist demnach auch für

$$Q = A_0 + A_m x^{2m} + \Sigma B_n x^{2n+1}$$
$$= A_0 + A_m x^{2m} + B_0 x + B_1 x^3 + B_2 x^5 + B_3 x^7 + \ldots.$$

des Körpers Inhalt:

$$V = hM + \frac{h}{2m+1}\left(\frac{G+g}{2} - M\right),$$

und insbesondere bei $m=1$ ist für

$$Q = A_0 + A_1 x^2 + B_0 x + B_1 x^3 + B_2 x^5 + B_3 x^7 + \ldots,$$

worin der Sonderfall

$$(81) \qquad Q = A_0 + A_1 x^2 + B_0 x + B_1 x^3$$
$$= A_0 + B_0 x + A_1 x^2 + B_1 x^3,$$

in welchem der Querschnitt durch ein vollständiges Quadrinom dritten Grades ausgedrückt wird, mit einbegriffen ist, wie oben des Körpers Inhalt:

$$(79) \qquad V = h\frac{G+g+4M}{6} = hM + \frac{h}{3}\left(\frac{G+g}{2} - M\right).$$

Sucht man zu solch einem Körper noch dessen statisches Moment, so ist für selbes nach (76):

$$\frac{V\xi}{\frac{1}{2}h^2} = \tfrac{1}{3}B_0 k + \tfrac{1}{5}B_1 k^3;$$

sonach benützt man einen Zwischenschnitt $\mathfrak{M}$ im Abstande $x = \mu k = \mu\frac{h}{2}$ von der Mittenebene $\mathfrak{E}$, nemlich

$$\mathfrak{M} = A_0 + \mu^2 A_1 k^2 + \mu B_0 k + \mu^3 B_1 k^3,$$

und findet nach den Gleichungen (77):

$$A_0 = M, \quad A_1 k^2 = \frac{G+g}{2} - M, \quad B_0 k + B_1 k^3 = \frac{G-g}{2},$$

und jetzt noch:

$$B_0 k + \mu^2 . B_1 k^3 = \frac{\mathfrak{M} - M}{\mu} - \mu\left(\frac{G+g}{2} - M\right).$$

Sucht man aus den beiden letzten Gleichungen die Ausdrücke von $B_0 k$ und $B_1 k^3$ und stellt sie in $\frac{V\xi}{\frac{1}{2}h^2}$ ein, so erhält man nach einigen leichten Umstaltungen:

$$(82) \qquad \frac{V\xi}{\frac{1}{2}h^2} = \frac{2}{15\mu}\left(\frac{\mathfrak{M}}{1-\mu^2} - M\right) + \frac{G}{6}\,\frac{\frac{3}{5}-\mu}{1-\mu} - \frac{g}{6}\,\frac{\frac{3}{5}+\mu}{1+\mu}.$$

Hier gewahrt man auf der Stelle, dass dieser Ausdruck sich um ein Glied verkürzt, wenn man μ entweder $=\frac{3}{5}$ oder $=-\frac{3}{5}$ wählt. Führt man nemlich im Abstande $x = \mu k = \frac{3}{5}k$ über der Mitten-

ebene $\mathfrak{E}$, also in der Entfernung $\frac{2}{5}k = \frac{h}{5}$ unterhalb der oberen Grundebene G den Zwischenschnitt, so ist selber

$$\mathfrak{M} = A_0 + A_1 (\tfrac{3}{5}k)^2 + B_0 . \tfrac{3}{5}k + B_1 (\tfrac{3}{5}k)^3,$$

und das Moment in Bezug auf die Mittenebene:

$$(83) \qquad V\xi = \frac{h^2}{2}\left(2\,\frac{\mathfrak{M}-M}{9} + \frac{\mathfrak{M}-g}{8}\right).$$

Führt man dagegen im Abstande $x = \mu k = -\frac{3}{5}k$ unter der Mitten ebene $\mathfrak{E}$, also in der Entfernung $\frac{2}{5}k = \frac{h}{5}$ oberhalb der unteren Grundebene g den Querschnitt, so ist derselbe

$$\mathfrak{M} = A_0 + A_1 (\tfrac{3}{5}k)^2 - B_0 (\tfrac{3}{5}k) - B_1 (\tfrac{3}{5}k)^3,$$

und das gesuchte Moment in Bezug auf die Mittenebene

$$(84) \qquad V\xi = \frac{h^2}{2}\left(2\,\frac{M-\mathfrak{M}}{9} + \frac{G-\mathfrak{M}}{8}\right).$$

10.

Nachdem wir bisher die Berechnungsweisen der Rauminhalte und statischen Momente bei den im Eingange beschriebenen Körpern sowohl allgemein, als auch insonderheit für solche Fälle, wo die wandelbaren Querschnitte derselben ganze rationale Functionen ihrer jedesmaligen Entfernungen von einer festen Parallelebene sind, auseinander gesetzt haben; wollen wir nun mancherlei Arten solcher Körper kennen lehren. Hierbei werden wir zur Abkürzung der Rede derlei Körper, jenachdem ihre Querschnitte algebraische Functionen ersten, zweiten, dritten, vierten .... Grades sind, Körper erster, zweiter, dritter, vierter, ... Ordnung nennen.

Von den Körpern, welche in der Elementar-Stereometrie betrachtet zu werden pflegen, sind die Pyramiden und Kegel, sowohl ganze, als abgestutzte, dann die Kugeln mit ihren Abschnitten und Parallel-Ausschnitten (Kugelplatten oder -scheiben), bekanntlich von der zweiten Ordnung; und die Prismen und Cylinder, deren Querschnitte überall dieselben, folglich vom nullten Grade sind, müssen sonach der nullten Ordnung beigezählt werden. Ein Paar Körper erster Ordnung haben wir im ersten Beispiele des 4. Artikels angeführt.

Betrachten wir daher gegenwärtig vor Allem die sehr gewöhnlichen

A. Körper zweiter Ordnung.

Ihre Querschnitte sind demnach in der Form

$$Q = A + Bx + Cx^2 = A_0 + A_1x^2 + B_0x$$

begriffen (Art. 6., Beisp. 4. und Art. 9., 1. Beisp. Form. (78)) und der Körperinhalt, so wie das statische Moment derselben wird nach den dortigen Formeln berechnet, von denen die folgenden:

$$(79) \qquad V = hM + \tfrac{1}{3}h\left(\frac{G+g}{2} - M\right) = h\frac{g+G+4M}{6};$$

$$(80) \quad \begin{cases} Vx_1 = \dfrac{h^2}{2}\dfrac{G+2M}{3}, & V\xi = \dfrac{h^2}{4}\dfrac{G-g}{3}; \\[2ex] x_1 = h\dfrac{G+2M}{G+g+4M}, & \xi = \dfrac{h}{2}\dfrac{G-g}{G+g+4M} \end{cases}$$

sehr fördersam sind. Hierher gehören zuvörderst

I. die Ellipsoide und Hyperboloide,

namentlich 1. das ganze von einer einzigen gewölbten Fläche umschlossene Ellipsoid, theils mit seinen Abschnitten (Segmenten), theils mit Parallel-Ausschnitten, deren Grundebenen zu einer Axe senkrecht sind; 2. das einmäntlige Hyperboloid in Verbindung mit einem Paar auf einer Axe senkrechter Begrenzungsebenen; 3. eine Abtheilung des zweimäntligen Hyperboloides mit einer solchen Grenzebene, oder eine Scheibe desselben zwischen zwei derlei Ebenen. Bekanntlich sind diese Flächen in der allgemeinen, auf ihren Mittelpunkt und ihre Axen bezieblichen Gleichung

$$\alpha\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \beta$$

enthalten, und zwar ist: beim Ellipsoid $\alpha = 1$, $\beta = 1$; beim einmäntligen Hyperboloid $\alpha = -1$, $\beta = 1$; beim zweimäntligen $\alpha = -1$, $\beta = -1$. Daraus folgt:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \beta - \alpha\frac{x^2}{a^2}$$

zum Beweis, dass jede zur x-Axe senkrechte Ebene jegliche solche Fläche in einer Ellipse schneidet, die sonach auch der der Abscisse x entsprechende Querschnitt Q ist. Seine der $z = 0$ zu-

ständige Halbaxe ist $y_0 = b\sqrt{\beta - \alpha\frac{x^2}{a^2}}$, die der $y=0$ zugehörige dagegen $z_0 = c\sqrt{\beta - \alpha\frac{x^2}{a^2}}$, mithin der elliptische Querschnitt:

$$Q = \pi y_0 z_0 = \pi bc(\beta - \alpha\frac{x^2}{a^2}).$$

Sonach können alle derartige Körper, als der zweiten Ordnung angehörig, so wie auch insbesondere die Umdrehungskörper ihrer Art nach obigen Formeln berechnet werden, was wir hier jedoch nur andeuten wollen.

11.

II. Koppe's Obelisken.

Von den eckigen Körpern gehören hierher die von Koppe (nach Beuth) so genannten Obelisken, ein höchst bemerkenswerthes Geschlecht häufig vorkommender Körper. Ein Obelisk wird von zwei parallelen Vielecken und einer Reihe an einander hängender Trapeze begrenzt, von denen ausnahmsweise einzelne wohl auch Parallelogramme oder Dreiecke sein können. Die Querschnitte desselben haben ihre in einerlei Seitenebene gelegenen Grundkanten parallel, also ihre Winkel mit den parallel gestellten Winkeln der Grundebenen gleich. Hier mag es genügen, zu zeigen, dass jeder Obelisk ein Körper zweiter Ordnung ist, da wir wegen des Weiteren und Einzelnen auf die in der Einleitung genannten Abhandlungen und Lehrbücher verweisen müssen.

Seien nun A, B irgend ein Paar Strecken (Seiten, Diagonalen, Höhen u. dgl.) der einen Grundebene G eines Obelisken und α der Winkel beider, so wird der Flächeninhalt dieses Vieleckes aus lauter Producten von der Form $AB\mathrm{f}(\alpha)$ zusammengesetzt, wenn $\mathrm{f}(\alpha)$ eine gewisse vom Winkel α abhängige Function, bald 1, bald $\frac{1}{2}$, bald $\sin\alpha$ oder $\frac{1}{2}\sin\alpha$ vorstellt. Daher kann man

$$G = S.AB\mathrm{f}(\alpha)$$

setzen, wofern man das Summenzeichen S auf die Zusammenfassung aller nöthigen ähnlich gebildeten solchen Producte hinweisen denkt. Eben so seien a, b das Paar der A, B parallelen oder gleichlägigen Strecken der anderen Grundebene g, ihr Winkel also gleichfalls α, folglich das dem Producte $AB\mathrm{f}(\alpha)$ entsprechende Product $= ab\mathrm{f}(\alpha)$, und sohin

$$g = S.ab\mathrm{f}(\alpha).$$

Endlich sei x der Abstand eines Querschnittes Q von der Grundebene g und seine zu den vorigen parallel laufenden Strecken a', b', so wie h die Höhe des Obelisken, so findet man, weil einerseits die Parallelstrecken A, a', a und andererseits die Parallelstrecken B, b', b je zwischen einem Paar Kanten (Geraden) liegen, leicht die Proportionen:

$$\frac{a'-a}{A-a}=\frac{b'-b}{B-b}=\frac{x}{h},$$

also

$$a'=a+\frac{A-a}{h}x,\quad b'=b+\frac{B-b}{h}x.$$

Weil auch a' und b' mitsammen den Winkel α bilden, ist des Querschnittes Flächeninhalt

$$Q'=S.a'b'\mathfrak{f}(\alpha),$$

folglich wenn man a', b' ersetzt:

$$Q=S.(a+\frac{A-a}{h}x)(b+\frac{B-b}{h}x)\mathfrak{f}(\alpha) \tag{85}$$

$$=S.ab\mathfrak{f}(\alpha)+\frac{x}{h}S.(aB+Ab-2ab)\mathfrak{f}(\alpha)+\frac{x^2}{h^2}S.(A-a)(B-b)\mathfrak{f}(\alpha),$$

woraus erhellt, dass der allgemeine Ausdruck des Querschnittes Q jedes Obelisken vom zweiten Grade, jedweder Obelisk also ein Körper zweiter Ordnung ist und sohin nach obigen Formen berechnet werden kann.

Für $x=\frac{h}{2}$ erhält man den Mittenschnitt

$$M=S.\frac{A+a}{2}\cdot\frac{B+b}{2}\mathfrak{f}(\alpha),$$

daher, wenn man den vorkommenden Unterschied

$$\frac{G+g}{2}-M=E$$

stellt, ist

$$E=S\frac{2AB+2ab-(A+a)(B+b)}{2.2}\mathfrak{f}(\alpha)$$

$$=S.\frac{A-a}{2}\cdot\frac{B-b}{2}\mathfrak{f}(\alpha).$$

Jener Mittenschnitt und dieser (von Koppe die Ergänzungsfigur genannte) Unterschied E sind also mit den Grundebenen G, g gleichwinkelig, jener hat überall die halbe Summe (das

arithmetische Mittel), diese den halben Unterschied der parallelen Seiten zur entsprechenden Seite. Danach ist (nach Art. 10.) des Obelisken Körperinhalt:

$$(86)\quad V = hM + \tfrac{1}{3}hE = \frac{h}{6}S\,[A(2B+b) + a(B+2b)]\,\mathfrak{f}(\alpha),$$

und seine statischen Momente sind:

$$(87)\quad Vx_1 = \frac{h^2}{4}S\frac{2AB + (A+a)(B+b)}{3}\mathfrak{f}(\alpha),$$

$$(88)\quad V\xi = \frac{h^2}{4}S\frac{AB - ab}{3}\mathfrak{f}(\alpha).$$

12.

III. Mascheroni's Obelisken mit Einer windschiefen Seitenfläche.

Die von Mascheroni in seinen „Problemi di geometria" angegebenen und von Herrn Professor Grunert (a. a. O.) erforschten interessanten Körper sind vornehmlich deshalb bemerkenswerth, weil sie von den Obelisken Koppe's blos in Einer Seitenfläche sich unterscheiden, indem an die Stelle eines Seitentrapezes Eine windschiefe Fläche — ein windschiefes Viereck — eintritt, deren beschreibende Strecke zu den Grundebenen durchweg parallel bleibt. Lässt man nemlich bei einem schon fertigen Obelisken (Taf. I. Fig. 6.) an einem Seitentrapez (-Parallelogramm oder -Dreieck) $DEed$, bei welchem die Seiten Dd, Ee in einer Ebene liegen, dieselben Seiten in gekreuzte (in keiner Ebene enthaltene) sich verwechseln, indem man eine Spitze d auf der cd nach d' vor- oder nach d'' zurückschiebt, wonach $d'e$ oder $d''e$ mit DE, und Dd' oder Dd'' mit Ee sich kreuzt; so kann in dem unebenen Viereck $DEed'$ oder $DEed''$ eine windschiefe Fläche beschrieben werden, deren „leitende Geraden" Ee mit Dd' oder Dd'' und deren „Parallelebene" jede der beiden Grundebenen ist.

Auch bei diesen Mascheroni'schen Obelisken sind die Grundebenen g, G und die Querschnitte Q Vielecke, deren nach einander folgenden Seitenpaare, bis auf eines (das letzte) parallel sind, und welche sohin auch alle Zwischenwinkel, bis auf die beiden an diesen letzten gekreuzten Seiten liegenden Winkel, parallel gestellt, also gleich haben. Nun ist aber ein Vieleck, also auch sein Flächeninhalt, vollständig bestimmt, wenn alle seine Seiten,

bis auf eine, und alle seine Winkel, bis auf die zwei an dieser einen Seite liegenden gegeben sind. Mithin können bei diesen Angaben die Grundebenen g, G und der Mittenschnitt, daher auch Rauminhalt und Moment der Obelisken Mascheroni's ganz genau nach denselben Formeln, wie bei Koppe's Obelisken berechnet werden.

Z. B. Sind (wie im Archiv. Thl. XXXI. S. 484) die Grundebenen eines solchen Obelisken vierseitig, $A \parallel a$, $B \parallel b$, $C \parallel c$ ihre drei parallelen Seitenpaare mit den äusseren Zwischenwinkeln $\hat{A}.\hat{B} \# \hat{a}.\hat{b} = \alpha$, $\hat{B}.\hat{C} \# \hat{b}.\hat{c} = \beta$ und $\hat{A}.\hat{C} \# \hat{a}.\hat{c} = \gamma = \alpha + \beta$, so ist hier nach einem bekannten trigonometrischen Lehrsatze $f(\alpha) = \frac{1}{2}\sin\alpha$ zu setzen, folglich erhält man (nach Art. 11. Gl. 86. und Gl. 88.) für V und $V\xi$ die Ausdrücke:

$$(89)\quad \frac{V}{\frac{1}{12}h} = [A(2B+b)+a(2b+B)]\sin\alpha + [B(2C+c)+b(2c+C)]\sin\beta$$
$$+[C(2A+a)+c(2a+A)]\sin\gamma,$$

$$(90)\quad \frac{V}{\frac{1}{4}h} = (A\frac{2B+b}{3}+a\frac{2b+B}{3})\sin\alpha + (B\frac{2C+c}{3}+b\frac{2c+C}{3})\sin\beta$$
$$+(C\frac{2A+a}{3}+c\frac{2a+A}{3})\sin\gamma,$$

$$(91)\quad \frac{V\xi}{\frac{1}{24}h^2} = (AB-ab)\sin\alpha + (BC-bc)\sin\beta + (AC-ac)\sin\gamma,$$

und zwar ersterer Ausdruck mit dem am angeführten Orte von Herrn Professor Grunert gefundenen im Wesentlichen übereinstimmend.

Bemerkung. Auffallend ist hierbei die Wahrnehmung, dass ein Mascheroni'scher Obelisk, der sich von einem Koppe'schen nur in einer einzigen windschiefen Seitenebene unterscheiden soll, aus diesem keineswegs durch parallele Verschiebung des einen Grundvieleckes in seiner Ebene entstehen kann, weil hierbei fortwährend alle Seitenflächen eben bleiben müssen, also keine windschief werden kann.

13.

IV. Verschobene Obelisken. (Pilaster.).

Bei näherer Erforschung dieser Obelisken Mascheroni's gerieth ich (am 7. Febr. d. J. 1859) auf den Einfall, bei einem solchen Körper anstatt blos eines Paares Seitenkanten jedes

Paar Seitenkanten sich kreuzen zu lassen und in das entstehende unebene Seitenviereck eine windschiefe Fläche einzulegen, so dass ein derartiger Körper von zwei parallelen und gleichvielseitigen (Grund-) Vielecken und von lauter dazwischen liegenden unebenen und windschiefen (Seiten-) Vierecken, also von so vielen, als jedes Grundvieleck Seiten hat, eingeschlossen würde. Es würde dann nur eine Abart dieser Körper entstehen, wenn eine oder etliche Seitenflächen eben (also zu Trapezen, Parallelogrammen oder Dreiecken) würden; und sonach wären die Obelisken Mascheroni's und Koppe's nur ganz besondere Spielarten dieser Körpergattung. Vor Allem aber werden wir die Möglichkeit oder Darstellbarkeit solcher Körper darzuthun haben.

Ich denke mir hierzu ein ebenes Vieleck, z. B. (Taf. I. Fig. 7.) das Fünfeck $ABCDE$, und in einem gewissen Abstande davon eine vorläufig unbegrenzte Ebene 𝔓 dazu parallel. Aus der Spitze A führe ich zur 𝔓 hin willkürlich die Gerade Aa, durch sie und AB lege ich ihre Ebene und führe aus B, der nächsten Vieleckspitze, die ausser diese Ebene fallende Gerade Bb, deren Endpunkt b ich mit a durch die ab verbinde; dann kreuzt sich Bb mit Aa und ab mit AB, und, indem ich letztere zwei als Grundkanten, erstere zwei aber als Seitenkanten betrachte, denke ich mir in dieses unebene Viereck $AabB$ seine windschiefe Fläche auf die Parallelebene ABD bezogen eingetragen. Auf gleiche Weise bestimme ich zur Grundkante BC und zur Seitenkante Bb das unebene windschiefe Viereck $BbcC$, und eben so zur Grundkante CD und zur Seitenkante Cc das unebene windschiefe Viereck $CcdD$, bis ich an die letzte Vieleckspitze E gelangt bin, deren Seitenkante ich wie folgt feststelle. Ich lege die Ebenen EDd und EAa, welche sich nothwendig in einer durch E gehenden Geraden schneiden; und nun führe ich aus E eine von dieser Durchschnittslinie verschiedene und auch in keiner dieser beiden Ebenen liegende Gerade Ee hin zur Ebene 𝔓, welche demnach sowohl mit der Dd, als auch mit der Aa sich kreuzen muss und sofort die letzte Seitenkante sein wird, zu deren Endpunkt e noch die Grundkanten de und ae gezogen werden, um das zweite Grundvieleck $abcde$ abzuschliessen, während die beiden letzten unebenen Vierecke $DdeE$ und $AaeE$ mit ihren windschiefen Flächen ausgefüllt werden, um die seitliche Umhüllungsfläche des Körpers abzuschliessen.

Diese allgemeine Körpergestalt besitzt nun die für's Folgende beachtenswerthe Eigenschaft, dass, gleichwie die Pyramidenstumpfe, welche auch (vielleicht als ganz absonderliche Spielart) in diese Gattung Körper gehören, mittels diagonaler ebener Flächen

in lauter dreiseitige Pyramidenstumpfe zerlegt werden, auch diese Körper durch diagonale windschiefe oder ausnahmsweis ebene Flächen in lauter dreiseitige eben solche Körper zerschnitten werden können, und dass sonach blos diese letzteren einfacheren Körper bezüglich des Rauminhaltes und Schwermomentes zu erforschen bleiben. Deshalb möchte ich wohl sie verschobene Spitzsäulenrumpfe (Pyramidenstumpfe) nennen, allein weil bei solchen Stumpfen die der Spitze näher gelegene Grundebene durchaus ihre Seiten kleiner hat, als die zu ihnen parallelen der entfernteren Grundebene, was hingegen bei Obelisken keineswegs nothwendig ist, so ist es gewiss angemessener, derlei Körper verschobene, windschiefe oder windschelche Obelisken oder vielleicht besser kurzweg Pilaster *) zu nennen.

14.

Suchen wir nun den Ausdruck des (Taf. I. Fig. 8.) im Abstande x von der Grundebene $g = \Delta abc$ geführten Querschnittes $Q = \Delta DEF$.

Hierzu legen wir in der Ebene abc wo immer ein Paar winkelrechter Coordinatenaxen Oy, Oz und darauf senkrecht die dritte solche Axe Ox, und suchen danach die Einschnitte D, E, F der im willkürlichen Abstande x zur Ebene yz parallel geführten Ebene in die Seitenkanten aA, bB, cC. Seien von a die Coordinaten $0, \eta, \zeta$, von b: $0, \eta', \zeta'$, von c: $0, \eta'', \zeta''$, ferner die Richtcosinus der Kante aA, d. i. die Cosinus der von der positiven Richtung dieser Geraden mit den positiven Richtungen der Coordinatenaxen gebildeten drei Richtwinkel proportional zu $1, b, c$, so gehören zur aA die Gleichungen:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-\eta}{b} = \frac{z-\zeta}{c},$$

mithin sind die Coordinaten des Einschnittes D:

$$x = x, \quad y = \eta + bx, \quad z = \zeta + cx.$$

Mit ähnlichen Bedeutungen der accentuirten Buchstaben sind für den Einschnitt E die Coordinaten:

$$x' = x, \quad y' = \eta' + b'x, \quad z' = \zeta' + c'x,$$

und für den Einschnitt F:

---

*) Le pilastre, Wandpfeiler, viereckiger Pfeiler, il pilastro, ein Pfeiler, worauf Bogen ruhen. (Jagemann.)

$$x''=x, \quad y''=\eta''+b''x, \quad z''=\zeta''+c''x.$$

Denkt man sich (Taf. I. Fig. 9.) das Dreieck DEF in die yz-Ebene nach def und dieses auf die y-Axe nach $d_1e_1f_1$ projicirt, so ist

$$Od_1=y, \quad Oe_1=y', \quad Of_1=y'';$$
$$d_1d=z, \quad e_1e=z', \quad f_1f=z''$$

und

$$\Delta def=e_1d_1de+d_1f_1fd-e_1f_1fe$$
$$=\frac{e_1e+d_1d}{2}.e_1d_1+\frac{d_1d+f_1f}{2}d_1f_1-\frac{e_1e+f_1f}{2}e_1f_1,$$

also

$$2\Delta def=d_1d(e_1d_1+d_1f_1)+e_1e(e_1d_1-e_1f_1)+f_1f(d_1f_1-e_1f_1),$$

sohin mit Beachtung des Anfangs- und Endpunktes, folglich auch der Richtung, der Projectionen d_1e_1, e_1f_1, f_1d_1 der Dreiecksseiten de, ef, fd, auch

$$2\Delta def=d_1d.e_1f_1+e_1e.f_1d_1+f_1f.d_1e_1.$$

Da nun das Δdef dem projicirten $\Delta DEF=Q$ parallel, also congruent ist, so hat man auch für den Querschnitt Q:

$$(92) \qquad 2Q=z(y''-y')+z'(y-y'')+z''(y'-y)$$
$$=y(z'-z'')+y'(z''-z)+y''(z-z').$$

Trägt man hierin die obigen Ausdrücke der y und z durch x ein, so wird:

$$2Q=[\eta''-\eta'+(b''-b')x](\zeta+cx)+[\eta-\eta''+(b-b'')x](\zeta'+c'x)$$
$$+[\eta'-\eta+(b'-b)x](\zeta''+c''x),$$

also, wenn man die Multiplicationen verrichtet und abkürzend setzt:

$$(93) \qquad \zeta(\eta''-\eta')+\zeta'(\eta-\eta'')+\zeta''(\eta'-\eta)=2A,$$
$$c(\eta''-\eta')+c'(\eta-\eta'')+c''(\eta'-\eta)$$
$$+\zeta(b''-b')+\zeta'(b-b'')+\zeta''(b'-b)=2B,$$
$$c(b''-b')+c'(b-b'')+c''(b'-b)=2C,$$

wird der wandelbare Querschnitt

$$(94) \qquad Q=A+Bx+Cx^2$$

im Allgemeinen ein Ausdruck zweiten Grades in x, ja aus-

nahmsweise auch blos ersten Grades, wenn die Seitenkanten so gerichtet sind, dass $C=0$, also

$$c(b''-b')+c'(b-b'')+c''(b'-b)=0$$

ausfällt.

Bei mehrkantigen Pilastern gilt ein Gleiches. Denn denkt man sich einen solchen durch diagonale windschiefe Flächen oder hie und da ausnahmsweis durch eine Diagonalebene in lauter dreiseitige Pilaster zerschnitten, so sind die einzelnen dreieckigen Querschnitte derselben vom zweiten Grade, also muss es auch ihre Summe, d. i. der Querschnitt Q des ganzen mehrseitigen Pilasters, selbst sein.

Bei jedem Pilaster oder verschobenen Obelisken mit lauter oder wenigstens mit einigen windschiefen Seitenvierecken ist demnach so, wie bei den Obelisken Mascheroni's und Koppe's, der veränderliche Querschnitt eine algebraische Function zweiten Grades von der Entfernung desselben von der einen Grundebene, folglich auch von jeder anderen zu ihr parallelen Standebene; mithin gelten auch für sie alle die, durch die Formeln in Art. 6. Beisp. 4. oder in Art. 10. geleiteten Berechnungen ihrer Rauminhalte und Schwermomente.

15.

B. Körper beliebiger Ordnungen.

V. Gewundene Obelisken, krummkantige Pilaster.

Der im vorigen Artikel gefundene einfache Ausdruck 92) des dreieckigen Querschnittes in einem dreikantigen Pilaster lässt uns leicht erkennen, dass wir in der Verallgemeinerung der zu erforschenden Körperform noch einen bedeutenden Schritt weiter vorwärts thun können.

Wir dürfen nemlich die geraden Seitenkanten des Pilasters, z. B. die aA, bB, cC, dD und eE in Taf. I. Fig. 7. oder Fig. 8. entweder allesammt oder zum Theil durch einfach oder doppelt gekrummte Linien von gewissen, sogleich näher zu beschreibenden Eigenschaften ersetzen und selbe wie früher zu leitenden Linien einer eine windschiefe Fläche erzeugenden Geraden, die zu einer festgesetzten Parallelebene fortwährend parallel bleibt, wählen; wonach dann, wenn wir diese krummen Kanten durch ein Paar zur selben Ebene parallele Ebenen durchschneiden, ein

Körper zwischen zwei in parallelen Ebenen befindlichen gleichvielseitigen Vielecken und eben so vielen windschiefen Seitenflächen hervorgebracht wird. Sie dürften füglich **gewundene** oder verzogene **Obelisken** oder auch **krummkantige Pilaster** genannt werden.

Sind beziehlich eines rechtwinkligen Coordinatensystems x, y, z, deren yz-Ebene in der Grundebene abc eines dreikantigen Pilasters $aAbBcC$ (Taf. I. Fig. 10.) liegt, die Gleichungen der krummen Kante aA gegeben, so können sie in der Regel auf die Form

$$(95) \qquad y = \mathrm{f}(x), \quad z = \mathrm{F}(x)$$

gebracht werden, in welcher sie die Coordinaten x, y, z des Einschnittes D der, im Abstande x gelegten Querschnittsebene in dieselbe Kante unmittelbar angeben. Eben so findet man aus den Gleichungen der Kante bB für ihren Einschnitt E die Gleichungen

$$(96) \qquad y' = \mathrm{f}'(x), \quad z' = \mathrm{F}'(x),$$

und aus den Gleichungen der Kante cC für deren Einschnitt F die Gleichungen:

$$(97) \qquad y'' = \mathrm{f}''(x), \quad z'' = \mathrm{F}''(x).$$

Dann werden in dem für den Flächeninhalt Q des dreieckigen Querschnittes DEF oben aufgestellten Ausdruck

$$(92) \qquad 2Q = z(y''-y') + z'(y-y'') + z''(y'-y)$$

die Coordinaten y, y', y'' und z, z', z'' Functionen der Entfernung x und sonach der Querschnitt Q bestimmt erscheinen.

16.

Es wirft sich nun hier die interessante Frage auf, wie die Gleichungen (95), (96), (97) der Seitenkanten aA, bB, cC beschaffen sein müssen, damit der Querschnitt Q von x erstlich überhaupt eine **ganze rationale** Function und dann insbesondere von einem gewissen **Grade**, vorzüglich vom **ersten**, **zweiten** oder **dritten** werde.

Um die Beantwortung derselben vorzubereiten, stellen wir im letzten Ausdrucke $y''-y' = (y''-y)-(y'-y)$ und erhalten sofort für Q den interessanten Ausdruck:

$$(98) \qquad 2Q = (y'-y)(z''-z) - (y''-y)(z'-z).$$

Noch setzen wir zur Abkürzung die als von x abhängig anzusehenden Unterschiede:

(99) $$y' - y = u, \quad z' - z = v,$$
$$y'' - y = u', \quad z'' - z = v',$$

und finden den äusserst einfachen Ausdruck

(100) $$2Q = uv' - u'v,$$

demgemäss es nur von den vier Unterschieden u, u', v, v' abhängen wird, ob Q ganz und rational ausfallen werde. Sonach sind hiebei y und z gänzlich beliebige Functionen oder die Gleichungen (95) der Kante aA frei wählbar, dagegen aber die Gleichungen (96) der bB: $y' = y + u$, $z' = z + v$,
und die (97) der cC: $y'' = y + u'$, $z'' = z + v'$.

Hieraus leuchtet zugleich die merkwürdige Eigenschaft der Pilaster ein, dass jede zwei zwischen einerlei Grundebenen enthaltenen Pilaster, für welche die Unterschiede u, u', v, v' die nemlichen Functionen von x sind, **gleiche Rauminhalte** und **Schwermomente** besitzen.

I. Der Querschnitt Q wird offenbar eine **ganze rationale** Function von x, wenn die vier Unterschiede u, u', v, v' allesammt schon ganz und rational sind. Ist dann n der höchste Exponent oder die Summe der höchsten Exponenten beider Factoren in einem oder in den zwei ebenfalls ganzen und rationalen Producten uv', $u'v$, so ist Q höchstens vom $n$ten Grade.

a. So kann Q von keinem höheren, als dem **zweiten Grade** sich ergeben, wenn u, u', v, v' nicht über den ersten Grad hinausreichen. Setzen wir demnach:

(101) $$u = a + \alpha x, \quad v = b + \beta x,$$
$$u' = a' + \alpha' x, \quad v' = b' + \beta' x;$$

so erfolgt:

(102) $$2Q = (ab' - a'b) + (\alpha\beta' - a'\beta + \alpha b' - \alpha' b)x + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)x^2,$$

und Q ist in der Regel vom **zweiten** Grade, und blos dazumal vom **ersten**, wenn $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$, also entweder $\alpha' : \alpha = \beta' : \beta$ sich verhält oder wenn in jedem der Producte $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$ ein Factor verschwindet.

Insbesondere wenn man y und z **linear** nimmt, erhält man lauter **gerade** (überhaupt paarweis gekreuzte) Seitenkanten, folglich (wie im 12. Art.) **gewöhnliche** Pilaster. Setzt man aber

$$y = \sqrt{A_0 + A_1 x + A_2 x^2}, \quad z = \sqrt{B_0 + B_1 x + B_2 x^2},$$

so sind alle drei Seitenkanten **krumme** Linien, deren Projectionen in die Ebenen xy und xz Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln sind.

b. Höchstens vom dritten Grade wird Q werden, wenn man in den Producten uv', $u'v$ den einen Factor vom dritten Grade, den anderen beständig, oder einen Factor vom zweiten, den anderen vom ersten Grade nimmt. Beispielsweise kann man wählen:

$$(103)\qquad u = A + ax + \alpha x^2,\quad v = B + bx + \beta x^2,$$
$$u' = a' + \alpha' x,\qquad v' = b' + \beta' x.$$

II. Der Querschnitt Q kann aber auch ganz und rational ausfallen, obschon u, u', v, v' **irrational** sind, und zwar zuvörderst da, wo die Producte uv', $u'v$ einzeln rational sich ergeben. So kann man setzen:

$$(164)\qquad u = p + \sqrt{P},\quad v = t(r - \sqrt{R}),$$
$$u' = r + \sqrt{R},\quad v' = s(p - \sqrt{P}),$$

wo p, P, r, R, s, t ganze rationale Functionen von x bedeuten, weil da

$$uv' = s(p^2 - P),\quad u'v = t(r^2 - R)$$

für sich schon rational ausfallen, also

$$(105)\qquad 2Q = (p^2 - P)s - (r^2 - R)t$$

sicher rational sich darstellt.

III. Dieselbe Rationalität von Q wird auch noch eintreten, wenn zwar die Producte uv', $u'v$ irrational werden, in den irrationalen Gliedern aber ganz übereinstimmen, weil diese sodann im Unterschiede der Producte wegfallen. So können gesetzt werden:

$$(106)\qquad u = n\sqrt{N} + p\sqrt{P},\quad v = q\sqrt{N} + r\sqrt{P},$$
$$u' = n'\sqrt{N} + p'\sqrt{P},\quad v' = q'\sqrt{N} + r'\sqrt{P},$$

wo hinter den Gleichheitszeichen alle Buchstaben rationale Functionen von x vorstellen. Ist nun der, in der Entwickelung von $uv' - u'v$ zur $\sqrt{NP}$ gehörige Multiplicator

$$nr' - n'r + pq' - p'q = 0,$$

was durch sehr vielerlei Annahmen geleistet werden kann, so ist

$$(107)\qquad 2Q = (nq' - n'q)N + (pr' - p'r)P$$

ebenfalls eine ganze rationale Function des x.

Auch kann man setzen:

$$(107)\quad u=n\sqrt{N}+p\sqrt{P}+r\sqrt{R},\quad u'=n'\sqrt{N}+p'\sqrt{P}+r'\sqrt{R'},$$
$$v'=n\sqrt{N}+p\sqrt{P}-r\sqrt{R},\quad v=n'\sqrt{N}+p'\sqrt{P}-r'\sqrt{R'},$$

wo wieder alle Buchstaben hinter den Gleichheitszeichen ganze rationale Functionen von x anzeigen. Wenn dann in der Entwickelung von $uv'-u'v$ der zur $\sqrt{NP}$ gehörige Multiplicator

$$np-n'p'=0$$

ist, so wird

$$(108)\quad 2Q=(n^2-n'^2)N+(p^2-p'^2)P-(r^2R-r'^2R')$$

abermals eine ganze rationale Function von x.

17.

Um hierüber **Beispiele** zu geben, schneiden wir eine Fläche, deren Gleichung

$$(109)\quad Ay^2+2Byz+Cz^2=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots=X$$

ist, zuerst durch die xy-Ebene, wo $z=0$, so erhalten wir:

$$(110)\qquad y=+\sqrt{\frac{X}{A}},\quad z=0$$

als Gleichungen einer Kante aA eines Pilasters. Darnach schneiden wir sie durch eine zur yz-Ebene senkrechte und gegen die xy-Ebene unter dem Winkel $=\text{ang}(\text{tang}=m)$ geneigte Ebene $z=my$, und erhalten, wofern wir abkürzend $A+2Bm+Cm^2=D$ setzen, für die zweite Kante bB die Gleichungen:

$$(111)\qquad y'=+\sqrt{\frac{X}{D}},\quad z'=my'=+m\sqrt{\frac{X}{D}}.$$

Schneiden wir dann noch diese Fläche (109) mittels einer anderen, zur yz-Ebene senkrechten, unter dem Winkel $=\text{ang}(\text{tang}=m')$ gegen die xy-Ebene geneigten Ebene $z=m'y$, und setzen gleichfalls $A+2Bm'+Cm'^2=D'$, so erhalten wir für eine dritte Kante cC die Gleichungen:

$$(112)\qquad y''=+\sqrt{\frac{X}{D'}},\quad z''=my''=+m'\sqrt{\frac{X}{D'}}.$$

Für den dreieckigen Querschnitt Q_1 dieses dreikantigen Pilasters haben wir daher nach (99):

(113) $$u = \left(\frac{1}{\sqrt{D}} - \frac{1}{\sqrt{A}}\right)\sqrt{X}, \quad v = m\sqrt{\frac{X}{D}},$$

$$u' = \left(\frac{1}{\sqrt{D'}} - \frac{1}{\sqrt{A}}\right)\sqrt{X}, \quad v' = m'\sqrt{\frac{X}{D'}};$$

folglich:

(114)

$$2Q_1 = \left[\frac{m'}{\sqrt{D'}}\left(\frac{1}{\sqrt{D}} - \frac{1}{\sqrt{A}}\right) - \frac{m}{\sqrt{D}}\left(\frac{1}{\sqrt{D'}} - \frac{1}{\sqrt{A}}\right)\right] X.$$

Nimmt man dazu noch als die vierte Kante dD den Einschnitt $z=0$, $y=-\sqrt{\frac{X}{A}}$ der xy-Ebene in die angeführte Fläche, so ist der dreieckige Querschnitt Q_2 zwischen den Kanten bB, cC und dD offenbar zu finden, wenn man in Q_1 die Zeichen der Tangenten m, m' und $\sqrt{A}$ entgegengesetzt nimmt, nemlich es wird:

(115)

$$2Q_2 = \left[\frac{-m'}{\sqrt{D'}}\left(\frac{1}{\sqrt{D}} + \frac{1}{\sqrt{A}}\right) + \frac{m}{\sqrt{D}}\left(\frac{1}{\sqrt{D'}} + \frac{1}{\sqrt{A}}\right)\right] X,$$

daher der ganze viereckige Querschnitt Q zwischen allen vier Seitenkanten $Q = Q_1 + Q_2$:

(116) $$Q = \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{m}{\sqrt{D}} - \frac{m'}{\sqrt{D'}}\right) X.$$

Stellt man $m' = -m$ und noch $B = 0$, also $D' = D = A + Cm^2$, so wird

(117) $$Q = \frac{2}{\sqrt{A}} \cdot \frac{m}{\sqrt{A + Cm^2}} \cdot X$$

jedenfalls eine ganze rationale Function des x vom selben Grade wie X.

Für die Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichung

(118) $$\frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = \alpha + \beta x + \gamma x^2 = X$$

ist, hat man $A = \frac{1}{b^2}$, $B = 0$, $C = \frac{1}{\pm c^2}$, folglich nach (117) den Querschnitt im vierkantigen Pilaster:

(119) $$Q = \frac{2b^2cm}{\sqrt{\pm m^2b^2 + c^2}}(\alpha + \beta x + \gamma x^2),$$

weshalb die Formeln aus Art. 10. hier anwendbar sind. Nehmen wir die fünferlei Flächen zweiter Ordnung einzeln in Betracht.

1. Im Ellipsoid

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2},$$

wenn es durch die Ebenen $x=0$ und $x=h$ geschnitten wird, hat man für einen solchen Pilaster mit vier elliptischen Seitenkanten:

$$\frac{2b^2cm}{\sqrt{m^2b^2+c^2}}=\frac{Q}{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{g}{1}=\frac{G}{1-\frac{h^2}{a^2}}=\frac{M}{1-\frac{1}{4}\frac{h^2}{a^2}}=\frac{V}{h(1-\frac{1}{3}\frac{h^2}{a^2})}$$

$$=\frac{Vx_1}{\frac{h^2}{2}(1-\frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2})},$$

also ist sein Körperinhalt:

$$V=\frac{2b^2cm}{\sqrt{m^2b^2+c^2}}h(1-\tfrac{1}{3}\frac{h^2}{a^2}) \text{ und der Abstand } x_1=\tfrac{3}{4}h\frac{2a^2-h^2}{3a^2-h^2}.$$

Liegen die zwei Flügel-Seitenkanten in der Ebene xz, wofür $\frac{1}{m}=0$ ist, so wird:

$$V=2bch(1-\tfrac{1}{3}\frac{h^2}{a^2}) \text{ und für } h=a \text{ insbesondere } V=\tfrac{4}{3}abc \text{ und } x_1=\tfrac{3}{8}a.$$

2. Im einmänteligen Hyperboloid

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{x^2}{a^2},$$

das durch die Ebenen $x=0$ und $x=h$ geschnitten wird, findet sich für einen derartigen Pilaster mit vier hyperbolischen Seitenkanten:

$$\frac{2b^2cm}{\sqrt{m^2b^2+c^2}}=\frac{Q}{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{g}{1}=\frac{G}{1+\frac{h^2}{a^2}}=\frac{M}{1+\frac{1}{4}\frac{h^2}{a^2}}=\frac{V}{h(1+\frac{1}{3}\frac{h^2}{a^2})}$$

$$=\frac{Vx_1}{\frac{h^2}{2}(1+\frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2})},$$

daher ist sein Körperinhalt:

$V = \frac{2b^2cm}{\sqrt{m^2b^2+c^2}} h(1+\tfrac{1}{3}\frac{h^2}{a^2})$ und die Entfernung $x_1 = \tfrac{3}{4}h\frac{2a^2+h^2}{3a^2+h^2}$.

Fallen die beiden Flügel-Seitenkanten in die Ebene xz, wofür $\frac{1}{m}=0$ ist, so wird:

$V = 2bch(1+\tfrac{1}{3}\frac{h^2}{a^2})$ und für $h=a$ insbesondere $V=\tfrac{8}{3}abc$ und $x_1=\tfrac{9}{16}a$.

3. Im zweimänteligen Hyperboloid

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}-1,$$

geschnitten durch die Ebenen $x=a$ und $x=a+h$, erhält man für einen solchen Pilaster mit vier hyperbolischen Seitenkanten:

$$\frac{2b^2cm}{\sqrt{m^2b^2+c^2}}=\frac{Q}{\frac{x^2}{a^2}-1}=\frac{g}{0}=\frac{G}{2\frac{h}{a}+\frac{h^2}{a^2}}=\frac{M}{\frac{h}{a}+\frac{1}{4}\frac{h^2}{a^2}}=\frac{V:h}{\frac{h}{a}+\frac{1}{3}\frac{h^2}{a^2}}=\frac{Vx_1:\frac{1}{2}h^2}{\frac{4}{3}\frac{h}{a}+\frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2}},$$

folglich ist sein Rauminhalt:

$V = \frac{2b^2cm}{\sqrt{m^2b^2+c^2}}\cdot\frac{h^2}{a}(1+\tfrac{1}{3}\frac{h}{a})$ und der Abstand $x_1 = \frac{h}{4}\,\frac{8a+3h}{3a+h}$.

Legt man die beiden Flügel-Seitenkanten in die Ebene xz, indem man $\frac{1}{m}=0$ macht, so wird:

$$V=2bc\frac{h^2}{a}(1+\tfrac{1}{3}\frac{h}{a})$$

und für $h=a$ insbesondere:

$$V=\tfrac{8}{3}abc \text{ und } x_1=\tfrac{11}{16}a.$$

4. Im elliptischen Paraboloid

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2\frac{x}{a},$$

geschnitten durch die Ebenen $x=0$ und $x=h$, findet man für einen derartigen Pilaster mit vier parabolischen Seitenkanten:

$$\frac{2b^2cm}{\sqrt{m^2b^2+c^2}}=\frac{Q}{2\frac{x}{a}}=\frac{g}{0}=\frac{G}{2\frac{h}{a}}=\frac{M}{\frac{h}{a}}=\frac{V:h}{\frac{h}{a}}=\frac{Vx_1:\frac{1}{2}h^2}{\frac{3}{4}\frac{h}{a}},$$

folglich ist dessen Rauminhalt:

$$V=2\frac{b^2cm}{\sqrt{m^2b^2+c^2}}\cdot\frac{h^2}{a} \text{ und der Abstand } x_1=\tfrac{2}{3}h.$$

Legt man beide Flügel-Seitenkanten in die Ebene xz, indem man $\frac{1}{m}=0$ werden lässt, so erfolgt:

$$V=2\frac{bc}{a}h^2 \text{ und für } h=a \text{ insbesondere } V=2abc \text{ und } x_1=\tfrac{2}{3}a.$$

5. Im hyperbolischen Paraboloid

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=2\frac{x}{a},$$

geschnitten von den Ebenen $x=0$ und $x=h$, erhält man für einen Pilaster mit vier parabolischen Seitenkasten, jedoch blos, so lange $m^2<\frac{c^2}{b^2}$ bleibt:

$$\frac{2b^2cm}{\sqrt{c^2-m^2b^2}}=\frac{Q}{2\frac{x}{a}}=\frac{g}{0}=\frac{G}{2\frac{h}{a}}=\frac{M}{\frac{h}{a}}=\frac{V}{h.\frac{h}{a}}=\frac{Vx_1}{\frac{1}{2}h^2.\frac{4}{3}\frac{h}{a}},$$

daher seinen Rauminhalt:

$$V=\frac{2b^2cm}{\sqrt{c^2-m^2b^2}}\cdot\frac{h^2}{a} \text{ und den Abstand } x_1=\tfrac{2}{3}a.$$

Für $h=a$ insbesondere hat man $V=2\frac{ab^2cm}{\sqrt{c^2-m^2b^2}}$ und $x_1=\frac{2}{3}a$.

18.

VI. Gewundene oder verdrehte Säulen.

Noch dürfte hier einer Erzeugungsweise von Körpern, deren Querschnitte Q ganze rationale Functionen ihres Abstandes x von einer festgestellten Standebene sind, kurz gedacht werden, da sie sehr allgemein ist.

Denken wir uns den Flächeninhalt Q dieses wandelbaren Querschnittes darstellbar durch das Product blos zweier mit x veränderlichen Abmessungen v und w sammt einem gewissen, sich gleich bleibenden, von x unabhängigen Multiplicator m, nemlich:

$$(120) \qquad Q=mvw.$$

In einem solchen Falle kann dieser Querschnitt sein, entweder:

1. ein Parallelogramm von der Grundlinie v und der Höhe w mit $m=1$; oder

2. ein Dreieck von der Grundlinie v, der Höhe w und dem Factor $m=\frac{1}{2}$; oder

3. ein Trapez, wo v die halbe Summe (oder die Zwischenweite der Mitten) beider zusammenlaufenden Seiten und w der senkrechte Abstand der gleichlaufenden Seiten von einander, zugleich $m=1$ ist; oder

4. überhaupt ein Viereck, dessen Diagonalen die Längen v und w besitzen und unter einem stets gleichen Winkel λ gegen einander sich neigen, wonach $m=\frac{1}{2}\sin\lambda$ wird; oder

5. ein Kreis vom Halbmesser $v=w$ mit $m=\pi=3{\cdot}14159...$; oder

6. ein Parabelsegment, bei welchem v der auf einem Durchmesser von seinem Scheitel aus gemessene Abstand, w die zur Tangente am Scheitel parallele Sehne und $m=\frac{2}{3}$ ist; oder endlich

7. eine Ellipse von den Halbaxen v und w, wozu $m=\pi$ gehört.

Damit nun $Q=m.vw$ als rationale ganze Function von x sich darstelle, müssen entweder

a) beide Abmessungen v und w zugleich eben solche Functionen sein, oder

b) sie müssen die Ausdrücke

$$v=n\sqrt{N}+p\sqrt{P},\qquad (121)$$
$$w=r(n\sqrt{N}-p\sqrt{P})$$

haben, wo alle hinter den Gleichheitszeichen stehenden Buchstaben ganze rationale Functionen von x andeuten, oder

c) falls v und w gleich sein sollen, müssen sie die Form

$$v=w=n\sqrt{N}\qquad (122)$$

besitzen, wo n und N ebenfalls in x ganz und rational sind.

Durch diese Gestaltung des veränderlichen Querschnittes ist jedoch nur sein Flächeninhalt, nicht aber seine, d. i. seines Umfangs oder seiner beiden Hauptabmessungen v und w Lage festgestellt, was etwa noch in folgender Weise geschehen kann. Man wählt eine, die Grundebenen schneidende gerade oder krumme Linie zum steten Ort des Anfangs-, Halbirungs- oder eines sonstigen ausgezeichneten Punktes der einen Abmessung v des mit seiner Ebene parallel zur Grundebene allmälig fortrückenden Querschnit-

tes Q des Körpers; führt durch diesen Punkt dieselbe Abmessung v von der nach x gerichteten Länge entweder gleichlaufend zu einer ursprünglich festgestellten Geraden oder unter einem gewissen Winkel φ gegen sie geneigt, der eine bestimmte Function vom Abstande x ist; endlich schliesst man an sie im gehörigen Punkte und unter dem unabänderlichen Winkel λ in des Querschnittes Ebene noch die zweite, nach x abänderliche Abmessung w an und construirt die der Gestalt nach angegebene Umgrenzungslinie des Querschnittes.

Oder man wählt zwei, die Grundebenen schneidende Linien zu Leitlinien für eine Gerade, welche zu diesen Ebenen fortwährend parallel bleibend an diesen Leitlinien hingleitet und sohin eine windschiefe Fläche beschreibt; in die, dem Abstande x entsprechende Lage dieser beschreibenden Geraden legt man dann die Abmessung v mit einem ihrer ausgezeichneten Punkte an die eine Leitlinie, und daran im gehörigen Punkte und unter dem festgesetzten Winkel λ noch die andere Abmessung w, wonach man gleichfalls des Querschnittes Umfangslinie von vorgeschriebener Gestalt bilden kann.

Auf solche Weise beschreibt die Umgrenzungslinie des Querschnittes Q, während sie, mit ihrer Ebene stets zu den Grundebenen parallel verharrend und ihre allgemeine Gestalt beibehaltend, allmälig fortrückt und nach dem stetig wachsenden Abstande x von der Standebene sich in der Grösse allein ändert, die krumme oder gemischte Umfläche eines Körpers, der im Allgemeinen die Gestalt einer verdrehten oder gewundenen Säule besitzt.

Ein Paar Beispiele mögen hier genügen.

1. Bei einer Ellipse, deren Ebene von einer festen Grundebene g allmälig um die Weite x abgerückt ist, ändern sich ihre Halbaxen v, w dermassen, dass stets

$$v = a + a'x + a''x^2, \quad w = b + b'x$$

ist; ihr Mittelpunkt beschreibt eine beliebige krumme Linie und dabei drehen sich die Axen dergestalt, dass ihr Drehungswinkel φ der Entfernung x proportional, also $\frac{\varphi}{\pi} = \frac{x}{c}$ ist. Da ist der Querschnitt einer solchen gewundenen elliptischen Säule:

$$Q = \pi(a + a'x + a''x^2)(b + b'x)$$
$$= \pi ab + \pi(ab' + a'b)x + \pi(a'b' + a''b)x^2 + \pi a''b'x^3,$$

mithin vom dritten Grade, und sonach kann der Rauminhalt

und das Schwermoment dieser Säule nach den Formeln (19), (83) und (84) berechnet werden.

2. Bewegt sich ein **Kreis**, mit seiner Ebene zur Grundebene g parallel bleibend, dergestalt, dass sein Mittelpunkt was immer für eine Linie durchläuft, und ändert sich sein Halbmesser u mit dem Abstande x von der Grundebene so, dass immer

$$u = (a + a'x)\sqrt{b + b'x + b''x^2}$$

ist, so wird des entstehenden Körpers Querschnitt

$$Q = \pi u^2 = \pi(a^2 + 2aa'x + a'^2x^2)(b + b'x + b''x^2),$$

daher auch der Körper selbst, höchstens von der vierten Ordnung sein, deshalb sein Körperraum und Schwermoment nach den Formeln (75) und (76) gefunden werden.

Schlussbemerkung.

Obwohl hier die allgemeinen Hauptformeln, zur Abkürzung, mittels Integrirens aufgestellt worden sind, so unterliegt es doch nach unseren Andeutungen nur sehr geringen Schwierigkeiten, für Körper der **zweiten** und **dritten** Ordnung auf ganz elementar rechnenden Wegen, auf denen man die Grenze, der das Verhältniss

$$\frac{1^m + 2^m + 3^m + + \ldots + n^m}{n^{m+1}},$$

bei unendlicher Steigerung der Anzahl n, ohne Ende zustrebt, $= \frac{1}{m+1}$, also für $m = 2, 3, 4$ insbesondere $= \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ findet und benützt, zu den nemlichen Formeln zu gelangen, falls es Jemandem gefallen sollte, Berechnungen dieser Art in einen Lehrvortrag oder in ein Lehrbuch für Anfänger aufzunehmen.

XIII.

Ueber die Construction der Tangenten gewisser ebener Curven.

Von

Herrn Doctor *Wiegers*

zu Berlin.

In der Ebene sei eine Curve C gegeben durch die Gleichung

$$(1) \qquad f(\varrho, \varrho') = 0$$

zwischen den von zwei festen Punkten F und F' der Ebene nach einem Punkte P der Curve gezogenen (stets positiv zu nehmenden) Radienvectoren ϱ und ϱ'. Die zu einem dem Punkte P benachbarten Punkte Q der Curve gehörigen Radienvectoren seien r und r', so dass also

$$(2) \qquad f(r, r') = 0.$$

Halbirt man die Winkel (ϱr) und $(\varrho' r')$ und zieht gegen die Halbirungslinien durch die Scheitel F und F' jener Winkel Senkrechte, so bestimmen letztere durch ihren Durchschnitt mit der durch P und Q gelegten Secante der Curve C zwei Punkte M und M' von der Beschaffenheit, dass

$$(3) \qquad \begin{cases} QM : PM = r : \varrho, \\ QM' : PM' = r' : \varrho'. \end{cases}$$

Folglich ist

$$(4) \qquad \begin{cases} (QM - PM) : PM = (r - \varrho) : \varrho, \\ (QM' - PM') : PM' = (r' - \varrho') : \varrho'; \end{cases}$$

woraus sich ergiebt:

$$(5)\qquad PM:PM' = \frac{\varrho}{\varrho'} : (\pm \frac{r-\varrho}{r'-\varrho'}).$$

Von dem doppelten Zeichen in der vorstehenden Proportion gilt das obere oder das untere, je nachdem $\frac{r-\varrho}{r'-\varrho'}$ positiv oder negativ ist. Uebrigens ist zu beachten, dass im ersteren Falle die Punkte M und M' auf derselben, im letzteren auf verschiedenen Seiten von PQ liegen.

Lässt man Q sich dem Punkte P auf der Curve unendlich nähern, so geht die Secante PQ über in die Tangente der Curve C im Punkte P. Dabei fallen die Geraden ϱ, r und die Halbirende des Winkels (ϱr) einerseits, und die Geraden ϱ', r' und die Halbirende des Winkels $(\varrho' r')$ andererseits zusammen, so dass FM und $F'M'$ beziehungsweise senkrecht zu FP und $F'P$ werden; der Quotient $\frac{r-\varrho}{r'-\varrho'}$ geht über in $\frac{d\varrho}{d\varrho'}$; und man hat nunmehr die Gleichung:

$$(6)\qquad PM : PM' = \frac{\varrho}{\varrho'} : (\pm \frac{d\varrho}{d\varrho'}),$$

aus welcher, wenn man gleichzeitig die obige Bemerkung über die Lage der Punkte M und M' zu PQ beachtet, nicht selten eine sehr einfache Construction der Tangente in einem Punkte P der Curve C folgt.

Wenn in der Ebene die Punkte einer Curve C durch den Durchschnitt zweier der Gleichung $f(\varrho, \varrho') = 0$ genügenden Geraden ϱ und ϱ' bestimmt werden, auf die Weise, dass entweder die eine Gerade ϱ beständig von einem festen Punkte F der Ebene ausgeht, während die andere ϱ' parallel mit sich längs einer beliebigen, in der Ebene gegebenen Curve C' mit ihrem einen Endpunkte fortgleitet — oder dass jede der Geraden ϱ und ϱ' mit einem ihrer Endpunkte an einer in der Ebene für sie bestimmten Curve C'' resp. C' parallel mit sich fortgleitet: so gelangt man durch Betrachtungen, die den vorhergehenden ganz analog, zu derselben Gleichung (6), in welcher nur die Punkte M und M' eine andere Bedeutung haben.

Wir erörtern nur den ersten Fall, in welchem ϱ beständig von einem festen Punkte F ausgeht, während ϱ' an einer bekannten Curve C' auf die beschriebene Weise hingleitet: die Behandlung des zweiten Falls ergiebt sich dann von selbst. Den benachbarten Punkten P und Q auf der Curve C mögen die Punkte F' und

F'' der Curve C' entsprechen, so dass also $FP = \varrho$, $F'P = \varrho'$, $FQ = r$, $F''Q = r'$. Verlängert man nun die Secante $F'F''$ der Curve C', bis sie die Secante PQ der Curve C im Punkte M' trifft, und halbirt wieder den Nebenwinkel von (ϱr) durch die Gerade FM, welche die Secante PQ in M trifft: so erhält man wieder der Reihe nach die Gleichungen (3), (4), (5), (6), hat aber unter M' in der Gleichung (6) jetzt denjenigen Punkt zu verstehen, in welchem die Tangente der Curve C im Punkte P von der Tangente der Curve C' im Punkte F' geschnitten wird; FM ist, wie oben, senkrecht auf FP.

Der zur Aufstellung der Gleichung (6) erforderliche Werth von $\frac{d\varrho}{d\varrho'}$ wird durch Differentiation der Gleichung (1) erhalten. In dem Falle aber, dass $f(\varrho, \varrho')$ eine algebraische (rationale und ganze) Function ist, wird man den Differential-Calcul bequem vermeiden können.

Ist z. B. die gegebene Gleichung (1)

$$a\varrho^2 + b\varrho'^2 + c\varrho\varrho' + p^3 = 0,$$

wo a, b, c, p positive oder negative Constanten sind, so tritt an Stelle der Gleichung (2) die folgende:

$$ar^2 + br'^2 + crr' + p^3 = 0.$$

Es ist daher

$$a(r^2 - \varrho^2) + b(r'^2 - \varrho'^2) + c(rr' - \varrho\varrho') = 0,$$

oder, da identisch

$$rr' - \varrho\varrho' = r(r' - \varrho') + \varrho'(r - \varrho)$$

ist,

$$(r - \varrho)[a(r + \varrho) + c\varrho'] + (r' - \varrho')[b(r' + \varrho') + cr] = 0.$$

Statt (3) hat man jetzt durch die vorstehende Gleichung:

$$PM : PM' = \frac{\varrho}{\varrho'} : (\pm \frac{-b(r' + \varrho') - cr}{a(r + \varrho) + c\varrho'}),$$

und, wenn PQ in die Tangente übergeht:

$$(7) \qquad PM : PM' = \frac{\varrho}{\varrho'} : (\pm \frac{-2b\varrho' - c\varrho}{2a\varrho + c\varrho'}).$$

Ist $a = b = 0$, $\frac{p^3}{c} = -m^2$, und sind F und F' feste Punkte, so

ist die gegebene Curve die allgemeine Lemniscate, für welche also $PM = PM'$ ist. (M und M' liegen zu verschiedenen Seiten von P). Diese Eigenschaft hat bereits Herr Professor Steiner im XIV. Bande des Crelle'schen Journals nachgewiesen.

Ist $a=b$, $\frac{c}{a}=\pm 2$, $\frac{p^3}{a}=-m^2$, so ist die gegebene Curve irgend ein Kegelschnitt *). Für die Ellipse und die Hyperbel sind die Punkte F und F' fest. Für die Parabel ist nur einer der Punkte F fest; der andere F' bewegt sich, während P die Parabel durchläuft, auf einer gegebenen Geraden, auf welcher $F'P$ in jedem Augenblicke der Bewegung senkrecht steht. Die Gleichung (7), welche jetzt lautet:

$$\frac{PM}{PM'}=\frac{\varrho}{\varrho'},$$

lehrt, dass $\triangle PMF \sim \triangle PM'F'$ ist, dass also, wie bekannt, die Tangente gleiche Winkel bildet mit den nach dem Berührungspunkte P gezogenen Radienvectoren FP und $F'P$.

Herr Professor Joachimsthal hat neuerdings (s. Crelle's Journal Bd. 56. Hft. 3.) folgenden Lehrsatz mitgetheilt:

Sind die positiven Variablen ϱ und ϱ' entweder

I. die Entfernungen eines Punktes P von zwei festen Punkten F und F', oder

II. die Entfernungen des Punktes P von einem festen Punkte F und einer festen Geraden, oder

III. die Entfernungen des Punktes P von zwei sich schneidenden festen Geraden,

welche, während P eine Curve C beschreibt, stets der Gleichung $f(\varrho, \varrho')=0$ genügen; und trägt man mit Berücksichtigung des Zeichens auf ϱ und ϱ' Längen ab, die $\frac{\partial f}{\partial \varrho}$ und $\frac{\partial f}{\partial \varrho'}$ proportional sind: so ist die Diagonale des über diesen Längen construirten Parallelogramms die Normale der Curve C im Punkte P.

Dieser Satz lässt sich ohne Schwierigkeit aus der oben aufgestellten Gleichung (6) ableiten. Zunächst ist klar, dass für jede der Bedingungen I., II., III. die Gleichung (6) gilt, indem die Be-

*) Handelt es sich direct um den Nachweis der im Folgenden ausgesprochenen Eigenschaft der Kegelschnitte, so wird man natürlich von der Grundgleichung $\varrho \pm \varrho' = $ Const. ausgehen.

dingungen II. und III. der speciellen Annahme entsprechen, dass die oben erwähnten festen Curven C' und C'' Gerade sind. Da auf den letzteren ϱ' und ϱ senkrecht stehen sollen, so sind für jede der Voraussetzungen I., II., III. die Dreiecke PFM und $PF'M'$ rechtwinklig, und da

$$\frac{\partial f}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial f}{\partial \varrho'} d\varrho' = 0,$$

so lässt sich die Gleichung (6) auch folgendermassen schreiben:

$$\text{(g)} \qquad \cos M'PF' : \cos MPF = \frac{\partial f}{\partial \varrho} : \left(\mp \frac{\partial f}{\partial \varrho'}\right).$$

Zieht man durch P die Normale der Curve (d. i. eine Senkrechte zu MM') und darauf durch irgend einen Punkt N derselben Parallelen zu PF und PF', welche die letzteren oder ihre Verlängerungen beziehungsweise in A und A' schneiden, so hat man:

$$\text{(g')} \qquad PA : PA' = \sin A'PN : \sin APN,$$

und da $\sin A'PN = \cos M'PF'$, $\sin APN = \cos MPF$ ist, so geben die Gleichungen (g) und (g'):

$$\text{(G)} \qquad PA : PA' = \frac{\partial f}{\partial \varrho} : \left(\mp \frac{\partial f}{\partial \varrho'}\right).$$

In den Gleichungen (6), (g), (G) gelten entweder die oberen oder die unteren der doppelten Zeichen gleichzeitig.

Ist daher der Quotient $\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho} : \frac{\partial f}{\partial \varrho'}\right)$ negativ, so liegen M und M' auf derselben Seite von P. Zieht man aus P Parallelen zu FM und $F'M'$, welche die letzteren oder ihre Verlängerungen beziehungsweise in L und L' schneiden: so sieht man ein, dass für den vorliegenden Fall die verlängerte Gerade MM' durch den Winkel LPL' gehen muss. Folglich geht die Normale in P durch die Nebenwinkel von FPF'; und während die eine der Längen PA und PA' auf den zugehörigen Radiusvector fällt, wird die andere die Verlängerung des zugehörigen Radiusvector über P hinaus bilden.

Ist dagegen der Quotient $\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho} : \frac{\partial f}{\partial \varrho'}\right)$ positiv, so liegen M und M' zu verschiedenen Seiten von P und die Gerade MPM' kann desshalb nur durch die Nebenwinkel von LPL' gehen. Folglich geht die Normale in P jetzt jedenfalls durch den Winkel FPF'; und die Längen PA und PA' liegen gleichzeitig entweder auf den zugehörigen Radienvectoren oder auf deren Verlängerungen über P hinaus.

Die vorstehenden Bemerkungen in Verbindung mit der Gleichung (G) geben den Lehrsatz des Herrn Prof. Joachimsthal.

XIV.

Integration der partiellen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung.

Von

Herrn Doctor *A. Weiler,*

Lehrer der Mathematik an der höheren Bürgerschule zu Mannheim.

Vorwort.

Es ist nun eine Reihe von Jahren verflossen, seit dem ich mir die Aufgabe gestellt habe, die Lehre von der Integration der Differentialgleichungen einer neuen Bearbeitung zu unterwerfen. Ich dachte mir, es müsse sich aus den zur Integration führenden Sätzen und Regeln ein zusammenhängendes Gebäude aufrichten lassen, woran jedem einzelnen Baustein eine bestimmte Stellung angewiesen sei. Andererseits aber war ich zu der Ueberzeugung gekommen, dass man, um dies Gebäude aufzurichten, auf eine blosse Zusammenstellung der bekannten Leistungen sich nicht beschränken dürfe. Denn diese Leistungen sind zum Theil wenigstens von der Art, dass man das einemal für gross und wichtig zu halten geneigt ist, was ein andermal gering und unbedeutend erscheint, da man bei der Beurtheilung von verschiedenen Standpunkten ausgehen zu müssen glaubt. Da ich nun selbst niemals daran gezweifelt habe, dass die Ungewissheit, in welcher Weise dieselben zu beurtheilen seien, nur in der Unvollständigkeit der bisherigen Hilfsmittel ihren Grund habe, so schloss ich, dass es hier darauf ankomme, gewisse noch fehlende Glieder herbeizuschaffen.

In dem 51sten Band des Crelle'schen Journals habe ich die Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter

zweiter Ordnung mit zwei und mehr Veränderlichen als ein für sich abgeschlossenes Ganzes betrachtet. Diese Behandlungsweise ist dadurch veranlasst, dass die Integration der linearen Differentialgleichungen auf einer eigenthümlichen Grundlage sich aufbauen lässt, welche bis jetzt wenigstens für keinen andern Theil der Integralrechnung sich wiederfindet. Ich habe dort gezeigt, wie man das allgemeine Integral einiger ausgedehnten Gruppen von linearen Differentialgleichungen in einer Form ausdrückt, deren Einfachheit alle früheren Darstellungen weit hinter sich lässt. Meine Untersuchungen über die Integration der allgemeinen Differentialgleichung erster und zweiter Ordnung mit nur zwei Veränderlichen sind kürzlich in dem 29sten Theil von Grunert's Archiv zur Veröffentlichung gekommen. Ich hatte die Absicht zu zeigen, dass die Kenntniss von besonderen Integralen und besonderen Auflösungen bei der Integration dieser Differentialgleichungen von weit grösserer Bedeutung ist, als man bis dahin anzuerkennen geneigt war. Insbesondere aber glaube ich dargethan zu haben, dass alle bis dahin bekannten Hilfsmittel der Integration von Differentialgleichungen mit nur zwei Veränderlichen ihre vortheilhafteste Verwendung finden, wenn man die Bestimmung des integrirenden Faktors als das eigentliche Ziel der Aufgabe stets im Auge behält. Die vorliegende Abhandlung soll nun alles Uebrige umfassen, nämlich die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit drei und mehr Veränderlichen. Da ich hierbei eine noch wenig betretene Bahn verfolgt habe, und es mir gerade dadurch möglich geworden ist, nicht allein alle die schon früher auf diesem Gebiete gemachten Erfahrungen vollständig zu beherrschen, sondern auch die Grenzen desjenigen, was sich überhaupt erreichen lässt, um ein Erhebliches hinauszurücken, so möchte ich in diesem Vorwort den Versuch machen, dem sachkundigen Leser in kurzen Zügen die Gedanken aufzuzeichnen, welche mich bei der Bearbeitung geleitet haben, und dann auch das Verhältniss meiner Resultate zu den schon bekannten Leistungen berühren.

Die Integration einer Differentialgleichung hat immer nur den Zweck, eine der vorkommenden Veränderlichen als Funktion der übrigen Veränderlichen darzustellen. Diese Aufgabe soll aber in allen Fällen ihrem Ziel dadurch entgegengeführt werden, dass man dieselbe auf eine andere zurückführt, wornach die gesuchte Funktion weniger Veränderliche erhält als vorher. In dieser Weise wird dann die grosse Mannigfaltigkeit von Aufgaben, welche durch die Integration der Differentialgleichungen ihre Erledigung finden, zuletzt jedesmal auf die Integration von Funktionen einer einzigen Veränderlichen oder auf die sogenannte Quadratur zurückgeführt.

Doch darf man nicht glauben, dass man jedesmal dasselbe Problem vor sich habe, wenn die zu integrirende Differentialgleichung dieselbe Anzahl von Veränderlichen enthält. Jedes Integrationsverfahren gründet sich auf eine bestimmte Voraussetzung in Bezug auf die Beschaffenheit des allgemeinen Integrals. Dies Verfahren führt dann auf die Integration aller derjenigen Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral in der That die angenommene Form hat. Doch ist man genöthigt, um die mannigfaltigen hier vorkommenden Aufgaben lösen zu können, von gar mancherlei Voraussetzungen auszugehen. Wenn nun auch die vorhin erwähnte Vorschrift, die Zahl der Veränderlichen in der gesuchten Funktion nach und nach zu vermindern, jederzeit die Rechnungsoperationen beherrscht, so werden sich diese letzteren doch für alle diejenigen Differntialgleichungen, welche wegen der Uebereinstimmung in der Integralform einer bestimmten Gruppe angehören, auch wieder eigenthümlich gestalten. Man könnte erwarten, dass alle diejenigen Differentialgleichungen, welche selbst in ihrer Form auffallend übereinstimmen, jedesmal auch nach einer und derselben Regel sich integriren lassen. Dies trifft aber oft genug nicht zu. Denn wenn auch alle diejenigen Differentialgleichungen, welchen ein und dieselbe Integralform zum Grunde liegt, jedenfalls gemeinsame Eigenschaften besitzen, so treten dieselben doch nicht immer deutlich hervor, und werden oftmals durch andere unwesentliche Momente so sehr zurückgedrängt, dass nur eine genaue auf Rechnung gegründete Untersuchung dieselben erkennen lässt. Diese Bemerkungen mögen nun hinreichend darthun, dass die Natur der Integralform den nächsten Einfluss erhält bei der Trennung des ganzen Gebiets in einzelne für sich abgeschlossene Theile.

Das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung

$$Z = Y\frac{dz}{dy} + X\frac{dz}{dx} + W\frac{dz}{dw} + \ldots.$$

worin $ZYXW$ bestimmte Funktionen der $n+1$ Veränderlichen $zyxw\ldots$ sind, hat jedesmal die Form $\varphi(\alpha\beta\gamma\ldots) = 0$, wo φ eine willkührliche Funktion, $\alpha\beta\gamma\ldots$ aber bestimmte Funktionen der Veränderlichen sind. Allein die Bestimmung der n Funktionen $\alpha\beta\gamma\ldots$ hat mancherlei Schwierigkeiten, da es nicht möglich ist, dieselben durch eine bestimmt vorgeschriebene und allgemein gültige Entwicklung zu erzielen. Alles, was hier erreicht werden kann, gilt immer nur für gewisse Formen der Funktionen $ZYXW\ldots$ oder für gewisse Beziehungen, welche diese Funktionen unter einander eingehen.

Lagrange hat zuerst gezeigt (in den Abhandlungen der Berliner Akademie 1779), dass die n Gleichungen $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c \ldots$, welche als besondere Integrale jener partiellen Differentialgleichung Genüge leisten, wenn $a, b, c \ldots$ willkührliche Beständige vorstellen, gleichbedeutend sind mit denjenigen Gleichungen, woraus man die n Veränderlichen $y x w \ldots$ als Funktionen von z zu bestimmen hat, damit man dadurch die n Differentialgleichungen:

$$Z \frac{dy}{dz} = Y, \quad Z \frac{dx}{dz} = X, \quad Z \frac{dw}{dz} = W,$$

u. s. w. befriedige. Da nun aber die vorliegenden Differentialgleichungen durch die Elimination von irgend $n-1$ abhängigen Veränderlichen auf eine Differentialgleichung der $n$ten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen führen, so war man der Meinung, dass durch den von Lagrange entdeckten Zusammenhang zwischen den n Funktionen $\alpha \beta \gamma \ldots$ der partiellen Differentialgleichung und dem Integral jenes Systems von Differentialgleichungen die Integration der partiellen Differentialgleichung geleistet sei. Die Bestimmung der Funktionen $\alpha \beta \gamma \ldots$, sagte man, sei nun auf die Integration einer Differentialgleichung mit nur zwei Veränderlichen zurückgeführt, und die Reduktion auf eine Differentialgleichung mit weniger Veränderlichen sei doch in allen Fällen dasjenige Ziel, wornach man streben müsse.

Allein das von Lagrange gegebene Integrationsverfahren verlor bald diesen glänzenden Schein, da man sich überzeugte, wenn es auf die wirkliche Integration einer partiellen Differentialgleichung ankomme, dass man dadurch nicht gefördert werde. Doch darf man nicht glauben, dass desshalb der Grundsatz angefochten werden könne, wornach das Problem der Integration seiner Lösung näher gebracht ist, nachdem es gelungen, die Anzahl der in der gesuchten Funktion vorkommenden Veränderlichen zu vermindern. Das Irrige einer solchen Meinung stellt sich heraus, wenn man die Integration einer Differentialgleichung der $n$ten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen näher ins Auge fasst. Man weiss, dass diese Integration durch die Bestimmung der n ersten Integrale zu Stande kommt, oder der n verschiedenen Differentialgleichungen der $n-1$sten Ordnung, welche durch Differentiation auf die vorliegende Differentialgleichung zurückführen. Man weiss auch, dass die linearen Differentialgleichungen bis dahin die einzige Ausnahme machen, wo man noch auf einem anderen Weg zum Ziel kommt, indem man unmittelbar die endliche Gleichung mit ihren n willkührlichen Beständigen

darzustellen im Stande ist. Das erste Integral einer Differentialgleichung der *n*ten Ordnung mit zwei Veränderlichen ist aber selbst wieder eine Funktion von $n+1$ Veränderlichen. Ausser den beiden Veränderlichen y und z kommen nämlich darin noch die $n-1$ Differentialquotienten $\frac{dy}{dz}, \frac{d^2y}{dz^2} \dots \frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}$ vor, welche, wenn auch unter sich in einer bestimmten Abhängigkeit stehend, bei der Gewinnung des ersten Integrals aber die Rolle von unabhängigen Veränderlichen übernehmen. Und so überzeugt man sich denn, wenn man an dem vorhin ausgesprochenen Grundsatz festhält, dass dann noch kein Grund vorliegt, die Integration einer Differentialgleichung der *n*ten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen für eine einfachere Aufgabe anzusehen, als die Integration jener partiellen Differentialgleichung mit $n+1$ Veränderlichen. Da man aber auch nachweisen kann, dass die ersten Integrale einer Differentialgleichung der *n*ten Ordnung im Allgemeinen nicht vortheilhafter sich darstellen lassen, als auch jene Funktionen $\alpha\beta\gamma\dots$, und da überdies die Herleitung der Differentialgleichung der *n*ten Ordnung allein schon schwierige Rechnungen erfordert, so rückt allerdings die Aussicht sehr in die Ferne, aus dem von Lagrange entdeckten Zusammenhang für die Integration der partiellen Differentialgleichungen einen Vortheil zu ziehen.

Wenn demnach die partielle Differentialgleichung nicht auf eine Differentialgleichung höherer Ordnung mit nur zwei Veränderlichen zurückgeführt werden soll, so wird denn doch jene Leistung von Lagrange stets von grosser Bedeutung sein. Man wird sie richtig würdigen, wenn man zu dem Schlusse gelangt, dass die Integration eines Systems von Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit nur einer einzigen unabhängigen Veränderlichen nicht von einer Differentialgleichung höherer Ordnung mit nur zwei Veränderlichen, sondern vielmehr von einer partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung abhängen soll, weil man so durch einen geringeren Aufwand von Rechnung zum Ziel kommt. Man hat nur dann einen Grund, den ersteren Weg einzuschlagen, wenn derselbe auf eine lineare Differentialgleichung führt, da hier das Integrationsverfahren sogleich die endliche Gleichung liefert, also die abhängige Veränderliche unmittelbar als Funktion der einzigen noch übrigen unabhängigen Veränderlichen dargestellt wird.

Es war eine grosse Aufmunterung für mich, zu erfahren, dass sich für diese von der gewöhnlichen so sehr abweichenden Betrachtungsweise schon früher eine Autorität ausgesprochen hat. Die Untersuchungen von Jacobi über die Integration der partiellen Differentialgleichungen, welche in seiner Abhandlung: „Di-

lucidationes de aequationum diff. vulg. systematis earumque connexione u. s. w." in dem 23sten Band des Crelle'schen Journals niedergelegt sind, gehen von demselben Gedanken aus, dass die Funktionen $\alpha\beta\gamma\ldots$, woraus das allgemeine Integral zusammengesetzt ist, aus der partiellen Differentialgleichung selbst bestimmt werden sollen.

Da man nun aber zu dieser Ueberzeugung gekommen ist, so entsteht die Frage, wie man anders die Integration der partiellen Differentialgleichung auf die Quadratur zurückführe. Auf diese Frage hatte Jacobi noch keine bestimmte Antwort, wiewohl er die Ansicht ausspricht, es werde sich am Ende doch wohl herausstellen, dass die Lösung der Aufgabe auf einer allmäligen Verminderung der Veränderlichen beruhe. Um dies zu erreichen, habe ich zwei verschiedene Wege eingeschlagen. Das einemal gelingt es, durch Transformation die Anzahl der Veränderlichen, welche in der gesuchten Funktion vorkommen, zu vermindern. Die neuen Veränderlichen, welche hierbei zu benutzen sind, ergeben sich nach bestimmten Regeln aus den etwa bekannten besonderen Integralen und besonderen Auflösungen] der partiellen Differentialgleichung. Wo man aber so nicht zum Ziel kommt, da gelingt es oftmals, die partielle Differentialgleichung in mehre andere zu zerlegen, von denen jede für sich weniger Veränderliche einschliesst, als die ursprüngliche. Die weitere Lösung der Aufgabe besteht dann darin, die allgemeinste Funktion anzugeben, welche gleichzeitig den verschiedenen partiellen Differentialgleichungen Genüge leistet.

Ich habe es für nöthig erachtet, den bis dahin besprochenen Gegenstand in seinen Einzelnheiten hervorzuheben, während ich andere Ergebnisse meiner Untersuchungen in diesem Vorwort nur mehr andeuten wollte. Denn die bis dahin mitgetheilten Resultate dienen allen übrigen Untersuchungen zur Grundlage. Indem ich überall den noch so wenig verfolgten Gedanken festhielt, die Funktionen, welche einer partiellen Differentialgleichung Genüge leisten, aus dieser Gleichung selbst abzuleiten, ist mir die Freude geworden, immer mehr zu erkennen, dass ein weitreichendes Hilfsmittel dem Rechner hieraus erwachse. Denn dieser einzige Gedanke beherrscht mit Leichtigkeit ein weites Feld von Untersuchungen, welche vorher lästigen Schwierigkeiten unterworfen waren; demselben Gedanken fügen sich willig auch solche Untersuchungen, auf welche meines Wissens vorher Niemand mit Erfolg eingegangen war.

Was zunächst noch die Integration eines Systems von Differentialgleichungen betrifft, so lässt sich leicht dasjenige, was vorhin

von dem System von Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit nur einer einzigen unabhängigen Veränderlichen gesagt worden ist, auf ein System derartiger Differentialgleichungen höherer Ordnung auszudehnen. In der That hat man, wenn beliebig viele Differentialgleichungen der Art vorliegen, bezüglich von der n, p, $q$ten u. s. w. Ordnung, ein sehr einfaches Bildungsgesetz für eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades mit $1+n+p+q+\ldots$ Veränderlichen, deren Integration hinreicht, um unmittelbar das allgemeine Integral des vorliegenden Systems angeben zu können.

Auch ein gewisses System von partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung, wodurch also die Abhängigkeit mehrerer Grössen von mehr als einer unabhängigen Veränderlichen ausgedrückt ist, lässt sich mit Hilfe einer einzigen partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung integriren. Hat man ein derartiges System von n partiellen Differentialgleichungen, worin m unabhängige Veränderliche vorkommen, so findet sich eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung mit $m+n$ Veränderlichen, auf deren Integration es hier ankommt.

Die allgemeinste partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung mit $n+1$ Veränderlichen ist dargestellt durch

$$\psi(z_y z_x z_w \ldots . zyxw \ldots .) = 0,$$

wenn $z_y z_x z_w \ldots .$ die Differentialquotienten sind. Das allgemeine Integral dieser partiellen Differentialgleichung lässt sich bekanntlich ohne Weiteres anschreiben, wenn ein vollständiges Integral bekannt ist oder eine Funktion, welche der partiellen Differentialgleichung genügt, und zugleich n willkührliche Beständige einschliesst. Schon Euler hat in seinen „Institutiones calculi integralis" gezeigt, wie man das allgemeine Integral daraus ableitet. Die Bestimmung eines vollständigen Integrals ist desshalb die eigentiche Aufgabe der Integralrechnung. Für die partielle Differentialgleichung mit nur drei Veränderlichen

$$\psi(z_y z_x zyx) = 0$$

hat dies Lagrange in seinen „Vorlesungen über Funktionenrechnung" geleistet. Man findet nämlich eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades, wenn es darauf ankommt, die beiden Differentialquotienten z_y und z_x zu bestimmen, welche dem allgemeinen Integral entsprechen. Ein besonderes Integral $\alpha = a$, in Verbindung mit $\psi = 0$, liefert die beiden Werthe z_y und z_x als Funktionen der drei Veränder-

lichen z, y und x und der willkührlichen Beständigen a; und die Integration der vollständigen Differentialgleichung

$$dz = z_y dy + z_x dx$$

führt dann auf ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung $\psi = 0$.

Nach Lagrange hat man sich vielfach bemüht, die obige Regel auf die partielle Differentialgleichung mit $n+1$ Veränderlichen auszudehnen. Es kommt hier darauf an, die n Differentialquotienten als Funktionen der Veränderlichen und von $n-1$ willkührlichen Beständigen darzustellen, um dann ein vollständiges Integral durch die Integration der vollständigen Differentialgleichung:

$$dz = z_y dy + z_x dx + z_w dw + \ldots$$

zu erzielen. Allein man ist damit nicht zu Ende gekommen. Und doch lassen sich ohne Anstand $n-1$ partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades anschreiben, welche die Eigenschaft besitzen, dass jede der $n-1$ endlichen Gleichungen

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma = c$$

u. s. w., woraus die Differentialquotienten in der angegebenen Weise sich berechnen, denselben gleichzeitig Genüge leistet.

Die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung $\psi = 0$ ist zwar schon lange von Pfaff gegeben (in den Abhandlungen der Berliner Akademie 1814 und 1815). Allein Pfaff verlässt das von Lagrange für drei Veränderliche eingeschlagene Verfahren, in der Meinung, dass diesem für mehr als drei Veränderliche unübersteigliche Hindernisse entgegenstehen. Die Pfaff'sche Methode geht von einem andern Gesichtspunkte aus, und betrachtet die vorliegende Aufgabe als speziellen Fall einer viel allgemeineren, nämlich der Integration der vollständidigen Differentialgleichung:

$$Zdz + Ydy + Xdx + Wdw + \ldots + X_1 dz_x + W_1 dz_w + \ldots = 0,$$

worin $ZYXW \ldots X_1 W_1 \ldots$ irgend Funktionen der $2n$ Veränderlichen $z_x z_w \ldots zyxw$ sind. Es wird gezeigt, dass sich jedesmal ein Integral findet, bestehend aus n endlichen Gleichungen, worin eben so viele willkührliche Beständige vorkommen. Zu diesen n Gleichungen gelangt Pfaff, indem er n verschiedene Systeme von bezüglich $2n-1$, $2n-3 \ldots 3$, 1 Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit einer einzigen unabhängigen Veränderli-

chen integrirt. Man sieht ein, dass die vollständige Differentialgleichung

$$dz = z_y dy + z_x dx + z_w dw + \ldots,$$

worin an die Stelle von z_y der aus $\psi = 0$ berechnete Werth eingesetzt worden, ein spezieller Fall der von Pfaff gelösten Aufgabe ist, da hier die Coeffizienten X_1, W_1, ... verschwinden. Die n endlichen Gleichungen führen aber durch die Elimination der $n-1$ Differentialquotienten $z_x z_w$.... auf ein vollständiges Integral. Ich habe von der Pfaff'schen Methode Kenntniss erhalten, nachdem ich selbst schon auf dem von Lagrange angebahnten Weg zum Ziel gekommen war. Wiewohl nun der zwischen den beiden Methoden bestehende Zusammenhang nicht schwer zu übersehen ist, da es nahe liegt, die Pfaff'schen Systeme aus den von mir aufgestellten partiellen Differentialgleichungen abzuleiten, so lässt sich doch Mancherlei zu Gunsten der letzteren Methode anführen. Nicht allein ist hier der leitende Gedanke der Natur der Aufgabe mehr angemessen, so dass man zu einer schnelleren und doch tieferen Einsicht in das eigentliche Problem gelangt; die vorkommenden Rechnungen lassen auch sehr bemerkenswerthe Vereinfachungen zu, welche der Pfaff'schen Methode fremd sind.

Was Jacobi gegeben hat, um die Pfaff'sche Methode abzukürzen, erleidet keine Aenderung, wenn man die andere Methode gebraucht. Jacobi zeigt nämlich (in dem Crelle'schen Journal Band 17.), dass man ein vollständiges Integral schon aus jenem ersten Systeme von $2n-1$ Differentialgleichungen ableiten kann, so dass also die übrigen $n-1$ Systeme, von denen Pfaff Gebrauch macht, entbehrlich sind. Jenes erste System ist aber mit der ersten von jenen $n-1$ partiellen Differentialgleichungen gleichbedeutend, deren man sich auf dem andern Weg zu bedienen hat. Wenn man geneigt ist, diesen von Jacobi gegebenen Aufschluss als einen bedeutenden Fortschritt in der Integration der partiellen Differentialgleichungen anzusehen, so kann ich nicht umhin, hier eine andere Ansicht auszusprechen, da ich mich überzeugt habe, dass das von Jacobi eingeschlagene Verfahren grosse Hindernisse der Integration entgegenstellt, welche sonst nicht vorhanden sind. Ich glaube auch dem Leser ohne viel Aufwand von Rechnung diese Ueberzeugung verschaffen zu können; doch will ich mir dabei erlauben, nur beispielweise die partielle Differentialgleichung mit vier Veränderlichen

$$\psi(z_y z_x z_w z y x w) = 0$$

zu betrachten.

Bezeichnet man das vollständige Integral der partiellen Differentialgleichung $\psi = 0$ durch $\gamma = \varphi$, wo φ eine willkührliche Beständige ist, γ aber eine bestimmte Funktion der vier Veränderlichen $zyxw\ldots.$ und von zwei andern willkührlichen Beständigen α und β, so lässt man bekanntlich die Grösse φ in eine willkührliche Funktion von α und β übergehen, α und β aber selbst in eine bestimmte Abhängigkeit treten zu den Veränderlichen $zyxw$, indem man die drei Gleichungen:

$$\text{I.} \qquad \gamma = \varphi(\alpha\beta), \quad \frac{d\gamma}{d\alpha} = \frac{d\varphi}{d\alpha}, \quad \frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{d\varphi}{d\beta}$$

anschreibt, um das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung $\psi = 0$ darszutellen. Daraus ergeben sich nun unzählig viele besondere Integrale, wenn man die willkührliche Funktion $\varphi(\alpha\beta)$ irgendwie spezialisirt, und dann die Elimination von α und β vornimmt. Bleiben bei dieser Spezialisirung drei willkührliche Beständige in $\varphi(\alpha\beta)$ zurück, so gelangt man auf dem angegebenen Wege zu einem volständigen Integral. Dies musste ich vorausschicken, um an den Zusammenhang zu erinnern, welcher zwischen den vollständigen Integralen und dem allgemeinen Integral besteht. Jacobi integrirt, um ein vollständiges Integral zu erhalten, jenes erste System von $2n-1$ Differentialgleichungen. Das Integral sei hier ausgedrückt durch die fünf Gleichungen:

$$\alpha_1 = a, \quad \beta_1 = b, \quad \gamma_1 = c, \quad \delta_1 = d, \quad \varepsilon_1 = e,$$

worin α_1, β_1, ... bestimmte Funktionen der Veränderlichen $zyxw$ und der Differentialquotienten $z_y z_x z_w$ sind, a, b, ... aber willkührliche Beständige. Aus der Natur der Aufgabe schliesst man, dass die fünf Grössen α, β, γ, $\frac{d\gamma}{d\alpha}$, $\frac{d\gamma}{d\beta}$ des allgemeinen Integrals als bestimmte Funktionen von α_1, β_1, ... sich darstellen. Da man aber von diesen fünf Grössen je zwei zwischen den drei Gleichungen I. eliminiren kann, so ist das allgemeine Integral auch durch die drei folgenden Gleichungen ausgedrückt:

$$\text{II.} \qquad \gamma_1 = \varphi_1(\alpha_1\beta_1), \quad \delta_1 = \varphi_2(\alpha_1\beta_1), \quad \varepsilon_1 = \varphi_3(\alpha_1\beta_1),$$

worin aber die drei Funktionen φ_1, φ_2, φ_3 in einer bestimmten Abhängigkeit zu einander stehen. Es hat keine Schwierigkeit, diese Funktionen in derjenigen Gestalt anzugeben, welche ihnen zukommt, sobald man die Funktion φ der Gleichung $\gamma = \varphi(\alpha\beta)$ in einer eigenthümlichen Weise spezialisirt. Lässt man nämlich diese Gleichung in eine identische übergehen, nachdem man die in γ vorkommenden Veränderlichen $zyxw$ durch willkührliche Beständige ersetzt hat, so versteht sich, dass auch die beiden Gleichungen:

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = \frac{d\varphi}{d\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{d\varphi}{d\beta}$$

identisch sind, sobald man jene Beständigen an die Stelle der Veränderlichen einsetzt. Auch die aus diesen drei Gleichungen abgeleiteten Gleichungen II. werden dann identisch sein. Es kommt also darauf an, die Funktionen φ_1, φ_2, φ_3 so anzugeben, dass man identische Gleichungen vor sich hat, nachdem man an die Stelle der Veränderlichen $zyxw$ willkührliche Beständige eingesetzt hat. In dieser Absicht ersetze man die drei Differentialquotienten $z_y z_x z_w$ in $\gamma_1 \delta_1 \varepsilon_1$ durch die beiden Funktionen α_1 und β_1, indem man mit Hilfe der drei Gleichungen:

$$\psi = 0, \quad \alpha_1 = a, \quad \beta_1 = b$$

diese Differentialquotienten eliminirt, und nach vollzogener Elimination wieder α_1 und β_1 an die Stelle von a und b bringt. Schreibt man die so entstehenden Gleichungen in der Form:

$$\psi_1(\alpha_1\beta_1 zyxw) = \varphi_1(\alpha\beta),$$

$$\psi_2(\alpha_1\beta_1 zyxw) = \varphi_2(\alpha\beta),$$

$$\psi_3(\alpha_1\beta_1 zyxw) = \varphi_3(\alpha\beta);$$

wo $\psi_1\, \psi_2 \psi_3$ bekannte Funktionen sind, so hat man offenbar die Funktionen $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ in der verlangten Weise bestimmt, wenn man sich der drei Gleichungen:

$$\psi_1(\alpha_1\beta_1 zyxw) = \psi_1(\alpha_1\beta_1 cc_1 c_2 c_3),$$

$$\psi_2(\alpha_1\beta_1 zyxw) = \psi_2(\alpha_1\beta_1 cc_1 c_2 c_3),$$

$$\psi_3(\alpha_1\beta_1 zyxw) = \psi_3(\alpha_1\beta_1 cc_1 c_2 c_3)$$

bedient. Von den vier willkührlichen Beständigen $cc_1 c_2 c_3$ kann noch eine gestrichen werden, und die Elimination von α_1 und β_1 führt zu einem vollständigen Integral. Diesen Weg also hat Jacobi eingeschlagen.

Man muss zugeben, dass das vollständige Integral, welches nach der Jacobi'schen Regel gebildet worden ist, eine schwierige Form haben kann, während man doch im Stande ist, vollständige Integrale in einfacher Form darzustellen, wenn es freisteht, jene Funktion φ irgend anders wie zu bestimmen als es jene Regel verlangt. Bei der Darstellung des allgemeinen Integrals wird man aber aus der unzähligen Menge vollständiger Integrale demjenigen den Vorzug geben, welches durch die einfachste Funktion ausgedrückt ist. Denn dadurch wird der Gebrauch des allgemei-

nen Integrals möglichst erleichtert. Nun lässt sich zwar einwenden, dass ja das allgemeine Integral, wie man auch immer dazu gelangt sein mag, alle möglichen vollständigen Integrale umfasse. Wenn man aber bedenkt, dass sich keine Regel geben lässt, wornach man aus dem allgemeinen Integral ein möglichst einfaches vollständiges Integral ableitet; wenn man bedenkt, dass jene Eliminationen, welche nach Jacobi zu einem vollständigen Integral führen, allein schon weitläufige Rechnungen veranlassen, oder auch gar nicht mehr durchgeführt werden können, so überzeugt man sich, dass die übrigen Systeme von Differentialgleichungen, worauf Jacobi keine Rücksicht nehmen will, **gerade das geeignetste Mittel sind**, um aus dem Integral des ersten Systems ein vollständiges Integral in vortheilhafter Form darzustellen. Denn wenn man gleichzeitig auch die übrigen Systeme gebraucht, so hat man volle Freiheit in der Wahl der Funktion φ, so dass man unmittelbar zu allen möglichen vollständigen Integralen gelangen kann. Wenn man nun aber jenen andern von Lagrange angebahnten Weg verfolgt, so verdankt man eben dieser Freiheit in der Wahl der Funktion φ nach einer andern Seite hin noch weitere Vereinfachungen der Rechnung, welche mit der Pfaff'schen Methode unvereinbar sind, da man dort bei der wirklichen Bestimmung des vollständigen Integrals die Integration der verschiedenen Systeme meist nur theilweise durchzuführen braucht, was die Pfaff'sche Methode niemals gestattet.

Was nun die partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung betrifft, so denkt man sich das allgemeine Integral als eine endliche Gleichung, welche zwei von einander unabhängige willkührliche Funktionen einschliesst. Jede dieser Funktionen ist willkührlich nach einer einzigen veränderlichen Grösse, wenn die partielle Differentialgleichung nur drei Veränderliche hat. Im Allgemeinen, wenn $n+1$ Veränderliche vorkommen, enthält jede der beiden willkührlichen Funktionen $n-1$ veränderliche Grössen. Es ist zwar noch nicht gelungen nachzuweisen, dass sich für jede partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung eine endliche Gleichung der Art findet, und es möchte nicht einmal leicht sein, sich allgemein zu überzeugen, dass, wenn eine solche endliche Gleichung besteht, Alles dasjenige daraus abgeleitet werden kann, was der Differentialgleichung überhaupt genügt; allein ich glaube, dass man dies Kriterium für die Allgemeinheit der Integralform dennoch festhalten soll, so lange wenigstens als man nicht im Stande ist, wenn auch nur an speziellen Beispielen den Beweis für dessen Unzulänglichkeit beizubringen. Ich habe desshalb auch geglaubt, die Darstellung einer endlichen Gleichung mit zwei der-

artigen willkührlichen Funktionen als das Ziel meiner Untersuchungen in diesem Theil der Integralrechnung betrachten zu dürfen.

Bei der Bestimmung des allgemeinen Integrals zerfallen die partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung zunächst in zwei Klassen, je nachdem dieselben ein erstes Integral besitzen oder nicht. Wenn ein erstes Integral vorhanden ist, oder wenn die partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung auf eine von der ersten Ordnung zurückführt von solcher Allgemeinheit, dass man durch die zweite Integration zu einer endlichen Gleichung gelangt, welche die obigen Anforderungen leistet, so kann dasselbe zunächst in der Form $\varphi(\alpha\beta\gamma\ldots.) = 0$ vorausgesetzt werden, worin φ eine willkührliche Funktion, $\alpha\beta\gamma\ldots.$ aber bestimmte Funktionen der Veränderlichen und der Differentialquotienten erster Ordnung sind. Die Anzahl dieser Funktionen ist dann immer um die Einheit kleiner als die der Veränderlichen. Dieselben müssen so bestimmt werden, dass jede von ihnen gleichzeitig mehreren partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades genügt. Allein diejenigen Fälle, in welchen ein solches Integral zu Stande kommt, vereinzeln sich schnell, wenn die Anzahl der Veränderlichen zunimmt. In der That hat man bei drei Veränderlichen nur zwei solcher partiellen Differentialgleichungen; wenn aber $n+1$ Veränderliche vorkommen, so giebt es deren $\frac{n(n-1)}{1.2} + 1$. Das erste Integral kann übrigens auch noch anders beschaffen sein. Die allgemeinste Form, in welcher dasselbe auftritt, ist in ganz ähnlicher Weise gebildet wie das allgemeine Integral einer partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung von höherem Grade. Für drei Veränderliche z. B. hat man die Form $\beta = \varphi(\alpha)$ wo φ eine willkührliche Funktion, β aber eine bestimmte Funktion der drei Veränderlichen, der beiden Differentialquotienten erster Ordnung und der Grösse α ist, welche selbst aus der Gleichung $\frac{d\beta}{d\alpha} = \varphi'(\alpha)$ berechnet wird. Zur Bestimmung der Funktion β hat man auch hier wieder partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades.

Grössere Schwierigkeiten stehen der Integration partieller Differentialgleichungen der zweiten Ordnung entgegen, wenn es kein erstes Integral giebt. Monge und Legendre haben gezeigt, wie man für gewisse Fälle das allgemeine Integral darstellt. Man kann darüber nachlesen in Lacroix, Tom II. p. 622—632. Die oben angegebenen Hilfsmittel haben mich in den Stand gesetzt, diese Resultate wesentlich zu erweitern, und auf die allgemeinste partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung aus-

zudehnen. Wenn ich dasjenige abrechne, was man über die Integration der linearen Differentialgleichungen weiss, so beruht Alles, was sich bis dahin erreichen lässt, auf der Darstellung der vollständigen Differentialgleichung:

$$dz = z_y dy + z_x dx + \ldots.$$

oder auch der vollständigen Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2} dx^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy} dxdy + \frac{d^2z}{dy^2} dy^2 + \ldots.$$

Um aber die Differentialquotienten der ersten Ordnung als Funktionen der Veränderlichen oder auch die Differentialquotienten der zweiten Ordnung als Funktionen der Veränderlichen und der Differentialquotienten der ersten Ordnung darzustellen, hat man andere partielle Differentialgleichungen der zweiten Ordnung herzustellen; und der Erfolg des hier angedeuteten Verfahrens ist davon abhängig, dass es gelingt, die neue partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung durch die bekannten Hilfsmittel zu integriren.

Wie die Integration der vollständigen Differentialgleichung der ersten Ordnung mit $n+1$ Veränderlichen:

$$Zdz + Ydy + Xdx + Wdw + \ldots. = 0$$

von der Bestimmung einer Funktion abhängt, welche gleichzeitig die n Differentialgleichungen der ersten Ordnung:

$$Z\frac{dz}{dy} + Y = 0, \quad Z\frac{dz}{dx} + X = 0, \quad Z\frac{dz}{dw} + W = 0 \text{ u. s. w.}$$

befriedigt, ebenso führt auch die Integration der vollständigen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$Zd^2z + Ydy^2 + 2Vdydx + Xdx^2 + \ldots. = 0$$

worin $Z\,Y\,X\,V\ldots.$ bestimmte Funktionen der Veränderlichen und der Differentialquotienten erster Ordnung sind, auf die Bestimmung derjenigen Funktion, welche gleichzeitig mehreren partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung Genüge leistet. Man hat nämlich hier die Differentialgleichungen:

$$Z\frac{d^2z}{dy^2} + Y = 0, \quad Z\frac{d^2z}{dxdy} + V = 0, \quad Z\frac{d^2z}{dx^2} + X = 0, \text{ u. s. w.,}$$

so dass also jeder einzelne Differentialquotient der zweiten Ordnung als bestimmte Funktion der Veränderlichen und der Diffe-

rentialquotienten erster Ordnung vorliegt. Aber auch diese Aufgabe ist von der Bestimmung derjenigen Funktion abhängig, welche gleichzeitig mehreren partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades entspricht. Wenn die Anzahl der Veränderlichen wieder $n+1$ ist, so liegen n derartige partielle Differentialgleichungen vor.

Wenn diejenige Funktion verlangt wird, welche gleichzeitig mehreren partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung entspricht, für welche kein erstes Integral besteht, wenn aber die Anzahl dieser Differentialgleichungen kleiner ist als die Anzahl der Differentialquotienten zweiter Ordnung, so ist die Aufgabe nicht wesentlich schwieriger. Man gelangt hier wieder zu partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades, indem man die fehlenden partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung aufsucht, welche zur Darstellung der vollständigen Differentialgleichung der zweiten Ordnung erforderlich sind.

Wenn ich in diesem Vorwort eine gedrängtere Uebersicht über die Beschaffenheit meiner Resultate gegeben habe und über die Art und Weise, wie ich dazu gelangt bin, wenn ich darin eine Vergleichung mit den bis dahin bekannten Untersuchungen anstellen wollte, so war es doch mein Wunsch, dass meine Schrift auch bei Anderen einer günstigen Aufnahme sich erfreuen könne, welche, mit den darin behandelten Gegenständen nicht vertraut, die vorausgehenden Zeilen weniger verständlich finden möchten. Ich dachte desshalb in einem einleitenden Abschnitte die allgegemeine Aufgabe, welche in der vorliegenden Abhandlung gelöst werden soll, nochmals vorlegen und in ihre Hauptbestandtheile aus einander setzen zu müssen. Da ich bemüht war, die verschiedenartigen Hilfsmittel, welche zur Lösung führen, in einen organischen Zusammenhang zu bringen, so glaubte ich, dass die folgende Anordnung der hier vorkommenden Untersuchungen die geeignetste sei. Zunächst habe ich diejenige Funktion bestimmt, welche gleichzeitig mehreren Differentialgleichungen der ersten Ordnung genügt, von denen jede nur zwei Veränderliche hat. In einem weiteren Abschnitte habe ich die partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades integrirt, und zugleich das Verfahren angegeben, wodurch man zu derjenigen Funktion gelangt, welche gleichzeitig mehreren solcher partiellen Differentialgleichungen Genüge leistet. Der nächstfolgende Abschnitt ist der Integration verschiedener Systeme von Differentialgleichungen gewidmet. In dem fünften Abschnitte findet sich die Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von höherem Grade. Die partiellen Differentialgleichungen der zwei-

ten Ordnung zerfallen in zwei natürliche Gruppen, je nachdem es ein erstes Integral giebt oder nicht. Diese Eintheilung hat denn zwei weitere Abschnitte in der vorliegenden Abhandlung zur Folge.

I. Zerlegung der vorliegenden Aufgabe in ihre Hauptbestandtheile.

Jede Gleichung, welche eine Abhängigkeit ausdrückt zwischen den Differentialen zweier oder mehrerer Grössen, heisst Differentialgleichung. Im Gegensatz damit spricht man von einer endlichen Gleichung, wenn dieselbe von Differentialen frei ist. Diejenigen Grössen, deren Differentiale in der Gleichung vorkommen, heissen die Veränderlichen; dagegen wird jede andere Grösse eine Beständige genannt. Die höchste Ordnung der vorkommenden Differentiale bestimmt die Ordnung der Differentialgleichung. Demnach hat man eine Differentialgleichung der ersten Ordnung, wenn nur Differentiale der ersten Ordnung vorkommen; die Differentialgleichung heisst eine der zweiten Ordnung, wenn sie Differentiale der zweiten Ordnung enthält u. s. w. Der Grad der Differentialgleichung richtet sich nach dem Exponenten, unter welchem die Differentiale der höchsten Ordnung stehen. So heisst z. B. die Differentialgleichung der zweiten Ordnung jedesmal eine des ersten Grades, wenn die Differentiale der zweiten Ordnung nur linear vorkommen.

Wenn mehrere Differentialgleichungen vorliegen, so entsteht vor Allem die Frage, wie viele endliche Gleichungen daraus hervorgehen sollen. Denn die Anzahl dieser endlichen Gleichungen braucht nicht übereinzustimmen mit der Anzahl der Differentialgleichungen. Die Differentialgleichungen lassen sich dann jedesmal so herrichten, dass die Differentiale nicht anders als in den Differentialquotienten von eben so vielen Veränderlichen vorkommen als endliche Gleichungen vorausgesetzt werden. Diese Veränderlichen heissen die abhängigen, während alle übrigen Veränderlichen die unabhängigen genannt werden, weil die ersteren als Funktionen der letzteren aus den endlichen Gleichungen sich berechnen lassen. Jede Differentialgleichung aber, deren Differentiale nur in Differentialquotienten eine Stelle finden, heisst partiell. Wenn nur eine einzige unabhängige Veränderliche da ist, so lassen sich die Differentialgleichungen unmittelbar so anschreiben, dass man ausser den Differentialquotienten keine Differentiale mehr hat. Man spricht aber von partiellen Differentialgleichungen zum

Unterschied von solchen Differentialgleichungen, worin die Differentiale in anderer Weise vorkommen, insbesondere nur dann, wenn mehr als eine unabhängige Veränderliche vorhanden ist, da dann die Umwandlung in partielle nicht mehr so unmittelbar sich bewerkstelligen lässt. Die partiellen Differentialgleichungen aber, in diesem Sinne aufgefasst, sind Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. Die Integralrechnung stellt sich die Aufgabe, alle endlichen Gleichungen aufzustellen, welche den partiellen Differentialgleichungen Genüge leisten, wenn man sich derselben bedient, um die abhängigen Veränderlichen aus diesen Differentialgleichungen zu eliminiren.

Ich betrachte zunächst den Fall, dass nur eine einzige partielle Differentialgleichung vorliegt, und dass es auch nur eine einzige endliche Gleichung giebt. Die Integralrechnung kommt da immer zum Ziel, indem sie die allgemeinste endliche Gleichung bestimmt, woraus die vorliegende partielle Differentialgleichung abgeleitet werden kann. Diese endliche Gleichung heisst das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung. Es ist leicht, diejenigen Rechnungsoperationen zu übersehen, wodurch man die partielle Differentialgleichung aus dem allgemeinen Integral ableitet. Denn das allgemeine Integral schliesst gewisse willkührliche Grössen ein, welche in der Differentialgleichung fehlen. Man wird also das allgemeine Integral denjenigen Differentiationen unterwerfen, wodurch die in der partiellen Differentialgleichung vorkommenden Differentialquotienten entstehen, um aus allen den Gleichungen, welche dann vorliegen, das Willkührliche zu eliminiren. Nachdem man zur Kenntniss des allgemeinen Integrals gelangt ist, hat man die weitere Aufgabe, alle Werthe der abhängigen Veränderlichen daraus abzuleiten, welche die vorhin verlangte Eigenschaft besitzen.

Wenn man eine endliche Gleichung einmal oder auch mehrmal nach einander differentiirt, so werden alle Werthe der abhängig gedachten Veränderlichen, welche der endlichen Gleichung Genüge leisten, jedesmal auch den so entstehenden Differentialgleichungen genügen, welcher Faktor auch immer nach der Differentiation wegfallen mag. Wenn $s=0$ der endlichen Gleichung genügt, so dass diese in der Form $\alpha s=0$ angeschrieben werden kann, wo α irgend eine andere Funktion der Veränderlichen ist, wenn ferner $yx\ldots$ die unabhängigen Veränderlichen sind, so zeigen sich jene Differentialgleichungen in der Form:

$$(\alpha s)_y=0,\quad (\alpha s)_x=0,\quad (\alpha s)_{yy}=0,\quad (\alpha s)_{xy}=0,\quad (\alpha s)_{xx}=0 \text{ u. s. w.}$$

Die erwähnte Eigenschaft der Funktion s hat aber darin ihren

Grund, dass jede dieser Differentialgleichungen wenigstens einen der Quotienten:

$$\frac{s_y}{s}, \quad \frac{s_x}{s}, \quad \frac{s_{yy}}{s}, \quad \frac{s_{xy}}{s}, \quad \frac{s_{xx}}{s} \ldots.$$

einschliesst, von denen jeder für sich in $\frac{0}{0}$ übergeht, sobald man die abhängige Veränderliche mittels $s=0$ eliminirt. Auch jede andere Differentialgleichung, welche man aus den vorliegenden ableitet, indem man irgend welche Grösse daraus eliminirt, wird durch $s=0$ erfüllt sein. Denn die endliche Gleichung lässt sich jedesmal in einer solchen Form $\alpha=0$ anschreiben, dass eine von den Grössen, durch deren Elimination die partielle Differentialgleichung herbeigeführt wird, in allen daraus abgeleiteten Differentialgleichungen

$$\alpha_y=0, \quad \alpha_x=0, \quad \alpha_{yy}=0, \quad \alpha_{xy}=0, \quad \alpha_{xx}=0 \text{ u. s. w.}$$

nicht mehr vorkommt. Man erreicht dies immer dadurch, dass man jene Grösse aus der endlichen Gleichung entwickelt, mag dieselbe nun eine willkührliche Beständige oder mag sie eine willkührliche Funktion sein. Nachdem man die endliche Gleichung aber in der angegebenen Weise angeschrieben hat, so ist dieselbe bei der Darstellung der partiellen Differentialgleichung entbehrlich geworden; denn man bedarf zur Elimination des Willkührlichen nur noch der daraus abgeleiteten Differentialgleichungen. Daraus schliesst man, dass alle diejenigen Werthe der abhängigen Veränderlichen, welche der endlichen Gleichung genügen, auch jede partielle Differentialgleichung, welche irgend wie daraus abgeleitet ist, befriedigen werden. Diejenigen Funktionen, welche eine partielle Differentialgleichung befriedigen, weil sie auch dem allgemeinen Integral genügen, nachdem man die darin vorkommenden willkührlichen Grössen irgend wie bestimmt hat, werden besondere Integrale genannt.

Nun giebt es aber noch andere Funktionen, welche zwar auch die partielle Differentialgleichung befriedigen, nicht aber deren allgemeines Integral, wie man auch immer die willkührlichen Grössen darin spezialisiren mag. Man hat solche Funktionen besondere Auflösungen der partiellen Differentialgleichungen genannt. Doch lassen sich auch diese nach bekannten Regeln aus dem allgemeinen Integral ableiten.

Aus der Gleichung $\alpha s^m+\beta=0$, worin α, β und s irgend Funktionen der Veränderlichen sind, m aber ein zwischen 0 und 1

liegender Exponent, ergeben sich die folgenden Differentialgleichungen:

$$m\alpha\frac{s_y}{s} + \alpha_y + s^{-m}\beta_y = 0, \quad m\alpha\frac{s_x}{s} + \alpha_x + s^{-m}\beta_x = 0, \text{ u. s. w.}$$

Man übersieht leicht, dass allen diesen Differentialgleichungen durch $s = 0$ Genüge geschieht, obgleich die endliche Gleichung dadurch unerfüllt bleibt. Auch auf andere Differentialgleichungen, welche durch die Elimination irgend welcher Grössen aus den vorliegenden entstehen, wird diese Eigenschaft übergehen. Doch muss hierbei bemerkt werden, dass die Gleichung $s = 0$ zuweilen nicht mehr genügt, wenn die partielle Differentialgleichung die erste Ordnung übersteigt. Dies erklärt sich nämlich daraus, dass diejenigen Funktionen, welche man für die Quotienten

$$\frac{s_y}{s}, \frac{s_x}{s}, \frac{s_{yy}}{s}, \frac{s_{xy}}{s}, \frac{s_{xx}}{s} \ldots.$$

aus den obigen Differentialgleichungen entwickelt, durch die Annahme $s = 0$ nicht einen endlichen Werth erhalten, sondern in ∞ übergehen. Es lassen sich desshalb Differentialgleichungen höherer Ordnung bilden, deren Glieder, nachdem man einen gemeinsamen Nenner gestrichen hat, für $s = 0$ zum Theil verschwinden, zum Theil aber endlich bleiben. Um nun zu besonderen Auflösungen der partiellen Differentialgleichung zu gelangen, wird man das allgemeine Integral zunächst in jener Form $\alpha = 0$ anschreiben, so dass durch die Differentiation sogleich eine der willkührlichen Grössen wegfällt. Wenn dann neben andern veränderlichen Gliedern auch solche vorkommen, welche mit dem Faktor s^m verbunden sind, so erhält man durch die verschiedenen Gleichungen $s = 0$ alle besondere Auflösungen. Wenn die partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung angehört, so genügt jedesmal $s = 0$; wenn man aber eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung hat, so bedarf dies noch der Bestätigung.

Wenn eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung vorliegt, so gelangt man zu noch anderen besonderen Auflösungen, welche von den soeben aufgefundenen in einem wesentlichen Punkte abweichen. Die verschiedenen Differentialgleichungen der ersten Ordnung

$$\alpha_y = 0, \quad \alpha_x = 0, \text{ u. s. w.}$$

lassen sich nämlich so umwandeln, dass eben so viele willkührliche Grössen schon in den daraus abgeleiteten Differentialgleichungen der zweiten Ordnung nicht mehr vorkommen. Um die

partielle Differentialgleichung darzustellen, reicht man dann immer mit den letzteren aus. Wenn nun aber die in der angegebenen Weise umgewandelten Differentialgleichungen der ersten Ordnung neben andern veränderlichen Gliedern auch solche enthalten, welche mit dem Faktor s^m verbunden sind, wo m wieder ein zwischen 0 und 1 liegender Exponent ist, so erhält man durch diese Gleichungen $s=0$ offenbar eine andere Klasse von besonderen Auflösungen, da diese den aus $\alpha=0$ abgeleiteten Differentialgleichungen der ersten Ordnung nicht genügen.

Wenn es als ausgemacht angenommen wird, dass man der partiellen Differentialgleichung nur durch solche Werthe der abhängigen Veränderlichen genügt, welche auch die vorhin aus dem allgemeinen Integral $\alpha=0$ abgeleiteten Differentialgleichungen oder doch einige davon befriedigen, nachdem man die willkührlichen Grössen angemessen bestimmt hat, so unterliegt es keinem Zweifel, dass man auf dem angegebenen Wege zu allen Funktionen gelangt, welche der partiellen Differentialgleichung genügen. Denn man weiss, dass man auf eben diesem Wege alle diejenigen Funktionen erschöpft, welche den aus $\alpha=0$ abgeleiteten Differentialgleichungen genügen. Man sieht zugleich ein, in wiefern die allgemeine Aufgabe, welche sich die Integration der partiellen Differentialgleichungen stellt, als gelöst betrachtet werden kann, nachdem man das allgemeine Integral bestimmt hat.

Da man aus einer endlichen Gleichung mit mehr als zwei Veränderlichen verschiedene partielle Differentialgleichungen ableiten kann, so versteht es sich, dass auch umgekehrt mehrere partielle Differentialgleichungen auf ein und dieselbe endliche Gleichung hindeuten können. Bei der Darstellung aller derjenigen Funktionen, von denen jede gleichzeitig die verschiedenen partiellen Differentialgleichungen befriedigt, kommt es begreiflicher Weise auf die Bestimmung der allgemeinsten endlichen Gleichung an, woraus die vorliegenden partiellen Differentialgleichungen sich ableiten lassen. Die neue Aufgabe steht in naher Beziehung zu der vorigen, welche das allgemeine Integral einer einzigen partiellen Differentialgleichung zu bestimmen hat. Denn wenn man die willkührlichen Grössen in dem allgemeinen Integral irgend einer der vorliegenden partiellen Differentialgleichungen so angiebt, dass dasselbe zugleich den übrigen Differentialgleichungen genügt, so hat man offenbar diejenige Gleichung, woraus alle jene partiellen Differentialgleichungen abgeleitet werden können.

Noch eine dritte Aufgabe soll in diesen Blättern ihre Lösung finden. Wenn nämlich mehrere partielle Differentialgleichungen

vorliegen, welche auf mehr als eine endliche Gleichung hinweisen, da dann mehrere abhängige Veränderliche auftreten, so wird man nach der allgemeinsten Form jener endlichen Gleichungen fragen, woraus alle diese Differentialgleichungen sich ableiten lassen. Nun könnte man zwar einwenden, dass man hier durch die Elimination von abhängigen Veränderlichen andere Differentialgleichungen mit nur einer einzigen abhängigen Veränderlichen darstellen könne, und dass also die Lösung dieser Aufgabe eigentlich durch die Differentialrechnung vermittelt werde. Allein es zeigt sich, dass man hier auch noch auf andere Weise Differentialgleichungen herbeiführen kann, in denen jedesmal nur eine einzige abhängige Veränderliche auftritt, so dass man zu verschiedenartigen Aufgaben der Integralrechnung geführt wird, je nachdem man den einen oder den anderen Weg einschlägt. In sofern aber nur die Integralrechnung entscheiden kann, welcher von den verschiedenen Wegen den Vorzug verdient, hat man Grund, diese Aufgabe in den Bereich der nachfolgenden Untersuchungen zu ziehen.

II. Integration der vollständigen Differentialgleichung erster Ordnung.

Die Aufgabe, eine endliche Gleichung zwischen den drei Veränderlichen z, y, x zu bestimmen, liegt in ihrer einfachsten Gestalt vor, wenn die Werthe der beiden Differentialquotienten $\frac{dz}{dy}$ und $\frac{dz}{dx}$ einzeln gegeben sind, so, wie man dieselben aus der verlangten Gleichung ableitet, indem man diese das einemal nach z und y, das anderemal nach z und x differentiirt. Die zwei Differentialgleichungen, welche hier gegeben sind, seien bezeichnet durch:

$$1.\quad Z\frac{dz}{dy}+Y=0, \qquad 2.\quad Z\frac{dz}{dx}+X=0,$$

worin Z, Y und X Funktionen der drei Veränderlichen z, y und x sind. Das allgemeine Integral oder die allgemeinste endliche Gleichung, woraus die beiden Differentialgleichungen 1. und 2. gleichzeitig abgeleitet werden können, hat jedenfalls die Form $\beta = c$, worin β eine bestimmte Funktion der drei Veränderlichen, c aber eine willkührliche Beständige ist. Denn die Entstehungsweise der vorliegenden Differentialgleichungen lässt keine allgemeinere endliche Gleichung zu.

Um nun die Funktion β zu bestimmen, integrire man zunächst

die Gleichung 1. Man findet eine Gleichung $\alpha = c$, worin α eine bestimmte Funktion der drei Veränderlichen z, y, x ist, während c eine willkührliche Beständige oder eine willkührliche Funktion von allen den Grössen vorstellt, welche in der Differentialgleichung 1. als Beständige auftreten, und also auch von x. Man schreibe desshalb die Gleichung $\alpha = c$ in der Form $\varphi(\alpha\, x) = c$, wo φ eine willkührliche Funktion ist, die willkührliche Beständige c nun aber von x unabhängig gedacht wird. Die Grösse β ist demnach eine Funktion der beiden Veränderlichen α und x, welche der Differentialgleichung 2. genügen soll. Man setze desshalb in dieser Gleichung an die Stelle von z die neue Veränderliche α ein. Vorhin hat man $\alpha = f(z, y, x)$ bestimmt. Dies differentiire man, und es entsteht:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{df}{dx}.$$

Indem man den Werth $\frac{dz}{dx}$ einsetzt, welcher durch die Gleichung 2. gegeben ist, gelangt man zu der transformirten Gleichung:

$$Z\frac{d\alpha}{dx} + X\frac{df}{dz} - Z\frac{df}{dx} = 0,$$

in deren Coeffizienten noch z mittels $\alpha = f(z\ y\ x)$ zu eliminiren ist. Da aber eine blosse Funktion von α und x zum Vorschein kommen soll, damit die Differentialgleichung 1. erfüllt bleibt, so wird durch die Elimination von z zugleich die Veränderliche y hinwegfallen. Durch die Integration erhält man alsdann das allgemeine Integral $\beta = c$ als bestimmte Funktion der beiden Veränderlichen α und x.

Es ist einleuchtend, dass die Grössen Z, Y, X in den Gleichungen 1. und 2. nicht durch beliebige Funktionen der drei Veränderlichen z, y, x ersetzt werden können. Die Voraussetzung, dass die beiden Differentialgleichungen 1. und 2. aus derselben endlichen Gleichung ihren Ursprung nehmen, hat eine gewisse Abhängigkeit zwischen den Coeffizienten zur Folge. Diese besteht, wie man bei der Bestimmung des allgemeinen Integrals gesehen hat, darin, dass durch die Elimination von z mittels α zugleich die Veränderliche y aus der Gleichung 2. verschwindet, wenn $\alpha = c$ das allgemeine Integral der Gleichung 1. ist. Man kann aber diese Abhängigkeit zwischen den Coeffizienten Z, Y, X auch in einer Gleichung ausdrücken. Es bedarf nur der Elimination der Differentialquotienten von z. Man schreibe die Gleichungen 1. und 2. in der Form:

$$1.\quad \frac{dz}{dy}+\frac{Y}{Z}=0, \qquad 2.\quad \frac{dz}{dx}+\frac{X}{Z}=0.$$

Wenn man die erstere nach z und x, die andere nach z und y differentiirt, so erhält man die beiden:

$$\frac{d^2z}{dydx}+\frac{d\frac{Y}{Z}}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{d\frac{Y}{Z}}{dx}=0,$$

$$\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d\frac{X}{Z}}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{d\frac{X}{Z}}{dy}=0.$$

Man eliminire den Differentialquotienten $\frac{d^2z}{dxdy}$, man setze zugleich die Werthe $\frac{dz}{dy}$ und $\frac{dz}{dx}$ aus den Gleichungen 1. und 2. ein und man hat die verlangte Bedingungsgleichung in der Form:

$$(\alpha)\qquad \frac{d\frac{Y}{Z}}{dz}\frac{X}{Z}-\frac{d\frac{Y}{Z}}{dx}=\frac{d\frac{X}{Z}}{dz}\frac{Y}{Z}-\frac{d\frac{X}{Z}}{dy}.$$

Anstatt der beiden Gleichungen

$$1.\quad Z\frac{dz}{dy}+Y=0, \qquad \text{und} \qquad 2.\quad Z\frac{dz}{dx}+X=0$$

kann man sich auch einer einzigen Differentialgleichung bedienen, welche dieselbe Bedeutung hat wie jene beiden, da sie zu demselben allgemeinen Integral führt. Wenn nämlich die drei Grössen z, y und x in der Gleichung $\beta=c$ gleichzeitig die verschwindenden Aenderungen dz, dy und dx erleiden, oder wenn diese Gleichung gleichzeitig nach den drei Grössen z, y, x differentiirt wird, so entsteht die Differentialgleichung:

$$3.\qquad \frac{d\beta}{dz}dz+\frac{d\beta}{dy}dy+\frac{d\beta}{dx}dx=0.$$

Da nun aber auch die beiden Gleichungen

$$\frac{d\beta}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{d\beta}{dy}=0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d\beta}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{d\beta}{dx}=0$$

bestehen, so lässt sich jene Differentialgleichung 3. in der Form:

$$dz=\frac{dz}{dy}dy+\frac{dz}{dx}dx$$

anschreiben, worin man sich an der Stelle von $\frac{dz}{dy}$ und $\frac{dz}{dx}$ diejenigen Funktionen zu denken hat, welche aus den Differentialgleichungen 1. und 2. sich ergeben. Diese beiden Gleichungen haben demnach einerlei Bedeutung mit der Differentialgleichung:

$$4. \qquad Zdz + Ydy + Xdx = 0,$$

worin von den drei Veränderlichen z, y und x irgend zwei als die unabhängigen betrachtet werden können. Doch muss noch bemerkt werden, dass man diese Gleichung durch keines der Differentiale dz, dy und dx theilen dürfte, um etwa

$$5. \qquad Z\frac{dz}{dx} + Y\frac{dy}{dx} + X = 0$$

zu schreiben. Denn man denkt sich unter dem Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$ jedesmal das Verhältniss zwischen den Differentialen dz und dx, welches entsteht, wenn man die endliche Gleichung $\beta = c$ nach den beiden Grössen z und x differentiirt, so dass also hier die Aenderung dz allein durch die Aenderung dx bedingt ist; und ebenso bedeutet der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ das Verhältniss der Differentiale, welches durch die Gleichung $\frac{d\beta}{dy}dy + \frac{d\beta}{dx}dx = 0$ gegeben ist, so dass also die Aenderung dy allein von der Aenderung dx abhängt. Die Differentialgleichung 4. aber entstand unter der Voraussetzung, dass die Grössen z, y und x die gleichzeitigen Aenderungen dz, dy, und dx erleiden, so dass der Werth der einen Aenderung jedesmal gleichzeitig durch die beiden anderen bedingt ist. Die Gleichung 5. hat demnach eine ganz andere Bedeutung als die Gleichung 4. Die Gleichung 4. aber hat man eine vollständige Differentialgleichung genannt.

Wenn die vollständige Differentialgleichung

$$Zdz + Ydy + Xdx = 0$$

aus einer endlichen Gleichung $\beta = c$ abgeleitet ist, so kann das vollständige Differential

$$\frac{d\beta}{dz}dz + \frac{d\beta}{dy}dy + \frac{d\beta}{dx}dx = 0$$

nur insofern eine Aenderung erlitten haben, als ein gemeinsamer Faktor daraus wegfiel. Die vollständige Differentialgleichung kann

desshalb jedesmal durch einen Faktor $\varkappa$ in ein vollständiges Differential umgewandelt werden. Wenn dieser Faktor bekannt ist, so lässt sich die Integration unmittelbar auf die Quadratur zurückführen. Denn durch die Vergleichung mit dem vollständigen Differential ergeben sich dann zur Bestimmung von β die drei Gleichungen:

$$\frac{d\beta}{dz} = Z\varkappa, \qquad \frac{d\beta}{dy} = Y\varkappa, \qquad \frac{d\beta}{dx} = X\varkappa.$$

Setzt man abkürzend $\int Z\varkappa dz = \beta_1$, so liefert die erste den Werth $\beta = \beta_1 + \gamma$, wo γ eine noch unbekannte Funktion von y und x ist. Daraus folgt aber:

$$\frac{d\beta}{dy} = \frac{d\beta_1}{dy} + \frac{d\gamma}{dy}, \quad \text{oder} \quad \frac{d\gamma}{dy} = Y\varkappa - \frac{d\beta_1}{dy}.$$

Nimmt man abkürzend $\int (Y\varkappa - \frac{d\beta_1}{dy}) dy = \beta_2$, so erhält man hieraus $\gamma = \beta_2 + \beta_3$, wo β_3 eine noch unbekannte Funktion von x ist. Aus der Gleichung $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ folgt dann weiter:

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{d\beta_1}{dx} + \frac{d\beta_2}{dx} + \frac{d\beta_3}{dx}, \quad \text{oder} \quad \frac{d\beta_3}{dx} = X\varkappa - \frac{d\beta_1}{dx} - \frac{d\beta_2}{dx};$$

und die Integration liefert $\beta_3 = \int (X\varkappa - \frac{d\beta_1}{dx} - \frac{d\beta_2}{dx}) dx$, so dass nun das Integral der vollständigen Differentialgleichung in der Form $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = c$ vorliegt.

Der Weg, auf welchem man jedenfalls zu dem Faktor $\varkappa$ gelangt, ist durch das vorhin angegebene Integrationsverfahren vorgezeichnet. Denn wenn λ den integrirenden Faktor der Gleichung $Zdz + Ydy = 0$ bezeichnet, so dass also $Z\lambda = \frac{df}{dz}$ und $Y\lambda = \frac{df}{dy}$ gesetzt werden kann, so geht die vollständige Differentialgleichung, nachdem man dieselbe mit λ multiplizirt hat, über in:

$$\frac{df}{dz} dz + \frac{df}{dy} dy + X\lambda dx = 0.$$

Man bilde aus $\alpha = f(z\, y\, x)$ durch vollständiges Differentiiren:

$$d\alpha = \frac{df}{dz} dz + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dx} dx.$$

Durch die Elimination von $\frac{df}{dz} dz + \frac{df}{dy} dy$ erhält man dann zur Bestimmung von β die Gleichung:

$$d\alpha + (X\lambda - \frac{df}{dx}) dx = 0.$$

Der Coeffizient von dx ist hier eine Funktion von α und x, und man findet den integrirenden Faktor μ als Funktion derselben zwei Veränderlichen, so dass also $\mu = \frac{d\beta}{d\alpha}$ und $(X\lambda - \frac{df}{dx})\ \mu = \frac{d\beta}{dx}$ ist. Das Produkt $\lambda\mu$ aber ist der integrirende Faktor der vollständigen Differentialgleichung:

$$Zdz + Ydx + Xdx = 0.$$

1. Es sei nun

$$2xzdz + 2xydy - (z^2 + y^2 - x^2)\,dx = 0.$$

Aus $zdz + ydy = 0$ folgt $z^2 + y^2 = c$. Das Integral der vollständigen Differentialgleichung ist demnach eine bestimmte Funktion von x und von $\alpha = z^2 + y^2$. Man erhält weiter die Gleichung:

$$xd\alpha - (\alpha - x^2)dx = 0.$$

Durch die Integration entsteht $\frac{\alpha}{x} + x = c$, oder auch $z^2 + y^2 + x^2 = cx$.

2. Es sei

$$(ax - by)\,dz + (bz - cx)\,dy + (cy - az)\,dx = 0.$$

Durch die Integration der Gleichung:

$$(ax - by)\,dz + (bz - cx)\,dy = 0$$

findet man $l(bz - cx) - l(ax - by) = le$, oder auch $\frac{bz - cx}{ax - by} = e$, wo e die willkürliche Beständige ist. Das Integral der vollständigen Differentialgleichung ist demnach eine Funktion von x und von $\alpha = \frac{bz - cx}{ax - by}$. Zu deren Bestimmung findet sich die Gleichung $d\alpha = 0$, und daraus folgt wieder

$$\frac{bz - cx}{ax - by} = e.$$

3. Es sei nun

$$(z - 2xy)(ydz - zdy) + z^3dx = 0.$$

Aus $ydz - zdy = 0$ folgt $\frac{y}{z} = c$. Das gesuchte Integral ist demnach eine Funktion von x und $\alpha = \frac{y}{z}$. Diese bestimmt sich aus der Gleichung:

$$(1 - 2\alpha x)\,d\alpha - dx = 0.$$

Durch die Integration entsteht:

$$xe^{\alpha^2} = \int e^{\alpha^2} d\alpha + c,$$

worin $\frac{y}{z}$ an die Stelle von α wieder einzuführen ist.

4. Es sei noch

$$(x^2 + xy + y^2)\, dz + (x^2 + xz + z^2)\, dy + (y^2 + yz + z^2)\, dx = 0.$$

Man genügt dieser Gleichung durch $x = z$ und $y = z$. Desshalb bringt man mit Vortheil an die Stelle von y und x die neuen Veränderlichen $\frac{x}{z} = u$ und $\frac{y}{z} = v$. Da dann $dx = udz + zdu$ und $dy = vdz + zdv$ ist, so erhält man die neue Gleichung:

$$(uv + u + v)(u + v + 1)\, dz + (u^2 + u + 1)\, zdv + (v^2 + v + 1)\, zdu = 0.$$

Daraus ergiebt sich das vollständige Differential:

$$\frac{dz}{z} + \frac{(u^2 + u + 1)\, dv + (v^2 + v + 1)\, du}{(uv + u + v)(u + v + 1)} = 0,$$

oder auch, wenn man in die partiellen Brüche zerlegt:

$$\frac{dz}{z} + \frac{(u + 1) dv + (v + 1) du}{uv + u + v} - \frac{dv + du}{u + v + 1} = 0.$$

Durch die Integration erhält man die Gleichung:

$$lz + l(uv + u + v) - l(u + v + 1) = lc, \quad \text{oder} \quad \frac{z(uv + u + v)}{u + v + 1} = c.$$

Das allgemeine Integral hat demnach die Form:

$$\frac{xy + xz + yz}{x + y + z} = c.$$

Es sei nun die Aufgabe gestellt, die endliche Gleichung zwischen den vier Veränderlichen z, y, x, w anzugeben, wenn die Differentialquotienten $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dw}$ als Funktionen der Veränderlichen einzeln bekannt sind. Man hat dann die drei Differentialgleichungen:

1. $$Zdz + Ydy = 0,$$
2. $$Zdz + Xdx = 0,$$
3. $$Zdz + Wdw = 0;$$

worin Z, Y, X und W bestimmte Funktionen der Veränderlichen sind, oder auch die vollständige Differentialgleichung:

$$4. \qquad Zdz + Ydy + Ydx + Wdw = 0.$$

Die Integration von $Zdz + Ydy = 0$ führt auf die endliche Gleichung $\alpha = c$, worin α eine bestimmte Funktion der vier Veränderlichen z, y, x und w ist, c aber eine willkührliche Funktion der beiden Veränderlichen x und w, weil diese in der Differentialgleichung 1. als Beständige auftreten. Man schreibe die Gleichung $\alpha = c$ in der Form $\varphi(\alpha\, x\, w) = 0$, und bestimme die Funktion φ in der Weise, dass zunächst auch der Gleichung $Zdz + Xdx = 0$ Genüge geschieht. In dieser Absicht eliminire man die Veränderliche z mit Hilfe der Gleichung $\alpha = f(z\, y\, x\, w)$. Man bilde daraus:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{df}{dz}\,\frac{dz}{dx} + \frac{df}{dx}.$$

Indem man den Werth $\frac{dz}{dx}$ aus der Gleichung 2. hier einsetzt, gelangt man zu der transformirten:

$$2'. \qquad Zd\alpha + (X\frac{df}{dz} - Z\frac{df}{dx})dx = 0,$$

deren Coefficienten als Funktionen von α, x und w sich darstellen lassen. Durch die Integration findet man weiter die endliche Gleichung $\beta = c$, wo β eine bestimmte Funktion von α, x und w, c aber eine willkührliche Funktion von w ist, da dies in der Differentialgleichung 2'. als Beständige auftritt. Man schreibe das Integral der Gleichung 2'. in der Form $\varphi_1(\beta\, w) = 0$, und bestimme die Funktion φ_1 in der Weise, dass auch die Gleichung $Zdz + Wdw = 0$ erfüllt ist. Man eliminire desshalb die Veränderliche z mit Hilfe der Gleichung $\beta = f_1(z\, y\, x\, w)$. Man differentiire dies nach z und w, und es entsteht:

$$\frac{d\beta}{dw} = \frac{df}{dz}\,\frac{dz}{dw} + \frac{df}{dw}.$$

Indem man den Werth $\frac{dz}{dw}$ aus der Gleichung 3. hier einsetzt, erhält man die transformirte:

$$3'. \qquad Zd\beta + (W\frac{df_1}{dz} - Z\frac{df_1}{dw})dw = 0,$$

deren Coefficienten als Funktionen von β und w sich herausstellen. Die Integration liefert das allgemeine Integral der vollständigen Differentialgleichung:

4. $$Zdz + Ydy + Xdx + Wdw = 0$$

in der Form $\gamma = c$, wo γ eine bestimmte Funktion von β und w, c aber eine von den vier Veränderlichen z, y, x und w unabhängige Grösse ist.

Wenn die vollständige Differentialgleichung:

$$Zdz + Ydy + Xdx + Wdw = 0$$

durch Differentiation einer endlichen Gleichung entstanden ist, so bestehen zwischen den Coeffizienten Z, Y, X und W gewisse Beziehungen, welche mit Hilfe der Gleichungen 1., 2. und 3.

$$\frac{dz}{dy} + \frac{Y}{Z} = 0, \quad \frac{dz}{dx} + \frac{X}{Z} = 0, \quad \frac{dz}{dw} + \frac{W}{Z} = 0$$

leicht in Form von Gleichungen ausgedrückt werden. Indem man nämlich je zwei der Gleichungen 1., 2. und 3. verbindet, um die jedesmal vorkommenden Differentialquotienten von z zu eliminiren, so ergeben sich drei verschiedene Bedingungsgleichungen. Zu der obigen Bedingungsgleichung (α) nämlich, welche für die vollständige Differentialgleichung mit nur drei Veränderlichen $Zdz + Ydy + Xdx = 0$ besteht, kommen noch zwei andere hinzu, welche man aus der Gleichung (α) ableiten kann, indem man das einemal die Buchstaben X und x, das anderemal die Buchstaben Y und y gegen die Buchstaben W und w vertauscht.

Man übersieht nun auch leicht, wie man die vollständige Differentialgleichung

$$Zdz + Ydy + Xdx + Wdw + \ldots = 0$$

mit $n+1$ Veränderlichen $zyxw\ldots$ zu integriren hat. Die Anzahl der Bedingungsgleichungen, welche zwischen den Coeffizienten bestehen müssen, damit sich eine endliche Gleichung findet, ist hier durch den Ausdruck $\frac{n(n-1)}{1.2}$ angegeben. Denn die n Gleichungen, wodurch die n Differentialquotienten $\frac{dz}{dy}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dw}\ldots$ als Funktionen der Veränderlichen einzeln gegeben sind, lassen eben so viele Combinationen zu je zweien unter einander zu. Jede dieser Combinationen führt aber eine neue Bedingungsgleichung herbei.

III. Integration der partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades.

Die allgemeinste partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades ist:

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = Z,$$

wo XYZ irgend Funktionen der drei Veränderlichen zyx sind. Man gelangt zu einer solchen Differentialgleichung, indem man die endliche Gleichung $\alpha = 0$ vorerst nach z und y, sodann nach z und x differentiirt, indem man jeder der beiden Gleichungen:

$$1. \qquad \frac{d\alpha}{dz}\,\frac{dz}{dy} + \frac{d\alpha}{dy} = 0,$$

und

$$2. \qquad \frac{d\alpha}{dz}\,\frac{dz}{dx} + \frac{d\alpha}{dx} = 0$$

einen Faktor giebt, welcher selbst als Funktion der Veränderlichen gedacht werden kann, und endlich diese beiden Gleichungen zu einander addirt. Allein die so gebildete Differentialgleichung entspricht, wenn α eine bestimmte Funktion der Veränderlichen ist, nun nicht mehr allein der Gleichung $\alpha = 0$, sondern auch einer unzähligen Menge anderer Gleichungen der Art. Wenn nämlich ein und dieselbe Grösse in zwei verschiedenen Gleichungen vorkommt, und man beabsichtigt, eine andere Gleichung daraus abzuleiten, worin jene Grösse nicht mehr vorkommt, so addirt man dieselben, nachdem man jeder von beiden einen gewissen Faktor gegeben hat. Die vorhin erwähnte Bildungsweise der partiellen Differentialgleichung stimmt aber mit diesem Verfahren überein; und desshalb lässt sich in dem zum Grunde liegenden Integrale eine Grösse annehmen, welche zwar in jenen beiden durch die Differentiation entstehenden Gleichungen noch vorkommt, welche aber durch die oben bezeichnete Operation hinwegfällt. Geht man nun von der Gleichung $\beta + \varphi(\alpha) = 0$ aus, worin α und β bestimmte Funktionen der Veränderlichen sind, während φ eine willkührliche Funktion bezeichnet, so hat man die beiden Differentialgleichungen:

$$\frac{d\beta}{dz}\,\frac{dz}{dy} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\varphi}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dz}\,\frac{dz}{dy} + \frac{d\alpha}{dy}\right) = 0,$$

$$\frac{d\beta}{dz}\,\frac{dz}{dx} + \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\varphi}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dz}\,\frac{dz}{dx} + \frac{d\alpha}{dx}\right) = 0.$$

Giebt man der ersteren den Faktor $\frac{d\alpha}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{d\alpha}{dx}$, der anderen den Faktor $\frac{d\alpha}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{d\alpha}{dy}$, so fällt durch die Subtraktion die willkührliche Funktion $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ weg, und es zeigt sich, dass man auch so wieder zu einer Differentialgleichung von der Form:

$$X\frac{dz}{dx}+Y\frac{dz}{dy}=Z$$

gelangt, worin XYZ bestimmte Funktionen der drei Veränderlichen sind. Man kann auch von der mehr symmetrischen Gleichung $\varphi(\alpha\beta)=0$ ausgehen, wo α und β dieselbe Bedeutung haben, wie vorhin. Denn durch die Differentiation entsteht hier:

$$1. \quad \frac{d\varphi}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{d\alpha}{dy}\right)+\frac{d\varphi}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{d\beta}{dy}\right)=0,$$

$$2. \quad \frac{d\varphi}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{d\alpha}{dx}\right)+\frac{d\varphi}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{d\beta}{dx}\right)=0,$$

und das Resultat der Elimination von $\frac{d\varphi}{d\alpha}:\frac{d\varphi}{d\beta}$ ist identisch mit dem vorigen. Doch ist die letztere Form nicht allgemeiner als die erstere, da man auf diese zurückkommt, wenn man die Gleichung $\varphi(\alpha\beta)=0$ nach β auflöst.

Will man α und β bestimmen, in der Voraussetzung, dass eine endliche Gleichung $\varphi(\alpha\beta)=0$ besteht, so muss man erwägen, dass die partielle Differentialgleichung durch die Elimination von $\frac{d\varphi}{d\alpha}:\frac{d\varphi}{d\beta}$ aus den beiden Gleichungen 1. und 2. entsteht. Wenn man den Differentialquotienten $\frac{dz}{dy}$ zwischen der partiellen Differentialgleichung und der Gleichung 1. eliminirt, so wird man auf die Gleichung 2. kommen; und wenn man die Gleichungen 1. und 2. gleichzeitig benutzt, um die beiden Differentialquotienten $\frac{dz}{dy}$ und $\frac{dz}{dx}$ aus der partiellen Differentialgleichung zu eliminiren, so muss eine identische Gleichung zum Vorschein kommen. Um diese Elimination bequemer durchzuführen, setze man abkürzend $\varphi(\alpha\beta)=\tau$. Dann schreibt man die einfacheren Gleichungen:

$$1. \quad \frac{d\tau}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{d\tau}{dy}=0,$$

und

2. $$\frac{d\tau}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{d\tau}{dx}=0;$$

und durch die Elimination der beiden Differentialquotienten entsteht die Gleichung:

(a) $$X\frac{d\tau}{dx}+Y\frac{d\tau}{dy}+Z\frac{d\tau}{dz}=0,$$

der man also genügt, wenn man τ als Funktion der drei Veränderlichen einsetzt. Da nun aber:

$$\frac{d\tau}{dz}=\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dz}+\frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\beta}{dz},$$

$$\frac{d\tau}{dy}=\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\beta}{dy},$$

$$\frac{d\tau}{dx}=\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\beta}{dx};$$

so geht die Gleichung (a) über in:

$$\frac{d\varphi}{d\alpha}\left(X\frac{d\alpha}{dx}+Y\frac{d\alpha}{dy}+Z\frac{d\alpha}{dz}\right)+\frac{d\varphi}{d\beta}\left(X\frac{d\beta}{dx}+Y\frac{d\beta}{dy}+Z\frac{d\beta}{dz}\right)=0.$$

Wegen des willkührlichen φ kann man derselben nur dadurch genügen, dass man jeden der beiden Faktoren von $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ und $\frac{d\varphi}{d\beta}$ für sich verschwinden lässt. Man hat demnach zur Bestimmung von α und β die beiden Gleichungen:

$$X\frac{d\alpha}{dx}+Y\frac{d\alpha}{dy}+Z\frac{d\alpha}{dz}=0,$$

$$X\frac{d\beta}{dx}+Y\frac{d\beta}{dy}+Z\frac{d\beta}{dz}=0.$$

Es kommt also darauf an, zwei verschiedene Funktionen der Veränderlichen anzugeben, welche beide der Gleichung (a) an der Stelle von τ genügen. Solche Funktionen sind jederzeit möglich, da die Unbekannten α und β ohne Beschränkung alle Grössen aufnehmen dürfen, welche auch in den Coeffizienten der Gleichung (a) eine Stelle finden. Auch wird sich im Laufe der folgenden Untersuchungen noch herausstellen, dass jedesmal nicht weniger als zwei derartige Funktionen bestehen. Wenn aber dies feststeht, so ist der Beweis geliefert, dass die partielle Differentialgleichung $X\frac{dz}{dx}+Y\frac{dz}{dy}=Z$ in allen Fällen aus einer endlichen Gleichung $\varphi(\alpha\beta)=0$ abgeleitet werden kann.

Ein allgemeiner Ausdruck für die beiden Funktionen α und β, welcher in allen Fällen der Gleichung:

(a) $$X\frac{d\tau}{dx}+Y\frac{d\tau}{dy}+Z\frac{d\tau}{dz}=0$$

Genüge leistet, wie auch immer die Veränderlichen in den Coefficienten XYZ vorkommen mögen, ist unmöglich. Jede Lösung, zu der man gelangt, stützt sich auf gewisse Voraussetzungen in Bezug auf die Form der Funktionen X, Y und Z. Für $Z=0$ behält man zur Bestimmung von α und β die einfachere Gleichung:

(a) $$X\frac{d\tau}{dx}+Y\frac{d\tau}{dy}=0.$$

Man genügt hier offenbar durch $\alpha=z$, da dann $\frac{d\alpha}{dx}=0$, und $\frac{d\alpha}{dy}=0$ ist. Die andere Funktion β ergiebt sich durch die Integration der Gleichung:

$$Xdy-Ydx=0,$$

wie auch immer die Veränderliche z in den beiden Coeffizienten vorkommen mag.

1. Für die Gleichung $y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dy}=0$ hat man:

(a) $$y\frac{d\tau}{dx}-x\frac{d\tau}{dy}=0.$$

Daraus folgt $\alpha=z$, und β ergiebt sich aus $ydy+xdx=0$. Man erhält $\beta=y^2+x^2$, und das allgemeine Integral ist:

$$z=\varphi(y^2+x^2).$$

2. Es sei $\frac{dz}{dx}-\psi(z)\frac{dz}{dy}=0$.

Man erhält die Funktion β aus der Gleichung:

$$dy+\psi(z)dx=0.$$

Desshalb ist $\beta=y+x.\psi(z)$; und das allgemeine Integral:

$$y+x.\psi(z)=\varphi(z).$$

Wenn der Coeffizient Z nicht fehlt, so ist die einfachste Annahme, von der man ausgehen kann, die, dass jede der beiden Funktionen α und β nur irgend zwei von den drei Veränderlichen zyx einschliesst. Denn unter dieser Voraussetzung ist die Bestimmung von α und β unmittelbar von der Integration einer Differentialgleichung der ersten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen

abhängig. Nimmt man z. B. an, dass die Funktion α nur x und y enthalte, so dass also $\frac{d\alpha}{dz}=0$ ist, so behält man zur Bestimmung dieser Funktion die einfachere Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad X\frac{d\tau}{dx}+Y\frac{d\tau}{dy}=0,$$

und man findet α durch die Integration von

$$Xdy-Ydx=0.$$

Man erhält aber so eine blosse Funktion von x und y, nur für den Fall, dass die Veränderliche z aus dieser Gleichung durch einen Faktor getilgt werden kann, oder wenn das Verhältniss $\frac{X}{Y}$ von z unabhängig ist. Ganz ebenso schliesst man, dass sich eine Funktion τ findet, worin nur die beiden Veränderlichen z und x eine Stelle finden, wenn der Quotient $\frac{X}{Z}$ von y frei ist; und dass eine Funktion von nur y und z genügt, wenn der Bruch $\frac{Y}{Z}$ die Veränderliche x nicht enthält.

3. Die Gleichung $x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=az$ giebt

$$\text{(a)} \qquad x\frac{d\tau}{dx}+y\frac{d\tau}{dy}+az\frac{d\tau}{dz}=0.$$

Nimmt man $\frac{d\tau}{dz}=0$, so behält man zur Bestimmung von τ die Gleichung:

$$xdy-ydx=0.$$

Daraus folgt $\alpha=ly-lx=l\frac{y}{x}$, oder auch $\alpha=\frac{y}{x}$. Nimmt man $\frac{d\tau}{dy}=0$, so hat man zur Bestimmung von β die Gleichung:

$$xdz-azdx=0.$$

Man findet $\beta=lz-a.lx=l(zx^{-a})$; oder auch $\beta=zx^{-a}$. Das allgemeine Integral zeigt sich demnach in der Form:

$$z=x^a\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Nimmt man $\frac{d\tau}{dx}=0$, so erhält man eine dritte Funktion aus

$$ydz-azdy=0,$$

nämlich $\gamma = zy^{-a}$. Man sieht aber leicht ein, dass dies γ selbst eine Funktion von α und β ist. Man hat nämlich $\gamma = \beta\alpha^{-a}$.

4. Es sei nun $x^2\frac{dz}{dx} + y^2\frac{dz}{dy} = z^2$. Man hat hier:

$$x^2\frac{d\tau}{dx} + y^2\frac{d\tau}{dy} + z^2\frac{d\tau}{dz} = 0.$$

Nimmt man $\frac{d\tau}{dz} = 0$, so findet man die Funktion α aus

$$x^2dy - y^2dx = 0.$$

Daraus folgt $\alpha = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. Nimmt man aber $\frac{d\tau}{dy} = 0$, so hat man zur Bestimmung von β die Gleichung:

$$x^2dz - z^2dx = 0.$$

Man erhält $\beta = \frac{1}{x} - \frac{1}{z}$. Das allgemeine Integral ist demnach:

$$\varphi\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y},\ \frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right) = 0.$$

Für $\frac{d\tau}{dx} = 0$ findet man eine dritte Funktion $\gamma = \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$. Es ist aber $\gamma = \beta - \alpha$.

5. Es sei noch $(z\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy})\psi''(z) = 1$. Man hat hier:

$$\text{(a)} \qquad z\psi''(z)\frac{d\tau}{dx} - \psi''(z)\frac{d\tau}{dy} + \frac{d\tau}{dz} = 0.$$

Nimmt man das einemal $\frac{d\tau}{dx} = 0$, das anderemal $\frac{d\tau}{dy} = 0$, so hat man zur Bestimmung von α und β die beiden Gleichungen:

$$dy + \psi''(z)dz = 0, \quad \text{und} \quad dx - z\psi''(z)dz = 0.$$

Durch die Integration erhält man:

$$\alpha = y + \psi'(z), \quad \text{und} \quad \beta = x - z\psi'(z) + \psi(z);$$

und man hat das allgemeine Integral

$$x - z.\psi'(z) + \psi(z) = \varphi(y + \psi'(z)).$$

Wenn die eine Funktion α des allgemeinen Integrals $\varphi(\alpha\beta) = 0$ bekannt ist, so hat es keine Schwierigkeit, die andere Funktion β

aus einer Differentialgleichung der ersten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen zu bestimmen, auch wenn dieselbe die drei Veränderlichen z, y und x gleichzeitig einschliesst. Es versteht sich, dass man der Gleichung

$$\text{(a)} \qquad X\frac{d\tau}{dx} + Y\frac{d\tau}{dy} + Z\frac{d\tau}{dz} = 0$$

nur dann durch $\beta = z$ genügt, wenn der Coeffizient Z verschwindet. Wenn nun in dieser Differentialgleichung an die Stelle von z jene Funktion α als Veränderliche eingesetzt wird, so dass also das allgemeine Integral $\tau = 0$ nicht mehr als Funktion von z, y und x, sondern als Funktion von α, y und x auftritt, so ist die Veränderliche α selbst die eine Funktion des allgemeinen Integrals, und daraus folgt, dass der Coeffizient von $\frac{d\tau}{d\alpha}$ in der transformirten Gleichung verschwindet. Man hat, da dann

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{d\tau}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\tau}{dx}, \quad \frac{d\tau}{dy} = \frac{d\tau}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\tau}{dy}, \quad \frac{d\tau}{dz} = \frac{d\tau}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dz}$$

einzusetzen ist, die folgende Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad X\frac{d\tau}{dx} + Y\frac{d\tau}{dy} + \left(X\frac{d\alpha}{dx} + Y\frac{d\alpha}{dy} + Z\frac{d\alpha}{dz}\right)\frac{d\tau}{d\alpha} = 0.$$

Da nun aber nach der Annahme die identische Gleichung:

$$X\frac{d\alpha}{dx} + Y\frac{d\alpha}{dy} + Z\frac{d\alpha}{dz} = 0$$

besteht, so bleibt in der That die einfachere Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad X\frac{d\tau}{dx} + Y\frac{d\tau}{dy} = 0,$$

in deren Coeffizienten noch z mittels α zu eliminiren ist. Die Grösse α tritt hier als Beständige auf, und man findet die zweite Funktion β durch die Integration von:

$$Xdy - Ydx = 0,$$

als eine Funktion von x, y und α. Nachdem man irgend wie die eine Funktion α aufgefunden hat, entwickle man daraus eine von den drei Veränderlichen z, y und x, wie dies gerade am besten geschehen kann, und setze diesen Werth in die Coeffizienten der Gleichung (a) ein. Man setze dasjenige Glied gleich Null, welches mit dem partiellen Differentialquotienten von τ nach der zu eli-

minirenden Veränderlichen verbunden ist; und man hat dann eine Differentialgleichung der ersten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen, um die zweite Funktion β zu bestimmen. Da man so jedenfalls zu einer Funktion β gelangt, welche verschieden ist von der Funktion α, so ist hiermit zugleich nachgewiesen, dass es jederzeit zwei verschiedene Funktionen der drei Veränderlichen z, y, x giebt, welche der Gleichung (a) Genüge leisten.

6. Es sei $\frac{dz}{dx}+a\frac{dz}{dy}=\psi'(y+ax)$. Man hat hier die Gleichung:

$$\frac{d\tau}{dx}+a\frac{d\tau}{dy}+\psi'(y+ax)\frac{d\tau}{dz}=0.$$

Man erhält α aus $dy-adx=0$, und desshalb ist $\alpha=y-ax$. Man eliminire y und man behält die Gleichung:

$$\frac{d\tau}{dx}+\psi'(\alpha+2ax)\frac{d\tau}{dz}=0.$$

Durch die Integration von $dz-\psi'(\alpha+2ax)dx=0$ findet man $\beta=2az-\psi(\alpha+2ax)=2az-\psi(y+ax)$; und das allgemeine Integral schreibt sich in der Form:

$$2az=\psi(y+ax)+\varphi(y-ax)$$

7. Für die Gleichung $x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ hat man:

$$\text{(a)}\qquad x\frac{d\tau}{dx}+y\frac{d\tau}{dy}+x.\psi\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{d\tau}{dz}=0.$$

Man findet zunächst $\alpha=\frac{y}{x}$. Durch die Elimination von y entsteht:

$$\frac{d\tau}{dx}+\psi(\alpha)\frac{d\tau}{dz}=0.$$

Die Integration von $dz-\psi(\alpha)\,dx=0$ liefert

$$\beta=z-x\psi(\alpha)=z-x\psi\left(\frac{y}{x}\right);$$

und das allgemeine Integral ist:

$$z=x\psi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

8. Es sei nun $y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dy}=az$. Man hat hier:

(a) $$y\frac{d\tau}{dx} - x\frac{d\tau}{dy} + az\frac{d\tau}{dz} = 0.$$

Die Funktion α ergiebt sich aus der Gleichung $ydy + xdx = 0$, und man hat $\alpha = y^2 + x^2$. Durch die Elimination von y, indem man $y = \sqrt{\alpha - x^2}$ einsetzt, findet sich zur Bestimmung von β die Gleichung:

$$\sqrt{\alpha - x^2}\frac{d\tau}{dx} + az\frac{d\tau}{dz} = 0.$$

Daraus folgt $\frac{dz}{z} - \frac{adx}{\sqrt{\alpha - x^2}} = 0$; und durch die Integration entsteht $\beta = lz - a.\arcsin\frac{x}{\sqrt{\alpha}}$, oder auch

$$\beta = lz - a.\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = lz - a.\mathrm{arctg}\frac{x}{y}.$$

Das allgemeine Integral kann demnach angeschrieben werden in der Form:

$$z = e^{a.\mathrm{arctg}\frac{x}{y}}.\varphi(x^2 + y^2).$$

9. Es sei noch $\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} + Zz + Z_1 = 0$, worin $Y\,Z\,Z_1$ irgend Funktionen von x und y bedeuten. Man hat

(a) $$\frac{d\tau}{dx} + Y\frac{d\tau}{dy} - (Zz + Z_1)\frac{d\tau}{dz} = 0.$$

Die Funktion α entsteht durch die Integration von $dy - Ydx = 0$. Zur Bestimmung von β aber hat man die Gleichung

$$dz + (Zz + Z_1)dx = 0,$$

wenn man y mittels α in den Coeffizienten Z und Z_1 eliminirt. Man findet alsdann

$$\beta = ze^{\int Zdx} + \int Z_1 e^{\int Zdx}\,dx,$$

worin aber erst nach vollzogener Integration an die Stelle von α die Funktion der Veränderlichen y und x wieder eingesetzt werden darf.

Man sieht nun auch ein, dass es nicht mehr als zwei verschiedene Funktionen τ giebt, welche der Gleichung (a) genügen. Denn man weiss, dass sich für eine Differentialgleichung der ersten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen, wie sie bei der Bestimmung der zweiten Funktion β vorliegt, nur eine einzige Funktion

der beiden Veränderlichen findet. Da nun $\varphi(\alpha\beta)=0$ die allgemeinste Form der endlichen Gleichung ist, woraus man die partielle Differentialgleichung $X\frac{dz}{dx}+Y\frac{dz}{dy}=Z$ ableiten kann, da ferner nur eine einzige endliche Gleichung der Art möglich ist, so schliesst man weiter, dass dies als allgemeines Integral der partiellen Differentialgleichung angesehen werden muss. Wenn also mehr als zwei Funktionen vorliegen, welche der Gleichung (a) an der Stelle von r Genüge leisten, so ist deren Verschiedenheit nur eine scheinbare; und bei der genaueren Untersuchung wird sich herausstellen, dass jede eine bestimmte Funktion von irgend zweien der übrigen ausdrückt, so dass man immer wieder zu derselben Gleichung $\varphi(\alpha\beta)=0$ gelangt, welche von den vorliegenden Funktionen man auch an der Stelle von α und β gebrauchen mag. Man kann aber auch umgekehrt, wenn einmal zwei Funktionen α und β bekannt sind, aus diesen zwei andere Funktionen $\varphi_1(\alpha\beta)$ und $\varphi_2(\alpha\beta)$ ableiten, um dadurch einfachere Formen zu erhalten, und dann die möglichst einfache Integralform: $\varphi(\varphi_1(\alpha\beta), \varphi_2(\alpha\beta))=0$ herzustellen.

Während man die besonderen Integrale der partiellen Differentialgleichung aus dem allgemeinen Integral $\varphi(\alpha\beta)=0$ dadurch ableitet, dass man die willkührliche Funktion φ angemessen bestimmt, so kommt diese andererseits bei der Bestimmung der besonderen Auflösungen niemals in Betracht. Man erkennt dieselben unmittelbar aus irgend zwei Funktionen α und β, woraus das allgemeine Integral zusammengesetzt werden kann. Denn es kommt bei dieser Bestimmung bekanntlich auf diejenigen Glieder der Gleichung $\varphi(\alpha\beta)=0$ an, welche mit einem Faktor s^m verbunden sind, worin m ein zwischen 0 und 1 liegender Zahlenwerth ist. Wenn man aber alle diejenigen Gleichungen $s=0$ ausschliesst, welche der partiellen Differentialgleichung als besondere Integrale genügen, so behält man die besonderen Auflösungen; und zu den letzteren gelangt man jedesmal, indem man die so eben angedeutete Untersuchung auf die beiden einfacheren Gleichungen $\alpha=a$ und $\beta=b$ beschränkt, worin a und b als willkührliche Beständige gedacht werden.

Die Bestimmung von α und β ist schwieriger, wenn sie beide nur als Funktionen der drei Veränderlichen sich darstellen lassen. Auch hier gelangt man zur Lösung der Aufgabe, indem man sie auf die Integration einer Differentialgleichung der ersten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen zurückführt. Dies lässt sich zunächst dadurch erreichen, dass man die Veränderlichen z, y und x gegen andere vertauscht, welche als bestimmte Funktionen der

ersteren gedacht werden. Es kommt darauf an, die neuen Veränderlichen von solcher Beschaffenheit anzugeben, dass wenigstens die eine Funktion α nur zwei davon aufnimmt. Denn nachdem man diese Veränderlichen in die Differentialgleichung eingeführt hat, so muss sich dieselbe in der Weise umgestalten, dass eine von den drei Veränderlichen daraus wegfällt, so bald man den entsprechenden Differentialquotienten von τ gleich Null setzt. Man behält dann zur Bestimmung der Funktion α in der That eine Differentialgleichung der ersten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen.

Die Transformation selbst hat keinen Anstand, so bald die neuen Veränderlichen u, v und w als Funktionen von z, y und x gegeben sind. Da nämlich das allgemeine Integral $\tau = 0$ als Funktion von u, v und w sich darstellen soll, so hat man zu setzen:

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{d\tau}{du}\frac{du}{dz} + \frac{d\tau}{dv}\frac{dv}{dz} + \frac{d\tau}{dw}\frac{dw}{dz},$$

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{d\tau}{du}\frac{du}{dy} + \frac{d\tau}{dv}\frac{dv}{dy} + \frac{d\tau}{dw}\frac{dw}{dy},$$

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{d\tau}{du}\frac{du}{dx} + \frac{d\tau}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{d\tau}{dw}\frac{dw}{dx};$$

und die Gleichung (a) geht über in:

$$\begin{aligned}
&(X\frac{du}{dx} + Y\frac{du}{dy} + Z\frac{du}{dz})\frac{d\tau}{du} \\
&+ (X\frac{dv}{dx} + Y\frac{dv}{dy} + Z\frac{dv}{dz})\frac{d\tau}{dv} \\
&+ (X\frac{dw}{dx} + Y\frac{dw}{dy} + Z\frac{dw}{dz})\frac{d\tau}{dw} = 0,
\end{aligned}$$

worin noch die Elimination von zyx auszuführen ist.

Aus der Lehre von der Integration der Differentialgleichungen mit nur zwei Veränderlichen sind die Untersuchungen bekannt, woraus folgt, dass alle besonderen Integrale und besonderen Auflösungen der partiellen Differentialgleichung:

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = Z$$

besonders geeignet sind, eine Transformation in der beabsichtigten Weise herbeizuführen. Wenn μ eine Funktion von x und y

ist, welche die partielle Differentialgleichung an der Stelle von z befriedigt, so wird man anstatt z die neue Veränderliche $z-\mu=v$ gebrauchen. Wenn aber mehrere Funktionen der Art vorliegen, in der Form $z=f(y\,x\,a_1)$, $z=f(y\,x\,a_2)$, u. s. w., welche sich nur durch die Beständige a von einander unterscheiden, so wird man am vortheilhaftesten die Gleichung $z=f(y\,x\,a)$ nach a auflösen, und dann die so bestimmte Funktion $a=\varphi(z\,y\,x)$ als neue Veränderliche an die Stelle irgend einer der ursprünglichen in die Differentialgleichung einführen. Es handelt sich also hier nur um die Bestimmung von besonderen Integralen und besonderen Auflösungen. Da übrigens auch solche Funktionen bei der Transformation förderlich sind, worin die Veränderliche z nicht vorkommt, so dass also auch von einem veränderlichen Werthe z keine Rede sein kann, oder da vielleicht aus der fraglichen Funktion eine der beiden andern Veräderlichen y und x leichter entwickelt wird als die Veränderliche z, so mag hier die Bemerkung nicht unpassend sein, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$Y\frac{dx}{dy}+Z\frac{dx}{dz}=X$$

$$X\frac{dy}{dx}+Z\frac{dy}{dz}=Y$$

mit der oben gegebenen

$$X\frac{dz}{dx}+Y\frac{dz}{dy}=Z$$

einerlei Integral haben. Denn wenn es sich um die Bestimmung des Integrals $\tau=0$ handelt, so gilt jedesmal die Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad X\frac{d\tau}{dx}+Y\frac{d\tau}{dy}+Z\frac{d\tau}{dz}=0.$$

Jene anderen partiellen Differentialgleichungen aber werden sich bei der versuchsweisen Ermittelung der besonderen Integrale und der besonderen Auflösungen unter Umständen vortheilhafter gebrauchen lassen als die ursprüngliche Differentialgleichung.

10. Es sei $(z+y)x\frac{dz}{dx}+(z+x)y\frac{dz}{dy}=(y+x)z$. Man hat hier die Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad (z+y)x\frac{d\tau}{dx}+(z+x)y\frac{d\tau}{dy}+(y+x)z\frac{d\tau}{dz}=0.$$

Setzt man $z=my$ ein, so geht die Differentialgleichung über in

$m(m-1)=0$. Unter derselben Bedingung genügt man durch $z=mx$. Man nehme desshalb anstatt x und y die neuen Veränderlichen $v=\frac{z}{y}$ und $u=\frac{z}{x}$. Die Gleichung (a) geht dann über in:

$$\left(\frac{z}{x}-1\right)\frac{d\tau}{du}+\left(\frac{z}{y}-1\right)\frac{d\tau}{dv}-(y+x)\frac{d\tau}{dz}=0,$$

oder, wenn man y und x eliminirt, in:

$$(u-1)\frac{d\tau}{du}+(v-1)\frac{d\tau}{dv}-\left(\frac{z}{u}+\frac{z}{v}\right)\frac{d\tau}{dz}=0.$$

Man bestimme α aus $(u-1)dv-(v-1)du=0$. Dann ist $\alpha=\frac{u-1}{v-1}$. Um auch die andere Funktion β zu erhalten, so eliminire man u mittels α. Man hat $u=\alpha(v-1)+1$, und desshalb zur Bestimmung von β die Gleichung:

$$\frac{dz}{z}+\frac{dv}{v(v-1)}+\frac{dv}{\alpha(v-1)^2+v-1}=0.$$

Wenn man hier in die partiellen Brüche zerlegt, so entsteht:

$$\frac{dz}{z}-\frac{dv}{v}+\frac{2dv}{v-1}-\frac{\alpha dv}{\alpha(v-1)+1}=0.$$

Daraus folgt aber $\beta=\frac{z(v-1)^2}{v(\alpha(v-1)+1)}=\frac{z(v-1)^2}{uv}$.

Nimmt man, um zwei symmetrische Funktionen zu erhalten, $\beta\alpha^2=\frac{z(u-1)^2}{uv}$ anstatt α, und setzt man zugleich die ursprünglichen Veränderlichen an die Stelle von u und v wieder ein, so hat man das allgemeine Integral:

$$\varphi\left(\frac{y(z-x)^2}{xz},\ \frac{x(z-y)^2}{yz}\right)=0.$$

11. Es sei nun $(az-y)\frac{dz}{dx}-(bz-x)\frac{dz}{dy}=by-ax$. Man hat die Gleichung:

$$\text{(a)}\qquad (az-y)\frac{d\tau}{dx}-(bz-x)\frac{d\tau}{dy}+(by-ax)\frac{d\tau}{dz}=0.$$

Man genügt durch $z=my+nx$, und findet zur Bestimmung von m und n die beiden Gleichungen:

$$(an - bm)m = n + b,$$

$$(bm - an)n = m + a.$$

Daraus folgt $m + a = 0$ und $n + b = 0$, und man gelangt zu dem besonderen Integral $z + ay + bx = 0$. Man setze nun an die Stelle von z die neue Veränderliche $w = z + ay + bx$ ein, und die Gleichung (a) geht über in die folgende:

$$(az - y)\frac{d\tau}{dx} - (bz - x)\frac{d\tau}{dy} = 0,$$

oder auch, wenn z eliminirt wird, in:

$$((a^2 + 1)y + abx - aw)\frac{d\tau}{dx} - ((b^2 + 1)x + aby - bw)\frac{d\tau}{dy} = 0.$$

Daraus ergiebt sich $\alpha = w$, und dann die andere Funktion β durch die Integration der Gleichung:

$$((a^2 + 1)y + abx - aw)dy + ((b^2 + 1)x + aby - bw)dx = 0.$$

Man findet $\beta = (a^2 + 1)y^2 + 2abxy + (b^2 + 1)x^2 - 2(ay + bx)w$. Nimmt man anstatt β lieber den Ausdruck

$$\beta + \alpha^2 = (a^2 + 1)y^2 + 2abxy + (b^2 + 1)x^2 + (z - ay - bx)w = z^2 + y^2 + x^2,$$

so zeigt sich das allgemeine Integral in der Form

$$z + ay + bx = \varphi(z^2 + y^2 + x^2).$$

12. Es sei $x^2\frac{dz}{dx} + (z + yx)\frac{dz}{dy} = (a^2 - 1)x^2y$. Man hat:

$$\text{(a)} \qquad x^2\frac{d\tau}{dx} + (z + yx)\frac{d\tau}{dy} + (a^2 - 1)x^2y\frac{d\tau}{dz} = 0.$$

Setzt man $z = mxy$, so besteht die Gleichung $(m + 1)^2 = a^2$. Man nehme desshalb anstatt z die neue Veränderliche $w = \frac{z}{yx}$. Die Gleichung (a) geht dann über in:

$$x^2\frac{d\tau}{dx} + (z + yx)\frac{d\tau}{dy} - \left(\frac{(z + yx)^2}{y^2x} - a^2x\right)\frac{d\tau}{dz} = 0,$$

oder, wenn man nun z eliminirt,

$$x\frac{d\tau}{dx} + (w + 1)y\frac{d\tau}{dy} - ((w + 1)^2 - a^2)\frac{d\tau}{dw} = 0.$$

Die Funktionen α und β ergeben sich demnach aus den Gleichungen:

$$\frac{dx}{x}+\frac{dw}{(w+1)^2-a^2}=0 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{y}+\frac{(w+1)dw}{(w+1)^2-a^2}=0.$$

Die letztere liefert $\beta = 2ly + l((w+1)^2-a^2)$, oder auch

$$\beta = y^2(w+1-a)(w+1+a).$$

Um die erstere Gleichung zu integriren, schreibe man sie in der Form:

$$2a\frac{dx}{x}+\frac{dw}{w+1-a}-\frac{dw}{w+1+a}=0.$$

Daraus findet man $\alpha = 2alx + l(w+1-a) - l(w+1+a)$, oder auch: $\alpha = x^{2a}.\frac{w+1-a}{w+1+a}$. Man nehme aber anstatt dieser Funktionen α und β die beiden einfacheren $\sqrt{\beta\alpha}$ und $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, und man hat das allgemeine Integral

$$\varphi(x^a y(\frac{z}{yx}+1-a),\quad x^{-a}y(\frac{z}{yx}+1+a))=0.$$

13. Es sei

$$((a-b)(z-y)+cx)\frac{dz}{dx}+((a-c)(z-x)+by)\frac{dz}{dy}=(b-c)(y-x)+az.$$

Setzt man hier $z = my + nx$ ein, so erhält man zur Bestimmung von m und n die beiden Gleichungen:

$$((a-b)(n-1)+(a-c)(m+1))(m-1)=0,$$

$$((a-b)(n+1)+(a-c)(m-1))(n-1)=0.$$

Daraus folgt $n=1$ und $m=-1$, $m=1$ und $n=-1$, $m=1$ und $n=1$. Man hat also die drei besonderen Integrale $z+y-x=0$, $z-y+x=0$ und $z-y-x=0$. Man bringe nun in die Gleichung

(a)

$$((a-b)(z-y)+cx)\frac{d\tau}{dx}+((a-c)(z-x)+by)\frac{d\tau}{dy}+((b-c)(y-x)+az)\frac{d\tau}{dz}=0$$

an die Stelle von x, y und z die neuen Veränderlichen:

$$u=z+y-x,\qquad v=z-y+x,\qquad w=-z+y+x.$$

Dieselbe geht dann über in:

$$(a+b-c)(z+y-x)\frac{d\tau}{du}$$

$$+(a-b+c)(z-y+x)\frac{d\tau}{dv}+(-a+b+c)(-z+y+x)\frac{d\tau}{dw}=0,$$

oder, wenn man die Veränderlichen z, y und x eliminirt, in:

$$(a+b-c)u\frac{d\tau}{du}+(a-b+c)v\frac{d\tau}{dv}+(-a+b+c)w\frac{d\tau}{dw}=0.$$

Die Funktionen α und β ergeben sich aus den Gleichungen:

$$(-a+b+c)wdv-(a-b+c)vdw=0,$$

$$(-a+b+c)wdu-(a+b-c)wdw=0.$$

Man findet die Werthe:

$$\alpha=\frac{v^{a-b+c}}{w^{-a+b+c}}, \quad \text{und} \quad \beta=\frac{u^{a+b-c}}{w^{-a+b+c}}.$$

Man setze die ursprünglichen Veränderlichen wieder ein, und man hat das allgemeine Integral:

$$\varphi\left(\frac{(z-y+x)^{a-b+c}}{(-z+y+x)^{-a+b+c}}, \frac{(z+y-x)^{a+b-c}}{(-z+y+x)^{-a+b+c}}\right)=0.$$

Wenn nun auch das vorhin angegebene Verfahren ganz geeignet ist, die Grösse α als Funktion der drei Veränderlichen z, y und x zu bestimmen, so giebt es doch auch Fälle, wo die Kenntniss von besonderen Integralen und besonderen Auflösungen nicht ausreichen würde, um durch die vorgeschriebenen Transformationen eine Differentialgleichung der ersten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen herbeizuführen. Andererseits kommen hier auch diejenigen Fälle in Betracht, wo die besonderen Integrale und die besonderen Auflösungen, wenn auch vielleicht in der genannten Absicht förderlich, doch nicht einfacher sich darstellen als die Funktion α selber, zu deren Ermittelung dieselben verwendet werden sollen. In solchen Fällen ist man veranlasst, die Grösse α unmittelbar als Funktion der drei Veränderlichen versuchsweise zu bestimmen. Da aber eine derartige Bestimmung auf Untersuchungen gegründet ist, welche sich besser verfolgen lassen, wenn sie sogleich auf die allgemeine partielle Differentialgleichung mit $n+1$ Veränderlichen bezogen werden, so ziehen wir es vor, erst weiter unten darauf einzugehen, und betrachten jetzt die partielle Differentialgleichung mit mehr als drei Veränderlichen.

Das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung mit vier Veränderlichen:

$$W\frac{dz}{dw}+X\frac{dz}{dx}+Y\frac{dz}{dy}=Z$$

worin W, X, Y und Z irgend Funktionen der Veränderlichen w, x, y und z sind, lässt sich in der Form $\varphi(\alpha\beta\gamma)=0$ anschreiben, wo φ eine willkührliche Funktion, α, β und γ aber bestimmte Funktionen der Veränderlichen bezeichnen. Denn dies ist die allgemeinste endliche Gleichung, woraus die vorliegende Differentialgleichung abgeleitet werden kann. Durch Differentiation entstehen die drei Gleichungen:

1.

$$\frac{d\varphi}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{d\alpha}{dy}\right)+\frac{d\varphi}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{d\beta}{dy}\right)+\frac{d\varphi}{d\gamma}\left(\frac{d\gamma}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{d\gamma}{dy}\right)=0,$$

2.

$$\frac{d\varphi}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{d\alpha}{dx}\right)+\frac{d\varphi}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{d\beta}{dx}\right)+\frac{d\varphi}{d\gamma}\left(\frac{d\gamma}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{d\gamma}{dx}\right)=0,$$

3.

$$\frac{d\varphi}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dz}\frac{dz}{dw}+\frac{d\alpha}{dw}\right)+\frac{d\varphi}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dz}\frac{dz}{dw}+\frac{d\beta}{dw}\right)+\frac{d\varphi}{d\gamma}\left(\frac{d\gamma}{dz}\frac{dz}{dw}+\frac{d\gamma}{dw}\right)=0.$$

Ausser den willkührlichen Grössen $\frac{d\varphi}{d\alpha}$, $\frac{d\varphi}{d\beta}$ und $\frac{d\varphi}{d\gamma}$ lässt sich aber hier nichts weiter eliminiren.

Wir betrachten nun die partielle Differentialgleichung

$$W\frac{dz}{dw}+X\frac{dz}{dx}+Y\frac{dz}{dy}=Z$$

als das Resultat der Elimination von φ aus den drei Gleichungen 1., 2., 3. und beschäftigen uns mit der Bestimmung der Funktionen α, β und γ. Es versteht sich, dass die Elimination der Differentialquotienten $\frac{dz}{dw}$, $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ zwischen den Gleichungen 1., 2., 3. und der partiellen Differentialgleichung zu einer identischen Gleichung führt. Man stelle das allgemeine Integral $\varphi(\alpha\beta\gamma)=0$ abkürzend in der Form $\tau=0$ auf, und die Gleichungen 1., 2., 3. zeigen sich dann in der folgenden Form:

1. $$\frac{d\tau}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{d\tau}{dy}=0,$$

2. $$\frac{d\tau}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{d\tau}{dx}=0,$$

3. $$\frac{d\tau}{dz}\frac{dz}{dw}+\frac{d\tau}{dw}=0.$$

Durch die Elimination der Differentialquotienten entsteht die Gleichung:

(a) $$W\frac{d\tau}{dw}+X\frac{d\tau}{dx}+Y\frac{d\tau}{dy}+Z\frac{d\tau}{dz}=0,$$

der man also genügt, sobald $\varphi(\alpha\,\beta\,\gamma)$ an die Stelle von τ kommt. Wegen des willkührlichen φ muss diese Gleichung fortbestehen, wenn man anstatt $\varphi(\alpha\,\beta\,\gamma)$ irgend eine der drei Funktionen α, β und γ einsetzt. Es kommt also darauf an, drei verschiedene Funktionen der Veränderlichen z, y, x und w anzugeben, welche an der Stelle von τ der Gleichung (a) Genüge leisten. Dass derartige Funktionen jedesmal möglich sind, dies unterliegt keinem Zweifel, da dieselben ohne irgend eine Beschränkung alle diejenigen Grössen aufnehmen dürfen, welche auch in der Gleichung (a) vorkommen.

Dieselben Rechnungsoperationen, welche vorhin bei der Bestimmung des allgemeinen Integrals einer partiellen Differentialgleichung mit nur drei Veränderlichen auseinander gesetzt worden sind, erweisen sich auch hier als förderlich. Vor Allem verschaffe man sich einen Ueberblick darüber, in welcher Anzahl die Veränderlichen in den gesuchten Funktionen vorkommen. Wenn $Z=0$, so genügt man der Gleichung (a) durch $\alpha=z$, weil dann $\frac{d\alpha}{dy}=0$, $\frac{d\alpha}{dx}=0$ und $\frac{d\alpha}{dw}=0$ ist. Wenn man von den vier partiellen Differentialquotienten von τ irgend zwei gleich Null setzt, und wenn dann die übrig gebliebenen Glieder der Gleichung (a) die beiden jenen zwei Differentialquotienten entsprechenden Veränderlichen nicht mehr enthalten, dann genügt eine Funktion der beiden andern Veränderlichen. Wenn man nur einen von den vier Differentialquotienten von τ gleich Null setzt, und wenn dann die entsprechende Veränderliche in den übrig gebliebenen Gliedern der Gleichung (a) nicht vorkommt, dann findet sich eine Funktion, worin eben diese Veränderliche fehlt.

Man wird bemüht sein, die Anzahl der Veränderlichen, welche in der gesuchten Funktion vorkommen, durch Transformation zu vermindern, indem man an die Stelle der Veränderlichen $z\;y\;x$ und w irgend Funktionen davon als neue Veränderliche einsetzt. In

dieser Absicht wird man alle besonderen Integrale und besonderen Auflösungen der partiellen Differentialgleichung benutzen, welche man durch Probiren aufgefunden hat. Insbesondere aber bediene man sich, wenn schon die eine oder die andere der Funktionen α, β und γ bekannt ist, eben dieser Funktionen, weil dieselben in der genannten Absicht jedesmal förderlich sind. Führt man nämlich an die Stelle irgend einer der Veränderlichen, so wie dies gerade am bequemsten ausführbar ist, etwa an die Stelle von w, die Funktion α in die Gleichung (a) ein, so geht diese über in:

$$\left(W\frac{d\alpha}{dw}+X\frac{d\alpha}{dx}+Y\frac{d\alpha}{dy}+Z\frac{d\alpha}{dz}\right)\frac{d\tau}{d\alpha}+X\frac{d\tau}{dx}+Y\frac{d\tau}{dy}+Z\frac{d\tau}{dz}=0.$$

Da aber nach der Voraussetzung die Funktion α der Gleichung (a) genügt, so verschwindet der Faktor von $\frac{d\tau}{d\alpha}$, und es bleibt die einfachere Gleichung:

$$X\frac{d\tau}{dx}+Y\frac{d\tau}{dy}+Z\frac{d\tau}{dz}=0,$$

deren Coeffizienten nun Funktionen von z, y, x und α sind. Die letzte Grösse tritt hier als Beständige auf und β zeigt sich als Funktion von nur drei Veränderlichen. Ebenso findet sich, wenn die beiden Funktionen α und β bei der Elimination von x und w benutzt werden, zur Bestimmung von γ die Gleichung:

$$Y\frac{d\tau}{dy}+Z\frac{d\tau}{dz}=0,$$

deren Coeffizienten Funktionen von z, y, α und β sind. Die Funktion γ bestimmt sich dann aus einer Differentialgleichung der ersten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen.

Bei der Bestimmung der Funktionen α, β und γ hat man wohl zu beachten, dass nicht die eine davon eine bestimmte Funktion der beiden anderen sei, weil sonst $\varphi(\alpha\,\beta\,\gamma)=0$ nicht mehr das allgemeine Integral vorstellt. Um zu erfahren, ob α, β und γ drei verschiedene Funktionen der Veränderlichen sind, so eliminire man zunächst irgend eine der Veränderlichen z, y, x und w mittels α aus der Funktion β. Wenn bei der Elimination nicht auch die drei andern Veränderlichen wegfallen, so weiss man, dass α und β verschiedene Funktionen sind. Man eliminire nun weiter irgend zwei von den vier Veränderlichen mittels α und β aus der Funktion γ. Wenn durch diese Elimination zugleich die beiden andern Veränderlichen wegfallen, so ist die Funktion γ nur eine Verbin-

dung der Funktionen α und β. Wenn aber nach vollzogener Elimination die eine oder die andere Veränderliche in γ zurückbleibt, so hat man die Gewissheit, dass dies γ eine dritte Funktion der Veränderlichen vorstellt. Man sieht ein, dass diese Bedingungen sich erfüllen, wenn man die jedesmal aufgefundene Funktion sogleich als neue Veränderliche an die Stelle irgend einer der ursprünglichen in die Gleichung (a) einführt, da sich dann die nächste Funktion durch die schon bekannten Funktionen und die noch übrigen Veränderlichen ausdrückt.

14. Es sei $z\frac{dz}{dw}+y\frac{dz}{dx}+x\frac{dz}{dy}=w.$

Zur Bestimmung der Funktionen α, β und γ hat man die Gleichung:

$$\text{(a)}\qquad z\frac{d\tau}{dw}+y\frac{d\tau}{dx}+x\frac{d\tau}{dy}+w\frac{d\tau}{dz}=0.$$

Es finden sich zwei Funktionen, von denen die eine nur x und y, die andere nur z und w einschliesst. Dazu dienen die Gleichungen:

$$ydy-xdx=0 \quad \text{und} \quad zdz-wdw=0.$$

Durch die Integration entsteht:

$$\alpha=y^2-x^2 \quad \text{und} \quad \beta=z^2-w^2.$$

Eliminirt man damit y und z, so behält man zur Bestimmung von γ die Gleichung:

$$\sqrt{\beta+w^2}\,\frac{d\tau}{dw}+\sqrt{\alpha+x^2}\,\frac{d\tau}{dx}=0.$$

Man schreibe dieselbe in der Form:

$$\frac{dw}{\sqrt{\beta+w^2}}-\frac{dx}{\sqrt{\alpha+x^2}}=0,$$

und die Integration liefert:

$$\gamma=\frac{w+\sqrt{\beta+w^2}}{x+\sqrt{\alpha+x^2}}=\frac{w+z}{x+y}.$$

Das allgemeine Integral aber ist:

$$\frac{w+z}{x+y}=\varphi(w^2-z^2,\ x^2-y^2).$$

15. Es sei $w\frac{dz}{dw}+x\frac{dz}{dx}-(ay+wz)\frac{dz}{dy}+az+xy=0.$

Man hat hier die Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad w\frac{d\tau}{dw} + x\frac{d\tau}{dx} - (ay + wz)\frac{d\tau}{dy} - (az + xy)\frac{d\tau}{dz} = 0.$$

Man erhält α aus $wdx - xdw = 0$ oder $\alpha = \frac{x}{w}$. Eliminirt man damit x, so entsteht die ueue Gleichung:

$$w\frac{d\tau}{dw} - (ay + wz)\frac{d\tau}{dy} - (az + \alpha wy)\frac{d\tau}{dz} = 0.$$

Man genügt durch $z - my = 0$, denn wenn man dies einsetzt, so hat man zur Bestimmung von m die Gleichung $m^2 = \alpha$. Vertauscht man nun y und z gegen die neuen Veränderlichen $u = z + y\sqrt{\alpha}$ und $v = z - y\sqrt{\alpha}$, so erhält man zunächst:

$$w\frac{d\tau}{dw} - (a + w\sqrt{\alpha})(z + y\sqrt{\alpha})\frac{d\tau}{du} - (a - w\sqrt{\alpha})(z - y\sqrt{\alpha})\frac{d\tau}{dv} = 0.$$

Die Elimination von y und z führt auf die Gleichung:

$$w\frac{d\tau}{dw} - (a + w\sqrt{\alpha})u\frac{d\tau}{du} - (a - w\sqrt{\alpha})v\frac{d\tau}{dv} = 0,$$

und die Funktionen β und γ ergeben sich aus:

$$\frac{du}{u} + \left(\frac{a}{w} + \sqrt{\alpha}\right)dw = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dv}{v} + \left(\frac{a}{w} - \sqrt{\alpha}\right)dw.$$

Die Integration liefert:

$$\beta = uw^a e^{w\sqrt{\alpha}} \quad \text{und} \quad \gamma = vw^a e^{-w\sqrt{\alpha}}.$$

Wenn man die ursprünglichen Veränderlichen wieder einsetzt, so ist:

$$\beta = \left(z + y\sqrt{\frac{x}{w}}\right) w^a e^{\sqrt{wx}} \quad \text{und} \quad \gamma = \left(z - y\sqrt{\frac{x}{w}}\right) w^a e^{-\sqrt{wx}}.$$

16. Es sei noch

$$(z + y + x)\frac{dz}{dw} + (z + y + w)\frac{dz}{dx} + (z + x + w)\frac{dz}{dy} = y + x + w.$$

Man hat hier die Gleichung:

$$\text{(a)}$$

$$(z + y + x)\frac{d\tau}{dw} + (z + y + w)\frac{d\tau}{dx} + (z + x + w)\frac{d\tau}{dy} + (y + x + w)\frac{d\tau}{dz} = 0.$$

Die partielle Differentialgleichung liefert die besonderen Integrale:

$$z = y, \quad z = x, \quad z = w, \quad z + y + x + w = 0.$$

Man gebrauche desshalb die neuen Veränderlichen:

$$t=z-y,\quad s=z-x,\quad r=z-w,\quad u=z+y+x+w.$$

Die Gleichung (a) geht zunächst über in:

$$3(z+y+x+w)\frac{d\tau}{du}-(z-w)\frac{d\tau}{dr}-(z-x)\frac{d\tau}{ds}-(z-y)\frac{d\tau}{dt}=0.$$

Eliminirt man nun die Veränderlichen z, y, x und w, so hat man:

$$3u\frac{d\tau}{du}-r\frac{d\tau}{dr}-s\frac{d\tau}{ds}-t\frac{d\tau}{dt}=0.$$

Daraus ergeben sich leicht die fraglichen Funktionen. Man erhält:

$$\alpha=r^3u,\quad \beta=s^3u,\quad \gamma=t^3u.$$

Wenn man die vorigen Veränderlichen wieder einsetzt, so lässt sich das allgemeine Integral anschreiben in der Form:

$$(z+y+x+w)(z-y)^3=\varphi\left(\frac{z-x}{z-y},\ \frac{z-w}{z-y}\right).$$

Man übersieht nun leicht, wie das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$Z=Y\frac{dz}{dy}+X\frac{dz}{dx}+W\frac{dz}{dw}+\ldots.$$

sich gestaltet, worin $Z\ Y\ X\ W\ldots.$ irgend Funktionen der $n+1$ Veränderlichen $z\,y\,x\,w\ldots.$ sind. Dasselbe ist dargestellt durch die Gleichung $\varphi(\alpha\,\beta\,\gamma\ldots.)=0$, wo φ eine willkührliche Function und $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots.\,n$ bestimmte Funktionen der $n+1$ Veränderlichen vorstellen. Um diese Funktionen zu bestimmen, hat man die Gleichung:

$$\text{(a)}\qquad Z\frac{d\tau}{dz}+Y\frac{d\tau}{dy}+X\frac{d\tau}{dx}+W\frac{d\tau}{dw}+\ldots.=0.$$

Jede von den n Funktionen $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots.$ muss dieser Gleichung genügen, wenn sie an die Stelle von τ eingesetzt wird.

17. Es sei z. B.

$$(w^2+x^2+y^2)\left(w_1\frac{dz}{dw}+x_1\frac{dz}{dx}+y_1\frac{dz}{dy}\right)$$

$$-(w_1{}^2+x_1{}^2+y_1{}^2)\left(w\frac{dz}{dw_1}+x\frac{dz}{dx_1}+y\frac{dz}{dy_1}\right)=1.$$

Das allgemeine Integral ist $\varphi(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta)=0$, und zur Bestimmung der sechs Funktionen hat man die folgende Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad (w^2+x^2+y^2)\left(w_1\frac{d\tau}{dw}+x_1\frac{d\tau}{dx}+y_1\frac{d\tau}{dy}\right)$$
$$-(w_1^2+x_1^2+y_1^2)\left(w\frac{d\tau}{dw_1}+x\frac{d\tau}{dx_1}+y\frac{d\tau}{dy_1}\right)+\frac{d\tau}{dz}=0.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die vier verschiedenen Funktionen:

$$\alpha=wx_1-xw_1,\quad \beta=yw_1-wy_1,\quad \gamma=xy_1-yx_1$$

und

$$\delta=ww_1+xx_1+yy_1$$

genügen. Um noch zwei weitere Funktionen zu erhalten, eliminire man die vier Veränderlichen w_1, x_1, y_1 und w mit Hilfe der vorliegenden Funktionen. In dieser Absicht bilde man zunächst die Werthe:

$$(w^2+x^2+y^2)w_1=\delta w-\alpha x+\beta y,$$
$$(w^2+x^2+y^2)x_1=\alpha w+\delta x-\gamma y,$$
$$(w^2+x^2+y^2)y_1=-\beta w+\gamma x+\delta y,$$

und die Elimination von w_1, x_1 und y_1 führt auf die neue Gleichung:

(a)

$$(\delta w-\alpha x+\beta y)\frac{d\tau}{dw}+(\alpha w+\delta x-\gamma y)\frac{d\tau}{dx}+(-\beta w+\gamma x+\delta y)\frac{d\tau}{dy}+\frac{d\tau}{dz}=0.$$

Um nun auch w zu eliminiren, hat man die Gleichung:

$$\alpha y+\beta x+\gamma w=0.$$

An die Stelle von x und y führe man aber zuvor noch die neuen Veränderlichen $r=\sqrt{w^2+x^2+y^2}$ und $s=\frac{x}{y}$ ein. Man hat desshalb einzusetzen:

$$\frac{d\tau}{dw}=\frac{w}{r}\frac{d\tau}{dr},\quad \frac{d\tau}{dx}=\frac{x}{r}\frac{d\tau}{dr}+\frac{1}{y}\frac{d\tau}{ds},\quad \frac{d\tau}{dy}=\frac{y}{r}\frac{d\tau}{dr}-\frac{s}{y}\frac{d\tau}{ds},$$

und man erhält die folgende Gleichung:

$$\gamma\delta r\frac{d\tau}{dr}-((\alpha+\beta s)^2+\gamma^2(1+s^2))\frac{d\tau}{ds}+\gamma\frac{d\tau}{dz}=0,$$

da nämlich $\frac{\gamma w}{y}=-(\alpha+\beta s)$ ist. Zur Bestimmung der fünften und sechsten Funktion hat man demnach die beiden Gleichungen:

$$\delta dz - \frac{dr}{r} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\gamma \delta ds}{(\alpha + \beta s)^2 + \gamma^2 (1 + s^2)} + \frac{dr}{r} = 0.$$

In dem Bisherigen ist nach und nach für drei, vier und mehr Veränderliche gezeigt worden, dass die Funktionen $\alpha\,\beta\,\gamma ....$, welche der partiellen Differentialgleichung:

$$\text{(a)} \qquad Z\frac{d\tau}{dz} + Y\frac{d\tau}{dy} + X\frac{d\tau}{dx} + W\frac{d\tau}{dw} + ... = 0,$$

Genüge leisten, in vielen Fällen aus einer Differentialgleichung der ersten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen erzielt werden. Wenn nun aber dies nicht möglich ist, da nämlich die Grössen $\alpha\,\beta\,\gamma ....$ unmittelbar als Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen dargestellt werden müssen, so schlage man den folgenden Weg ein. Man gebe der unbekannten Funktion versuchsweise eine bestimmte Form in Bezug auf eine oder auf mehrere von den Veränderlichen $z\,y\,x\,w ....$ Man schreibe also z. B. $\alpha = \lambda z + \mu$, $\alpha = \frac{1}{\lambda z + \mu} + \nu$, wo λ, μ, ν noch unbestimmte Funktionen der übrigen Veränderlichen $y\,x\,w ....$ sind. Diese Funktionen setze man in die Gleichung (a) an die Stelle von τ ein. Man ordne nach Potenzen und nach den sonst noch vorkommenden Funktionen derjenigen Veränderlichen, deren Vorkommen festgestellt worden ist, um dann den gemeinsamen Faktor jeder einzelnen Funktion für sich verschwinden zu lassen. Anstatt der Gleichung (a) hat man dann mehrere andere partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades, woraus die noch unbekannten Glieder der fraglichen Funktion zu bestimmen sind. Die angenommene Form der Funktion muss aber so eingerichtet sein, dass die vorliegenden Differentialgleichungen durch schickliche Eliminationen in andere partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades übergehen, von der Art, dass dieselben in einer bestimmten Reihenfolge sich integriren lassen, da dann von den noch unbekannten Gliedern jedesmal nur ein einziges als abhängige Veränderliche auftritt. Dies lässt sich in allen Fällen, und um so eher erreichen, je mehr Veränderliche $z\,y\,x ....$ in der gesuchten Funktion schon durch die Voraussetzung festgestellt sind. Es kommt nur darauf an, dass man auf diesem Wege für die unbestimmt gebliebenen Glieder Werthe findet, welche allen Differentialgleichungen Genüge leisten. Denn wenn man nicht allen jenen Differentialgleichungen genügen kann, so muss man die Voraussetzung, von der man ausging, verlassen, um dieselbe Untersuchung auf eine andere Voraussetzung zu gründen.

Insofern bei der so eben angedeuteten Rechnung ein und dieselbe unbekannte Grösse gleichzeitig in mehreren partiellen Differentialgleichungen auftritt, hat man es noch mit einer anderen Aufgabe zu thun, deren Lösung einer besonderen Betrachtung bedarf. Wenn nämlich ausser der partiellen Differentialgleichung

$$Z = Y\frac{dz}{dy} + X\frac{dz}{dx} + W\frac{dz}{dw} + \ldots.$$

noch eine andere partielle Differentialgleichung mit denselben Veränderlichen

$$Z_1 = Y_1\frac{dz}{dy} + X_1\frac{dz}{dy} + W_1\frac{dz}{dw} + \ldots.,$$

oder auch noch mehr derartige Differentialgleichungen vorliegen, so darf man nicht erwarten, dass sich immer eine Funktion findet, welche gleichzeitig die verschiedenen partiellen Differentialgleichungen erfüllt. Wenn aber die Coeffizienten dieser Differentialgleichungen die erforderlichen Bedingungen eingehen, so kann es vorkommen, dass nicht allein eine derartige Funktion überhaupt besteht, sondern dass diese auch willkührliche Funktionen der Veränderlichen einschliesst. Wie man zu der allgemeinsten Gleichung gelangt, welche den verschiedenen partiellen Differentialgleichungen gleichzeitig Genüge leistet, dies soll nun noch gezeigt werden.

Die Methode, der man sich dabei bedient, kann leicht auf jede Anzahl partieller Differentialgleichungen übertragen werden, wenn sie einmal für zwei partielle Differentialgleichungen festgestellt ist. Wir beschränken uns hier auf die beiden Gleichungen:

$$1. \qquad Z = Y\frac{dz}{dy} + X\frac{dz}{dx} + W\frac{dz}{dw} + \ldots.,$$

$$2. \qquad Z_1 = Y_1\frac{dz}{dy} + X_1\frac{dz}{dx} + W_1\frac{dz}{dw} + \ldots.$$

Die endliche Gleichung, welche gleichzeitig genügt, sei $\tau = 0$. Man kann dann diese Gleichungen auch in der Form:

$$(a) \qquad Z\frac{d\tau}{dz} + Y\frac{d\tau}{dy} + X\frac{d\tau}{dx} + W\frac{d\tau}{dw} + \ldots. = 0,$$

$$(b) \qquad Z_1\frac{d\tau}{dz} + Y_1\frac{d\tau}{dy} + X_1\frac{d\tau}{dx} + W_1\frac{d\tau}{dw} + \ldots. = 0$$

anschreiben. Das allgemeine Integral der Gleichung 1. ist bekanntlich $\varphi(\alpha\,\beta\,\gamma\ldots.) = 0$, wo φ eine willkührliche Funktion, $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots.$ aber n bestimmte Funktionen der $n+1$ Veränderlichen $z\,y\,x\,w\ldots.$

sind, welche der Gleichung (a) an der Stelle von τ Genüge leisten. Nun hat man aber die weitere Aufgabe, die Funktion φ wo möglich so anzugeben, dass $\varphi=0$ auch die Gleichung 2. befriedigt. In dieser Absicht betrachte man die Grösse τ auch in der Gleichung (b) als Funktion der Veränderlichen $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots.$ und setze also:

$$\frac{d\tau}{dz}=\frac{d\tau}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dz}+\frac{d\tau}{d\beta}\frac{d\beta}{dz}+\frac{d\tau}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dz}+\ldots.,$$

$$\frac{d\tau}{dy}=\frac{d\tau}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\tau}{d\beta}\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\tau}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dy}+\ldots.,$$

$$\frac{d\tau}{dx}=\frac{d\tau}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\tau}{d\beta}\frac{d\beta}{dx}+\frac{d\tau}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dx}+\ldots.,$$

u. s. w.

Schreibt man die Gleichung (b) abkürzend in der Form $(\tau)=0$, so hat man die transformirte:

(b′) $$(\alpha)\frac{d\tau}{d\alpha}+(\beta)\frac{d\tau}{d\beta}+(\gamma)\frac{d\tau}{d\gamma}+\ldots.=0.$$

Man eliminire in den Coeffizienten (α), (β), $(\gamma)\ldots.$ von den $n+1$ Veränderlichen $z\,y\,x\,w\ldots.$ irgend n mit Hilfe der Funktionen $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots.$ Wenn bei dieser Elimination zugleich die letzte Veränderliche hinausfällt, so hat man die Gewissheit, dass sich φ in der angegebenen Weise bestimmen lässt. Aber auch dann, wenn nach vollzogener Elimination die letzte Veränderliche in der transformirten Gleichung (b′) zurückbleibt, kann es vorkommen, dass eine endliche Gleichung zwischen den Veränderlichen $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots.$ besteht, welche Genüge leistet. Denn ordnet man alle Glieder nach Potenzen und sonstigen Funktionen der zurückgebliebenen Veränderlichen, so zerfällt die Gleichung (b′) in mehrere andere partielle Differentialgleichungen, aus deren jeder die Grösse τ als blosse Funktion von $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots.$ hervorgeht. Diejenige Funktion aber, welche auf dem soeben angegebenen Wege dargestellt wird, damit sie alle diese partiellen Differentialgleichungen befriedigt, genügt auch den beiden Differentialgleichungen 1. und 2.

18. Es seien zu integriren:

1. $$w\,dz+x\,dy=0,$$

2. $$w\frac{dz}{dw}+x\frac{dz}{dx}=0.$$

Das allgemeine Integral der Gleichung 1. ist $\varphi(\alpha\, x\, w) = 0$, worin $\alpha = wz + xy$. Die Gleichung 2. geht desshalb über in:

$$\text{(b')} \qquad w\frac{d\tau}{dw} + x\frac{d\tau}{dx} + (wz + xy)\frac{d\tau}{d\alpha} = 0.$$

Die Elimination von z mittels α giebt:

$$w\frac{d\tau}{dw} + x\frac{d\tau}{dx} + \alpha\frac{d\tau}{d\alpha} = 0,$$

woraus τ in der That als Funktion von $w\, x\, \alpha$ gefunden wird. Das allgemeine Integral $\varphi\left(\frac{x}{w},\ \frac{\alpha}{w}\right) = 0$, oder auch die Gleichung

$$wz + xy = \varphi\left(\frac{x}{w}\right)$$

ist zugleich das allgemeine Integral der beiden Gleichungen 1. und 2.

19. Es sei

$$1. \qquad (y^2 - a^2)\frac{dz}{dy} = yz + a\sqrt{z^2 + y^2 - a^2}$$

und

$$2. \quad (y^2 - a^2)\frac{dz}{dv} + z\left(a\frac{dz}{dw} + y\frac{dz}{dx}\right) + \sqrt{z^2 + y^2 - a^2}\left(y\frac{dz}{dw} + a\frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Das allgemeine Integral der Gleichung 1. ist $\varphi(\alpha\, v\, w\, x) = 0$, worin

$$\alpha = \frac{z + \sqrt{z^2 + y^2 - a^2}}{y - a}.$$

Die Gleichung (b') zeigt sich in der Form:

$$\text{(b')} \quad (y^2 - a^2)\frac{d\tau}{dv} + z\left(a\frac{d\tau}{dw} + y\frac{d\tau}{dx}\right) + \sqrt{z^2 + y^2 - a^2}\left(y\frac{d\tau}{dw} + a\frac{d\tau}{dx}\right) = 0.$$

Um z mittels α zu eliminiren, schreibe man:

$$\sqrt{z^2 + y^2 - a^2} = \alpha(y - a) - z.$$

Daraus findet man die Werthe:

$$z = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}y - \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}a, \quad \sqrt{z^2 + y^2 - a^2} = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}y - \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}a.$$

Setzt man dies ein, so erhält man die neue Gleichung:

$$2\alpha\frac{d\tau}{dv} + (\alpha^2 + 1)\frac{d\tau}{dw} + (\alpha^2 - 1)\frac{d\tau}{dx} = 0.$$

Da hier α als Beständige auftritt, so zeigt sich das allgemeine Integral in der Form:

$$\varphi(\alpha,\ w-\frac{\alpha^2+1}{2\alpha}v,\ x-\frac{\alpha^2-1}{2\alpha}v)=0,$$

und diese entspricht gleichzeitig den beiden Differentialgleichungen 1. und 2.

20. Hat man die beiden Gleichungen:

1. $$w\frac{dz}{dw}+x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=0,$$

2. $$w_1\frac{dz}{dw}+x_1\frac{dz}{dx}+y_1\frac{dz}{dy}+w\frac{dz}{dw_1}+x\frac{dz}{dx_1}+y\frac{dz}{dy_1}=0,$$

so schreibt man das allgemeine Integral der ersteren Gleichung in der Form $z=\varphi(\alpha\,\beta\,w_1\,x_1\,y_1)$, worin $\alpha=\frac{x}{w}$ und $\beta=\frac{y}{w}$ zu setzen ist. Die andere Gleichung geht, wenn x und y durch die neuen Veränderlichen α und β ersetzt werden, über in:

$$(x_1-\alpha w_1)\frac{dz}{d\alpha}+(y_1-\beta w_1)\frac{dz}{d\beta}+w^2\left(\frac{dz}{dw_1}+\alpha\frac{dz}{dx_1}+\beta\frac{dz}{dy_1}\right)=0.$$

Man muss hier zerlegen in die beiden:

1'. $$(x_1-\alpha w_1)\frac{dz}{d\alpha}+(y_1-\beta w_1)\frac{dz}{d\beta}=0,$$

2'. $$\frac{dz}{dw_1}+\alpha\frac{dz}{dx_1}+\beta\frac{dz}{dy_1}=0.$$

Der letzteren genügt man durch $z=\varphi(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$, worin $\gamma=x_1-\alpha w_1$ und $\delta=y_1-\beta w_1$ ist. Wenn man x_1 und y_1 durch die neuen Veränderlichen γ und δ ersetzt, so geht die erstere Gleichung über in:

$$\gamma\frac{dz}{d\alpha}+\delta\frac{dz}{d\beta}-w_1(\gamma\frac{dz}{d\gamma}+\delta\frac{dz}{d\delta})=0.$$

Aber diese Gleichung zerfällt wieder in die beiden:

1''. $$\gamma\frac{dz}{d\alpha}+\delta\frac{dz}{d\beta}=0,$$

2''. $$\gamma\frac{dz}{d\gamma}+\delta\frac{dz}{d\delta}=0.$$

Aus der letzteren erhält man $z=\varphi(\alpha\,\beta\,\varepsilon)$, worin $\varepsilon=\frac{\delta}{\gamma}$ zu setzen ist. Die erstere kommt dadurch in die Form:

$$\frac{dz}{d\alpha} + \varepsilon \frac{dz}{d\beta} = 0,$$

und liefert so die Gleichung $z = \varphi(\varepsilon, \beta - \alpha\varepsilon)$, welche zugleich das allgemeine Integral der Differentialgleichungen 1. und 2. ist. Wenn man die ursprünglichen Veränderlichen wieder einsetzt, so ist:

$$\varepsilon = \frac{y_1 - \beta w_1}{x_1 - \alpha w_1} = \frac{w y_1 - y w_1}{w x_1 - x w_1},$$

$$\beta - \alpha\varepsilon = \frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{x - \alpha w_1} = \frac{y x_1 - x y_1}{w x_1 - x w_1}.$$

Das allgemeine Integral zeigt sich dann in der Form:

$$z = \varphi\left(\frac{w y_1 - y w_1}{w x_1 - x w_1}, \frac{x y_1 - y x_1}{w x_1 - x w_1}\right).$$

IV. Integration verschiedener Systeme von Differentialgleichungen.

Es seien die n Veränderlichen $y\, x\, w \ldots.$ als Funktionen einer andern Veränderlichen z zu bestimmen, da nämlich die n Gleichungen:

$$1.\quad Z\frac{dy}{dz} = Y, \qquad 2.\quad Z\frac{dx}{dz} = X, \qquad 3.\quad Z\frac{dw}{dz} = W,$$

u. s. w.

vorliegen, worin die Grössen $Z\, Y\, X\, W \ldots.$ irgend Funktionen der $n+1$ Veränderlichen $z\, y\, x\, w \ldots.$ vorstellen. Um zunächst die Unbekannte y zu bestimmen, wird man die übrigen $n-1$ abhängigen Veränderlichen $x\, w \ldots.$ eliminiren. Denn auf diesem Wege gelangt man zu einer Differentialgleichung der $n$ten Ordnung mit den beiden Veränderlichen z und y, woraus dann die Grösse y als Funktion von z hervorgeht. Aus der Gleichung 1. bilde man durch wiederholte Differentiation die Gleichungen:

$$2'.\quad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d\frac{Y}{Z}}{dz} + \frac{d\frac{Y}{Z}}{dy}\,\frac{Y}{Z} + \frac{d\frac{Y}{Z}}{dx}\,\frac{X}{Z} + \frac{d\frac{Y}{Z}}{dw}\,\frac{W}{Z} + \ldots. = Y_1,$$

$$3'.\quad \frac{d^3y}{dz^3} = \frac{dY_1}{dz} + \frac{dY_1}{dy}\,\frac{Y}{Z} + \frac{dY_1}{dx}\,\frac{X}{Z} + \frac{dY_1}{dw}\,\frac{W}{Z} + \ldots. = Y_2,$$

u. s. w.

und zuletzt auch die Gleichung:

$$n'. \quad \frac{d^n y}{dz^n} = \frac{dY_{n-2}}{dz} + \frac{dY_{n-2}}{dy}\frac{Y}{Z} + \frac{dY_{n-2}}{dx}\frac{X}{Z} + \frac{dY_{n-2}}{dw}\frac{W}{Z} + \ldots$$

Alsdann eliminire man die $n-1$ übrigen Unbekannten aus den Gleichungen 1., 2'., 3'.,.... n', und dies führt auf die erwähnte Differentialgleichung der $n$ten Ordnung mit den beiden Veränderlichen y und z. Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung mit seinen n willkührlichen Beständigen liefert den allgemeinsten Werth y als Funktion von z dargestellt, welcher den Gleichungen 1., 2., 3.,.... n entspricht. Wenn man dasselbe $(n-1)$mal nach einander der Differentiation nach z unterwirft, und dann an die Stelle der $n-1$ Differentialquotienten $\frac{dy}{dz}\,\frac{d^2y}{dz^2}\ldots\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}$ die aus den Gleichungen 1., 2'., 3'..... $(n-1)'$ sich ergebenden Werthe einsetzt, so hat man noch $n-1$ andere endliche Gleichungen, woraus auch die $n-1$ übrigen Unbekannten x, w.... als Funktionen von z und der n willkührlichen Beständigen sich entwickeln lassen.

Es ist bekannt, dass man das allgemeine Integral einer Differentialgleichung der $n$ten Ordnung mit zwei Veränderlichen, sammt den $n-1$ Differentialgleichungen, welche durch $n-1$ auf einander folgenden Differentiationen daraus abgeleitet worden sind, auch durch die n ersten Integralformen jener Differentialgleichung der $n$ten Ordnung ersetzen kann. Nachdem man diese n ersten Integrale oder die n verschiedenen Differentialgleichungen der $(n-1)$sten Ordnung, durch deren einmalige Differentiation jene Differentialgleichung der $n$ten Ordnung zum Vorschein kommt, in den Formen:

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma = c, \quad \text{u. s. w.}$$

aufgefunden hat, worin $a, b, c,\ldots.$ die willkührlichen Beständigen sind, so wird man darin an die Stelle der Differentialquotienten $\frac{dy}{dz}, \frac{d^2y}{dz^2}\ldots\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}$ diejenigen Werthe einsetzen, welche aus den Gleichungen 1., 2'., 3'..... $(n-1)'$ sich ergeben, um wieder zu den endlichen Gleichungen zu gelangen, woraus die n Unbekannten y, x, w.... als Funktionen von z und von n willkührlichen Beständigen entwickelt werden können.

In einzelnen Fällen wird es übrigens vorkommen, dass die Gleichungen 1., 2', 3'.... $(n-1)'$ nicht alle erforderlich sind, um die Elimination der $n-1$ Unbekannten x, w.... zu Stande zu bringen, da bei der Elimination von irgend einer zugleich noch

andere von diesen Unbekannten wegfallen können. Wenn nun bei dieser Elimination die m letzten von den Gleichungen 1., 2'., 3'., ... $(n-1)'$ unbenutzt bleiben, so entsteht eine Differentialgleichung von der $(n-m)$ten Ordnung, und der allgemeine Werth y, als Funktion von z ausgedrückt, enthält nur $n-m$ willkührliche Beständige. Ferner gelangt man auf dem vorhin angegebenen Wege nur zu $n-m$ endlichen Gleichungen zwischen den Veränderlichen $z\,y\,x\,w$.... Wenn man sich derselben bedient, um aus den Gleichungen 1., 2., 3., ... n von den abhängigen Veränderlichen $y\,x\,w$.... irgend $n-m$ zu eliminiren, so behält man m verschiedene Differentialgleichungen der ersten Ordnung, durch deren Integration auch die übrigen m endlichen Gleichungen zwischen den Veränderlichen $z\,y\,x\,w$.... wie vorhin aufgefunden werden.

Nun kann man aber, um das System der n Differentialgleichungen:

$$1.\quad Z\frac{dy}{dz}=Y,\qquad 2.\quad Z\frac{dx}{dz}=X,\qquad 3.\quad Z\frac{dw}{dz}+W,$$

u. s. w.

zu integriren, noch einen andern Weg einschlagen. Man kann nämlich unmittelbar diejenigen endlichen Gleichungen darstellen, welche aus den obigen n ersten Integralen:

$$\alpha=a,\quad \beta=b,\quad \gamma=c\quad \text{u. s. w.}$$

abgeleitet werden, indem dort die aus den Gleichungen 1., 2'., 3'., ... $(n-1)$ sich ergebenden Werthe an die Stelle der Differentialquotienten $\frac{dy}{dz}, \frac{d^2y}{dz^2} \dots \frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}$ einsetzt. Da dann die Grössen $\alpha\,\beta\,\gamma$.... als Funktionen der $n+1$ Veränderlichen $z\,y\,x\,w$.... auftreten, von denen alle übrigen $y\,x\,w$.... selbst wieder von der ersten Veränderlichen z abhängig gedacht werden, so erhält man durch die Differentiation von $\alpha=a$ die Gleichung:

$$\frac{d\alpha}{dz}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{dy}{dz}+\frac{d\alpha}{dx}\frac{dx}{dz}+\frac{d\alpha}{dw}\frac{dw}{dz}+\dots=0.$$

Man setze hier an die Stelle der Differentialquotienten $\frac{dy}{dz}, \frac{dx}{dz}, \frac{dw}{dz}\dots$ die Werthe ein, welche aus den Gleichungen 1., 2., 3., ... n hervorgehen, und man erhält so die partielle Differentialgleichung:

$$\text{(a)}\qquad Z\frac{d\alpha}{dz}+Y\frac{d\alpha}{dy}+X\frac{d\alpha}{dx}+W\frac{d\alpha}{dw}+\dots=0.$$

Hieraus folgt denn, dass jene endlichen Gleichungen übereinstimmend sind mit den n verschiedenen Funktionen α, welche der partiellen Differentialgleichung (a) Genüge leisten.

Die Integration des obigen Systems von Differentialgleichungen lässt sich demnach auf zwei durchaus verschiedene Aufgaben zurückführen, welche beide schon früher ihre Erledigung gefunden haben. Wenn es sich darum handelt, zu entscheiden, ob man den einen oder den anderen Weg einschlagen solle, so wird man eben die Hilfsmittel mit einander vergleichen, deren sich die Integralrechnung bedient, um die eine und die andere Aufgabe zu lösen. Was die letztere Aufgabe betrifft, nämlich die Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$\text{(a)} \qquad Z\frac{d\alpha}{dz} + Y\frac{d\alpha}{dy} + X\frac{d\alpha}{dx} + W\frac{d\alpha}{dw} + \ldots = 0,$$

so bedarf dieselbe hier keiner weiteren Besprechung, da dies den Gegenstand der Untersuchung in dem vorigen Abschnitt ausmacht. Dagegen soll hier die Integration der Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit zwei Veränderlichen, auf welche die Integration des Systems in dem ersten Falle zurückgeführt worden ist, näher in's Auge gefasst werden.

Um diese Aufgabe zu lösen, bedient man sich der Methode des integrirenden Faktors. Es kommt nämlich darauf an, dass man versuchsweise eine Funktion $\varkappa$ angebe, worin von den $n+1$ Veränderlichen $z\,y\,y'\,y'' \ldots y^{(n-1)}$ des ersten Integrals wenigstens die eine $y^{(n-1)}$ festgestellt ist. Damit multiplizirt man die Differentialgleichung der $n$ten Ordnung, und die Annahme, dass man dann ein vollständiges Differential vor sich habe, führt auf die weitere Bestimmung des integrirenden Faktors $\varkappa$ und dann auch auf das erste Integral $\alpha = c$ selbst, wenn die Voraussetzung, welche der Rechnung zum Grunde liegt, überhaupt zulässig ist. Schreibt man nämlich die Differentialgleichung der $n$ten Ordnung in der Form $Yy^{(n)} + Z = 0$, wo Y und Z irgend Funktionen von $z\,y\,y' \ldots y^{(n-1)}$ sind, so hat man das vollständige Differential:

$$Y\varkappa y^{(n)} + Z\varkappa = 0.$$

Dieses zerfällt in die beiden Gleichungen:

$$1. \qquad \frac{d\alpha}{dy^{(n-1)}} = Y\varkappa,$$

$$2. \qquad \frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\alpha}{dy}y' + \frac{d\alpha}{dy'}y'' + \ldots + \frac{d\alpha}{dy^{(n-2)}}y^{(n-1)} = Z\varkappa.$$

Aus der ersteren erhält man den Werth:

3. $$\alpha = \int Y\varkappa dy^{(n-1)} + \alpha_2,$$

worin α_2 eine noch unbekannte Funktion von $z\, y\, y' \ldots y^{(n-2)}$ ist. Die hierbei vorkommende Integration lässt sich sogleich ausführen, da $\varkappa$ in Bezug auf die Veränderliche $y^{(n-1)}$ bestimmt ist. Man schreibt $\int Y\varkappa dy^{(n-1)} = \alpha_1$ und die Gleichung 2. geht dann über in:

4. $$\frac{d\alpha_2}{dz} + \frac{d\alpha_2}{dy}y' + \frac{d\alpha_2}{dy'}y'' + \ldots + \frac{d\alpha_2}{dy^{(n-2)}}y^{(n-1)}$$
$$= Z\varkappa - \frac{d\alpha_1}{dz} - \frac{d\alpha_1}{dy}y' - \frac{d\alpha_1}{dy'}y'' - \ldots - \frac{d\alpha_1}{dy^{(n-2)}}y^{(n-1)}.$$

Weil die Veränderliche $y^{(n-1)}$ in α_2 nicht vorkommt, so wird man hier nach den verschiedenen Potenzen und den sonstigen Funktionen von $y^{(n-1)}$ ordnen, um dann den gemeinsamen Faktor jeder einzelnen Funktion für sich verschwinden zu lassen. Die Gleichung 4. zerfällt auf diese Weise in mehrere andere partielle Differentialgleichungen, welche zur Bestimmung von α_2 und der übrigen unbestimmten Glieder von $\varkappa$ zu benutzen sind.

Man kann die Rechnung, wodurch man zu dem ersten Integral $\alpha = c$ gelangt, noch anders einrichten. Man kann nämlich die Differentialgleichung der $n$ten Ordnung $Yy^{(n)} + Z = 0$ sogleich als partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung mit den $n+1$ Veränderlichen $z\, y\, y' \ldots y^{(n-1)}$ auffassen. Man eliminire aus den beiden Gleichungen:

1. $$\frac{d\alpha}{dy^{(n-1)}} = Y\varkappa,$$

2. $$\frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\alpha}{dy}y' + \frac{d\alpha}{dy'}y'' + \ldots + \frac{d\alpha}{dy^{(n-2)}}y^{(n-1)} = Z\varkappa$$

die Unbekannte $\varkappa$, und man gelangt so zu der partiellen Differentialgleichung:

(b)

$$Y\left(\frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\alpha}{dy}y' + \frac{d\alpha}{dy'}y'' + \ldots \frac{d\alpha}{dy^{(n-2)}}y^{(n-1)}\right) - Z\frac{d\alpha}{dy^{(n-1)}} = 0,$$

woraus die Funktion α versuchsweise ermittelt werden kann. Die n verschiedenen Funktionen α, welche dieser Gleichung genügen, sind gleichbedeutend mit den n ersten Integralformen der Differentialgleichung $n$ter Ordnung $Yy^{(n)} + Z = 0$.

Wenn man veranlasst ist, bei der Integration einer Differentialgleichung der $n$ten Ordnung mit zwei Veränderlichen die Methode des integrirenden Faktors diesem anderen Verfahren vorzuziehen, welches das erste Integral ohne die Hilfe jenes Faktors unmittelbar darstellt, so lässt sich nur dies dafür anführen, dass der integrirende Faktor gewöhnlich durch eine einfachere Funktion dargestellt ist als das erste Integral selber; und dass also auch auf dem ersteren Wege im Allgemeinen die einfachere Voraussetzung zu demselben Ziele führt. In der That hat man vorhin gesehen, dass die Annahme des integrirenden Faktors $\varkappa$ den Werth $\alpha = \int Y\varkappa dy^{(n-1)} + \alpha_2$ zur Folge hat, was denn doch gewöhnlich ein weniger einfacher Ausdruck sein wird, als jenes $\varkappa$ selbst. Man sieht ein, dass das eine und das andere Verfahren nicht wesentlich von einander abweichen, da beide doch immer nur von der versuchsweisen Bestimmung derjenigen Funktion abhängen, welche der partiellen Differentialgleichung (b) Genüge leisten.

Bis dahin also hat die Vergleichung der zwei verschiedenen Aufgaben, auf welche die Integration eines Systems von Differentialgleichungen:

$$Z\frac{dy}{dz} = Y,\quad Z\frac{dx}{dz} = X,\quad Z\frac{dw}{dz} = W \text{ u. s. w.}$$

zurückgeführt werden kann, noch keinen hinreichenden Grund ergeben, den einen oder den anderen Weg vorzuziehen. Doch liegt ein solcher Grund nun nicht mehr fern. In dem ersteren Falle hat man nämlich die partielle Differentialgleichung:

$$\text{(a)}\qquad Z\frac{d\alpha}{dz} + Y\frac{d\alpha}{dy} + X\frac{d\alpha}{dx} + W\frac{d\alpha}{dw} + \dots = 0,$$

deren Coeffizienten unmittelbar gegeben sind. In dem anderen Falle aber hat man die partielle Differentialgleichung:

$$\text{(b)}$$

$$Y\left(\frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\alpha}{dy}y' + \frac{d\alpha}{dy'}y'' + \dots + \frac{d\alpha}{dy^{(n-2)}}y^{(n-1)}\right) - Z\frac{d\alpha}{dy^{(n-1)}} = 0,$$

deren Coeffizienten Y und Z durch weitläuftige Differentiationen und Eliminationen zu entwickeln sind. Wenn die Funktionen der Gleichung (b) vortheilhafter sich darstellen liessen, als die der Gleichung (a), so könnte dies schon Veranlassung sein, diejenigen Rechnungen durchzuführen, wodurch die erstere Gleichung (b) entsteht. Wenn man sich aber erinnert, in welchem Zusammenhange die Funktionen der Gleichung (b) zu denen der Gleichung (a) stehen, so sieht man ein, dass die erstere nur eine Transforma-

tion der letzteren ist. Diese Transformation kommt dadurch zu Stande, dass man an die Stelle der Veränderlichen $x\,w \ldots . n-1$ andere Veränderliche $y'\,y'' \ldots . y^{(n-1)}$ in die Gleichung (a) einsetzt, von solcher Beschaffenheit, dass die Coeffizienten der Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{dy}, \frac{d\alpha}{dy'} \ldots . \frac{d\alpha}{dy^{(n-2)}}$ in der transformirten Gleichung der Reihe nach die neuen Veränderlichen $y'y'' \ldots . y^{(n-1)}$ selbst sind, nachdem man den Coeffizienten von $\frac{d\alpha}{dz}$ der Einheit gleich gesetzt hat. Die hierin ausgesprochene Anforderung an die Beschaffenheit der neuen Veränderlichen ist aber eine durchaus gewaltsame, da sie in gar keiner Beziehung steht zu der Form der Funktionen $\alpha\,\beta\,\gamma \ldots .$, welche der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung (a) Genüge leisten. Man darf desshalb auch nicht erwarten, dass die n Funktionen $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1 \ldots .$, welche der neuen partiellen Differentialgleichung entsprechen, einfacher sich ausdrücken, als die Funktionen $\alpha\,\beta\,\gamma \ldots .$ Mit demselben Rechte dürfte man annehmen, dass dieselben im Gegentheil schwieriger sich darstellen, als die ursprünglichen Funktionen. Wenn man weiter in Erwägung bringt, dass, nachdem man die ersten Integrale der Differentialgleichung der $n$ten Ordnung $Yy^{(n)} + Z = 0$ dargestellt hat, die vorhin erwähnten Eliminationen im umgekehrten Sinne sich wiederholen, da nämlich an die Stelle der Differentialquotienten $y'y'' \ldots . y^{(n-1)}$ jene $n-1$ Veränderlichen $x\,w \ldots .$ wieder eingesetzt werden sollen, so unterliegt es keinem Zweifel, dass man die Integration des obigen Systems von Differentialgleichungen vortheilhafter von der Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\text{(a)} \qquad Z\frac{d\alpha}{dz} + Y\frac{d\alpha}{dy} + X\frac{d\alpha}{dx} + W\frac{d\alpha}{dw} + \ldots . = 0$$

abhängen lässt.

Wenn wir uns in diesen Blättern nur auf solche Untersuchungen einlassen wollen, welche dem eigentlichen Zwecke der Integralrechnung förderlich sind, so war es denn doch nicht überflüssig, auch die andere Methode, welche das System von Differentialgleichungen der ersten Ordnung auf eine Differentialgleichung der $n$ten Ordnung zurückführt, in ihren Einzelnheiten aus einander zu setzen. Denn wenn wir uns jetzt für den Gebrauch der Gleichung (a) entschieden haben, so stützt sich dieser Ausspruch doch auf die Voraussetzung, dass man bei der Integration der Differentialgleichung $n$ter Ordnung $Yy^{(n)} + Z = 0$ zunächst ein erstes Integral bestimmen müsse. Es giebt aber eine Gruppe von Differentialgleichungen, für welche dies nicht nothwendig ist,

da man eine andere Methode der Integration kennt, welche unmittelbar die endliche Gleichung mit ihren n willkührlichen Beständigen herbeiführt. Dies sind die linearen Differentialgleichungen. Da man es bei deren Integration nicht mehr mit der Darstellung einer Funktion von $n+1$ Veränderlichen zu thun hat, sondern sogleich eine Funktion mit nur zwei Veränderlichen erhält, so liegt hier allerdings eine einfachere Aufgabe vor, als dies die Integration einer partiellen Differentialgleichung mit $n+1$ Veränderlichen ist. Wenn also das System der Differentialgleichungen:

$$Z\frac{dy}{dz}=Y,\quad Z\frac{dx}{dz}=X,\quad Z\frac{dw}{dz}=W \text{ u. s. w.}$$

durch die Elimination der abhängigen Veränderlichen $xw....$ auf eine lineare Differentialgleichung der $n$ten Ordnung $Yy^{(n)}+Z=0$ führt, so können diejenigen Rechnungen, welche zur Entwickelung dieser Differentialgleichung erforderlich sind, durch die Vortheile jener anderen Methode aufgewogen werden, deren man sich zur Integration der linearen Differentialgleichungen bedient.

Insofern man nun veranlasst ist, die Differentialgleichung der $n$ten Ordnung $Yy^{(n)}+Z=0$ der partiellen Differentialgleichung

$$\text{(a)}\qquad Z\frac{d\alpha}{dz}+Y\frac{d\alpha}{dy}+X\frac{d\alpha}{dx}+W\frac{d\alpha}{dw}+....=0$$

bei der Integration des Systems von Differentialgleichungen

$$Z\frac{dy}{dz}=Y,\quad Z\frac{dx}{dz}=X,\quad Z\frac{dw}{dz}=W \text{ u. s. w.}$$

vorzuziehen, wird man auch, wenn es sich um die Bestimmung derjenigen Funktionen handelt, welche der partiellen Differentialgleichung (a) genügen, vortheilhafter aus jenem System von Differentialgleichungen die Differentialgleichung der $n$ten Ordnung $Yy^{(n)}+Z=0$ ableiten, um dann jene n Funktionen auf dem früher angegebenen Wege zu erzielen. Damit erhält man denn ein neues Hilfsmittel für die Integration der partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung, welches nicht selten vor den in dem vorigen Abschnitte gegebenen den Vorzug hat.

Wenn n Differentialgleichungen der zweiten Ordnung:

$$1.\ \frac{d^2y}{dz^2}=Y,\qquad 2.\ \frac{d^2x}{dz^2}=X,\qquad 3.\ \frac{d^2w}{dz^2}=W \text{ u. s. w}$$

vorliegen, worin $YXW....$ bestimmte Funktionen der Veränderlichen $zyxw....$ und der Differentialquotienten erster Ordnung

$y_z\, x_z\, w_z \ldots$ sind, und wenn es sich darum handelt, die Grössen $y\, x\, w \ldots$ als Funktionen von z zu bestimmen, so kann dies durch die Integration einer Differentialgleichung der $2n$ten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen geschehen. Denn wenn man aus den obigen n Gleichungen die $n-1$ Unbekannten $x\, w \ldots$ eliminirt, so behält man eine Differentialgleichung mit den beiden Veränderlichen y und z. Man bilde desshalb vor Allem die folgenden Differentialgleichungen:

$$2'.\quad \frac{d^3y}{dz^3} = \frac{dY}{dz} + \frac{dY}{dy} y_z + \frac{dY}{dx} x_z + \ldots + \frac{dY}{dy_z} Y + \frac{dY}{dx_z} X + \ldots = Y_1,$$

$$3'.\quad \frac{d^4y}{dz^4} = \frac{dY_1}{dz} + \frac{dY_1}{dy} y_z + \frac{dY_1}{dx} x_z + \ldots + \frac{dY_1}{dy_z} Y + \frac{dY_1}{dx_z} X + \ldots = Y_2,$$

u. s. w.

und zuletzt auch die Differentialgleichung:

$$(2n-1)'$$

$$\frac{d^{2n}y}{dz^{2n}} = \frac{dY_{2n-3}}{dz} + \frac{dY_{2n-3}}{dy} y_z + \frac{dY_{2n-3}}{dx} x_z + \ldots + \frac{dY_{2n-3}}{dy_z} Y + \frac{dY_{2n-3}}{dx_z} X + \ldots$$

Daraus lassen sich die $2n-2$ Grössen $x\, w \ldots x_z w_z \ldots$ eliminiren, und es entsteht eine Differentialgleichung der $2n$ten Ordnung mit den zwei Veränderlichen y und z. Nachdem man das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung aufgefunden hat, wird man dasselbe $(2n-1)$mal nach einander differentiiren, um in den so entstehenden Differentialgleichungen die aus den Gleichungen 1., 2'., 3'., ... $(2n-2)'$ sich ergebenden Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dz^2}, \frac{d^3y}{dz^3} \ldots \frac{d^{2n-1}y}{dz^{2n-1}}$ einzusetzen. Man hat dann im Ganzen $2n$ Gleichungen, zwischen den Veränderlichen $z\, y\, x\, w \ldots$ und den Differentialquotienten der ersten Ordnung $y_z\, x_z\, w_z \ldots$ Die Elimination dieser letzteren aber liefert die n endlichen Gleichungen, woraus die Unbekannten $y\, x\, w \ldots$ als Funktionen von z und von $2n$ willkührlichen Beständigen sich entwickeln lassen. Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man anstatt des allgemeinen Integrals sammt den $2n-1$ daraus abgeleiteten Differentialgleichungen die $2n$ ersten Integralformen jener Differentialgleichung der $2n$ten Ordnung gebraucht.

Man schlage diesen Weg ein, wenn die Differentialgleichung der $2n$ten Ordnung linear ist. In allen übrigen Fällen wird man auch hier wieder vortheilhafter die partielle Dif-

ferentialgleichung der ersten Ordnung bilden, woraus unmittelbar jene $2n$ Funktionen hervorgehen, welche aus den $2n$ ersten Integralformen jener Differentialgleichung der $2n$ten Ordnung entstehen, wenn man an die Stelle der Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dz^2}, \frac{d^3y}{dz^3} \dots \frac{d^{2n-1}y}{dz^{2n-1}}$ die Werthe aus den Gleichungen 1., 2'., 3'., ... $(2n-2)'$ einsetzt. Bezeichnet man irgend eine jener ersten Integralformen durch $\alpha = a$, so entsteht durch die Differentiation nach z die Gleichung:

(a)

$$\frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\alpha}{dy} y_z + \frac{d\alpha}{dx} x_z + \frac{d\alpha}{dw} w_z + \dots + Y \frac{d\alpha}{dy_z} + X \frac{d\alpha}{dx_z} + W \frac{d\alpha}{dw_z} + \dots = 0.$$

Nachdem man die $2n$ Gleichungen:

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma = c, \text{ u. s. w.}$$

aufgestellt hat, welche dieser partiellen Differentialgleichung genügen, bedarf es nur der Elimination der Differentialquotienten $y_z\, x_z\, w_z \dots$, um zu den n endlichen Gleichungen zwischen den Veränderlichen $z\, y\, x\, w \dots$ und den $2n$ willkührlichen Beständigen $a\, b\, c \dots$ zu gelangen.

1. Es seien: $\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{ay}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^2x}{dz^2} = \frac{ax}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$

Man hat hier die Gleichung:

$$\text{(a)} \quad \frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\alpha}{dy} y_z + \frac{d\alpha}{dx} x_z + \frac{a}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \left(y \frac{d\alpha}{dy_z} + x \frac{d\alpha}{dx_z}\right) = 0,$$

und genügt derselben vor Allem durch $yx_z - xy_z = b$. Denkt man sich nun die übrigen Funktionen von z und von den neuen Veränderlichen

$$r = \sqrt{y^2+x^2}, \quad s = \frac{y}{x}, \quad t = y_z^2 + x_z^2$$

abhängig, so geht die partielle Differentialgleichung über in:

$$\frac{d\alpha}{dz} + \frac{yy_z + xx_z}{r} \frac{d\alpha}{dr} + \frac{y_z - sx_z}{x} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{2a}{r^2} \frac{yy_z + xx_z}{r} \frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Daraus folgt, dass man durch $\frac{d\alpha}{dr} + \frac{2a}{r^2} \frac{d\alpha}{dt} = 0$ oder durch $t + \frac{2a}{r} = c$ genügt. Um nun die Differentialquotienten y_z und x_z mit Hilfe der beiden bis dahin bekannten Funktionen zu elimini-

sen, und zugleich y und x durch r und s zu ersetzen, so bemerke man zunächst, dass

$$(yy_z+xx_z)^2+(yx_z-xy_z)^2=(y^2+x^2)(y_z^2+x_z^2),$$

oder auch, wegen der verlangten Transformation:

$$(yy_z+xx_z)^2=cr^2-2ar-b^2$$

ist. Man erhält dann die neue Differentialgleichung:

$$\frac{d\alpha}{dz}+\frac{\sqrt{cr^2-2ar-b^2}}{r}\cdot\frac{d\alpha}{dr}-\frac{b(1+s^2)}{r^2}\frac{d\alpha}{ds}=0.$$

Die beiden Funktionen, welche hier genügen, entstehen durch die Integration der Differentialgleichungen:

$$dz=\frac{rdr}{\sqrt{cr^2-2ar-b^2}},\quad \frac{ds}{1+s^2}=\frac{-bdr}{r\sqrt{cr^2-2ar-b^2}},$$

und dies sind zugleich die beiden Gleichungen, woraus man y und x als Funktionen von z zu bestimmen hat.

Wenn die vorliegenden Differentialgleichungen nicht alle von der zweiten Ordnung sind, sondern wenn darunter m der ersten Ordnung vorkommen, da nämlich von den m abhängigen Veränderlichen $r\,s\,t$.... nur die Differentialquotienten der ersten Ordnung auftreten, so versteht es sich, dass man eine partielle Differentialgleichung mit nur $2n+1-m$ Veränderlichen erhält, woraus dann $2n-m$ verschiedene Funktionen hervorgehen. Aus diesen $2n-m$ Funktionen hat man dann noch die $n-m$ Differentialquotienten der ersten Ordnung $y_z\,x_z\,w_z$.... zu eliminiren, um zu den n endlichen Gleichungen zu gelangen, welche zwischen den Veränderlichen $z\,y\,x\,w$...., $r\,s\,t$.... und $2n-m$ willkührlichen Beständigen bestehen.

Wenn endlich ein System von n Differentialgleichungen vorliegt, worin eben so viele abhängige, aber nur eine unabhängige Veränderliche vorkommen, welche aber der Reihe nach der $m$ten, $p$ten, $q$ten u. s. w. Ordnung angehören, so könnte man durch die Elimination von irgend $n-1$ abhängigen Veränderlichen zur Bestimmung der letzten noch übrigen eine Differentialgleichung von der $(m+p+q+....)$ten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen herstellen. Doch wird man auch hier wieder vortheilhafter die partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung gebrauchen, deren $m+p+q+....$ verschiedene Funktionen $\alpha\,\beta\,\gamma$.... unmittelbar das allgemeine Integral des vorliegenden Systems liefern, wenn man mit Hilfe der Gleichungen:

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma = c \quad \text{u. s. w.}$$

die $m + p + q + \ldots - n$ Differentialquotienten der verschiedenen abhängigen Veränderlichen eliminirt.

Man hat jetzt gesehen, dass die Integration eines Systems von n Differentialgleichungen beliebiger Ordnung jedesmal durch die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zu Stande kommt, wenn nur eine einzige unabhängige Veränderliche da ist, so dass also jede der endlichen Gleichungen als Funktion von nur zwei Veränderlichen dargestellt werden kann. Anders verhält es sich, wenn die Differentialgleichungen mehr als eine unabhängige Veränderliche einschliessen, und desshalb auf endliche Gleichungen hindeuten, worin jedenfalls mehr als zwei Veränderliche vorkommen. Die partiellen Differentialgleichungen, deren System dann zu integriren ist, müssen eine ganz eigenthümliche Beschaffenheit haben, damit die Aufgabe mit der Integration einer partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung in einen so einfachen Zusammenhang trete. In der That ist eine solche Reduktion nur für das folgende System möglich:

$$Z\frac{dt}{dz} + Y\frac{dt}{dy} + X\frac{dt}{dx} + \ldots = T,$$

$$Z\frac{ds}{dz} + Y\frac{ds}{dy} + X\frac{ds}{dx} + \ldots = S,$$

$$Z\frac{dr}{dz} + Y\frac{dr}{dy} + X\frac{dr}{dx} + \ldots = R,$$

u. s. w.,

worin übrigens $Z\,Y\,X\ldots,\ T\,S\,R\ldots$ irgend Funktionen aller Veränderlichen $z\,y\,x\ldots,\ t\,s\,r\ldots$ sein können.

Denkt man sich da die n endlichen Gleichungen in der Form $\tau = 0$ und gleichzeitig die n abhängigen Veränderlichen $t\,s\,r\ldots$ und die m unabhängigen Veränderlichen $z\,y\,x\ldots$ einschliessend, so ergeben sich daraus die m Differentialgleichungen:

$$\frac{d\tau}{dz} + \frac{d\tau}{dt}\frac{dt}{dz} + \frac{d\tau}{ds}\frac{ds}{dz} + \frac{d\tau}{dr}\frac{dr}{dz} + \ldots = 0,$$

$$\frac{d\tau}{dy} + \frac{d\tau}{dt}\frac{dt}{dy} + \frac{d\tau}{ds}\frac{ds}{dy} + \frac{d\tau}{dr}\frac{dr}{dy} + \ldots = 0,$$

$$\frac{d\tau}{dx} + \frac{d\tau}{dt}\frac{dt}{dx} + \frac{d\tau}{ds}\frac{ds}{dx} + \frac{d\tau}{dr}\frac{dr}{dx} + \ldots = 0,$$

u. s. w.

Multiplizirt man dieselben bezüglich mit $Z\,Y\,X\ldots$ und addirt alsdann Alles, so findet sich, wenn zugleich Rücksicht genommen wird auf das vorliegende System, die partielle Differentialgleichung:

$$\text{(a)}\quad Z\frac{d\tau}{dz}+Y\frac{d\tau}{dy}+X\frac{d\tau}{dx}+\ldots+T\frac{d\tau}{dt}+S\frac{d\tau}{ds}+R\frac{d\tau}{dr}+\ldots=0,$$

und es unterliegt keinem Zweifel, dass jede Funktion, welche hier an der Stelle von τ genügt, zugleich das vorliegende System befriedigt. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (a) ist bekanntlich eine willkührliche Funktion von $m+n-1$ verschiedenen veränderlichen Grössen, welche einzeln der Differentialgleichung 1. Genüge leisten. Die n verschiedenen endlichen Gleichungen, welche dem vorliegenden System von partiellen Differentialgleichungen entsprechen, zeigen sich desshalb in ihrer allgemeinsten Form als eben so viele willkührliche Funktionen derselben $m+n-1$ veränderlichen Grössen $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots$ und sind durch die Gleichungen:

$$\psi_1(\alpha\,\beta\,\gamma\ldots)=0,\quad \psi_2(\alpha\,\beta\,\gamma\ldots)=0,\quad \psi_3(\alpha\,\beta\,\gamma\ldots)=0 \text{ u. s. w.}$$

dargestellt, worin die willkührlichen Funktionen $\psi_1\,\psi_2\,\psi_3\ldots$ durchaus unabhängig von einander gedacht werden können. Diese n Gleichungen werden übrigens durch eben so viele andere ersetzt, in deren jeder von den $m+n-1$ veränderlichen Grössen $\alpha\beta\gamma\ldots$, $\varrho\,\sigma\,\tau\ldots$ irgend $n-1$ fehlen, da sich diese letzteren jedesmal aus den ursprünglichen Gleichungen eliminiren lassen. Man kann desshalb auch schreiben:

$$\varrho=\psi_1(\alpha\,\beta\,\gamma\ldots),\quad \sigma=\psi_2(\alpha\,\beta\,\gamma\ldots),\quad \tau=\psi_3(\alpha\,\beta\,\gamma\ldots) \text{ u. s. w.}$$

Demnach wird man, um das allgemeine Integral des vorliegenden Systems partieller Differentialgleichungen darzustellen, irgend n von den $m+n-1$ Funktionen der partiellen Differentialgleichung (a) willkührlichen Funktionen der $m-1$ übrigen Funktionen $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots$ gleichsetzen.

2. Hat man z. B. die beiden Gleichungen:

$$s\frac{dt}{dy}-t\frac{dt}{dz}=0 \quad\text{und}\quad s\frac{ds}{dy}-t\frac{ds}{dz}=0,$$

so findet man zur Bestimmung des allgemeinen Integrals die einfache Gleichung:

$$\text{(a)}\qquad s\frac{d\tau}{dy}-t\frac{d\tau}{dz}=0.$$

Man genügt hier durch $\tau = t$, $\sigma = s$ und $\alpha = yt + zs$, und das allgemeine Integral ist ausgedrückt durch die beiden Gleichungen

$$t = \psi_1(yt + zs) \quad \text{und} \quad s = \psi_2(yt + zs).$$

Wenn die partiellen Differentialgleichungen, deren System zu integriren ist, dem obigen Schema nicht untergeordnet sind, so bleibt nichts übrig, als zu einer Elimination von abhängigen Veränderlichen zu schreiten. Dies führt aber auf partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die alsdann integrirt werden müssen.

V. Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von höherem Grade.

Wenn die Differentialquotienten z_x und z_y in einer Gleichung unter höheren Exponenten stehen, so wird man vor Allem untersuchen, ob die linke Seite der Gleichung $\psi(z_y\, z_x\, z\, y\, x) = 0$ in das Produkt einiger Faktoren zerlegbar ist, welche in Bezug auf die Differentialquotienten nur von dem ersten Grade sind. Denn wenn dies möglich ist, so wird die vorliegende Aufgabe dadurch auf die schon oben gelöste zurückgeführt. Man setze nämlich jeden einzelnen dieser Faktoren für sich gleich Null und man hat dann eben so viele Differentialgleichungen von der Form $Xz_x + Yz_y = Z$, worin $X\, Y\, Z$ Funktionen der drei Veränderlichen $x\, y\, z$ sind. Das allgemeine Integral jeder dieser Differentialgleichungen wird für sich die partielle Differentialgleichung $\psi(z_y\, z_x\, z\, y\, x) = 0$ befriedigen.

Entwickelt man den Werth des einen Differentialquotienten z_x aus der Gleichung $\psi(z_y\, z_x\, z\, y\, x) = 0$, und gelangt man dadurch zu mehreren Werthen z_x von der Form $Yz_y + Z$, worin Y und Z Funktionen der drei Veränderlichen z, y und x sind, so hat man es mit dem so eben erwähnten Falle zu thun, welcher also nichts weiter Bemerkenswerthes bietet. Wenn man aber durch die Entwickelung von z_x nicht mehr zu einem Werthe $Yz_y + Z$ gelangt, sondern zu irgend einer anderen Funktion des Differentialquotienten z_y, so dass also jetzt eine Gleichung $z_x = \psi(z_y\, z\, y\, x)$ vorliegt, so hat man eine Aufgabe, deren Lösung von eigenthümlichen Untersuchungen abhängig ist.

Das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung $Xz_x + Yz_y = Z$ hat jedesmal die Form $\varphi(\alpha\,\beta) = 0$, wo φ eine willkührliche Funktion, α und β aber bestimmte Funktionen der drei Veränderlichen z, y und x sind. Was nun die partielle Dif-

ferentialgleichung $z_x = \psi(z_y\, z\, y\, x)$ angeht, so ist es, wie sich im Laufe der Untersuchungen ergeben wird, unmöglich, das allgemeine Integral als endliche Gleichung zwischen den Veränderlichen z, y und x aufzustellen mit irgend willkührlichen Funktionen von bestimmten veränderlichen Grössen. Ueber die Natur der Willkührlichen wird man erst durch die Integration selber Aufschluss erhalten. Die allgemeine Integration kommt aber dadurch zu Stande, dass man diejenige Gleichung zwischen den Veränderlichen der partiellen Differentialgleichung und dem Differentialquotienten z_y aufstellt, welche auch durch die Differentiation aus dem allgemeinen Integral abgeleitet werden könnte. Denn wenn z_y als Funktion der drei Veränderlichen z, y und x bekannt ist, so ergiebt sich auch z_x als eine solche Funktion durch die partielle Differentialgleichung $z_x = \psi(z_y\, z\, y\, x)$; und das allgemeine Integral entsteht durch die Integration der vollständigen Differentialgleichung:

$$dz = z_y dy + z_x dx.$$

Man wird sich erinnern, dass die beiden Werthe z_y und z_x, welche durch die Differentiation einer und derselben endlichen Gleichung entstehen, in der Weise von einander abhängen, dass jederzeit die Gleichung:

$$\frac{dz_y}{dz} z_x + \frac{dz_y}{dx} = \frac{dz_x}{dz} z_y + \frac{dz_x}{dy}$$

erfüllt ist. Wenn man den Werth $z_x = \psi(z_y\, z\, y\, x)$ hier einsetzt, so erhält man eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades, durch deren Integration die verlangte Gleichung zwischen den Veränderlichen z, y und x und dem Differentialquotienten z_y erzielt wird. Man erhält die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{dz_y}{dx} - \frac{d\psi}{dz_y}\frac{dz_y}{dy} + (\psi - \frac{d\psi}{dz_y} z_y)\frac{dz_y}{dz} = \frac{d\psi}{dz} z_y + \frac{d\psi}{dy}$$

mit den vier Veränderlichen z_y, z, y und x. Das allgemeine Integral dieser Gleichung hat desshalb die Form $\varphi(\alpha\,\beta\,\gamma) = 0$, worin α, β und γ bestimmte Funktionen der vier Veränderlichen sind, welche der Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \frac{d\tau}{dx} - \frac{d\psi}{dz_y}\frac{d\tau}{dy} + (\psi - \frac{d\psi}{dz_y} z_y)\frac{d\tau}{dz} + \left(\frac{d\psi}{dz} z_y + \frac{d\psi}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_y} = 0$$

an der Stelle von τ genügen.

Nachdem man den Werth z_y aus der Gleichung $\varphi(\alpha\,\beta\,\gamma) = 0$

berechnet hat, bedarf es nur noch der Integration der vollständigen Differentialgleichung

$$\text{(b)} \qquad dz = z_y dy + \psi(z_y\, z\, y\, x)\, dx,$$

um das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung $z_x = \psi(z_y\, z\, y\, x)$ als Funktion der drei Veränderlichen z, y und x darzustellen. Da übrigens die Grösse z_y im Allgemeinen gleichzeitig in den drei Funktionen $\alpha\, \beta\, \gamma$ vorkommt, so kann deren Werth aus der Gleichung $\varphi(\alpha\, \beta\, \gamma) = 0$ erst dann ermittelt werden, nachdem man der willkührlichen Funktion φ eine bestimmte Form gegegeben hat; und die Integration der Gleichung (b) müsste desshalb für jedes einzelne φ besonders vorgenommen werden. Nun zeigt es sich aber, dass diese Integration durchgeführt werden kann, noch ehe die Grösse z_y mit Hilfe der Gleichung $\varphi(\alpha\, \beta\, \gamma) = 0$ eliminirt worden ist. Nachdem man das Integral der Gleichung (b) als Funktion der vier Veränderlichen $z_y\, z\, y\, x$ aufgestellt hat, dann ist die Elimination von z_y mit Hilfe der Gleichung $\varphi(\alpha\, \beta\, \gamma) = 0$ der einzige noch übrige Theil der Rechnung, welcher für jede einzelne Funktion φ besonders vorzunehmen ist. Die folgenden Untersuchungen werden aber auch das Ergebniss liefern, dass man nicht nöthig hat, aus der Gleichung (a) die drei Funktionen $\alpha\, \beta\, \gamma$ abzuleiten, um damit die Integralform $\varphi(\alpha\, \beta\, \gamma) = 0$ herzustellen, sondern dass man zu diesem Zwecke mit der einzigen Funktion α ausreicht.

Um die Gleichung (b) in der angegebenen Weise zu integriren, schicken wir die Integration für den besonderen Fall voraus, in welchem die Gleichung $\varphi(\alpha\, \beta\, \gamma) = 0$ in die einfachere $\alpha = \alpha_1$ übergeht, worin α_1 als Beständige gedacht wird. Man bestimme in dieser Absicht den Werth z_y aus der Gleichung $\alpha = \alpha_1$ als Funktion der drei Veränderlichen $z\, y\, x$ und der Beständigen α_1. Nachdem man diesen Werth z_y in die Gleichung

$$\text{(b)} \qquad dz = z_y dy + \psi(z_y\, z\, y\, x)\, dx$$

eingesetzt hat, lässt sich dieselbe mit Hilfe eines integrirenden Faktors in das vollständige Differential

$$\frac{df}{dz} dz + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dx} dx = 0$$

umwandeln. Durch die Integration erhält man:

$$f(z\, y\, x\, \alpha_1) = \varphi(\alpha_1),$$

wo $\varphi(\alpha_1)$ die Stelle der durch die Integration eingeführten willkührlichen Beständigen vertritt. Man hat diese Integralform, worin

die beiden willkührlichen Beständigen α_1 und $\varphi(\alpha_1)$ vorkommen, ein vollständiges Differential der partiellen Differentialgleichung $z_x = \psi(z_y\, z\, y\, x)$ genannt.

Man setze nun in dem vollständigen Integral an die Stelle von α_1 die Funktion α ein und differentiire. Dadurch entsteht:

$$\frac{df}{dz}dz + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dx}dx + \left(\frac{df}{d\alpha} - \varphi'(\alpha)\right) d\alpha = 0.$$

Wenn man die Gleichung $\frac{df}{d\alpha} - \varphi'(\alpha) = 0$ bestehen lässt und zugleich mit $\frac{df}{dz}$ theilt, so wird die vorliegende Differentialgleichung wieder umgewandelt in die obige:

$$\text{(b)} \qquad dz = z_y dy + \psi(z_y\, z\, y\, x)\, dx.$$

Denn wenn in der Gleichung $z_y = \frac{df}{dy} : \frac{df}{dz}$, welche durch die Entwickelung von z_y aus der Gleichung $\alpha = \alpha_1$ entstanden ist, an die Stelle von α_1 die Funktion α tritt, so hat man offenbar eine identische Gleichung vor sich; und dasselbe ereignet sich dann auch für die Gleichung $\psi(z_y\, z\, y\, x) = \frac{df}{dx} : \frac{df}{dz}$. Hieraus folgt zunächst, dass man den Werth z_y aus der Gleichung $\frac{df}{d\alpha} - \varphi'(\alpha) = 0$ zu bestimmen hat, wenn das Integral der Gleichung (b) in der Form

$$f(z\, y\, x\, \alpha) = \varphi(\alpha)$$

ausgedrückt werden soll. Da nun aber jene frühere Gleichung $\varphi(\alpha\, \beta\, \gamma) = 0$ den allgemeinsten Werth z_y liefert, für welchen die vollständige Differentialgleichung (b) überhaupt eine endliche Gleichung zwischen den drei Veränderlichen z, y und x zur Folge hat, so muss jene Gleichung $\frac{df}{d\alpha} - \varphi'(\alpha) = 0$ als besonderer Fall in der Gleichung $\varphi(\alpha\, \beta\, \gamma) = 0$ enthalten sein. Es unterliegt also keinem Zweifel, dass die Gleichung

$$f(z\, y\, x\, \alpha) = \varphi(\alpha)$$

das Integral der Gleichung (b) ist, für den Fall, dass jene Gleichung $\varphi(\alpha\, \beta\, \gamma) = 0$ in die einfachere $\frac{df}{d\alpha} - \varphi'(\alpha) = 0$ übergeht. Doch man steht nun auf dem Punkte, einzusehen, dass durch dieselbe endliche Gleichung das Integral der vollständigen Differential-

gleichung (b) auch dann noch ausgedrückt ist, wenn der Werth z_y aus der allgemeinen Gleichung $\varphi(\alpha\,\beta\,\gamma)=0$ gezogen wird. Denn setzt man abkürzend $f(z\,y\,x\,\alpha)=\beta$, so lässt sich jene Gleichung $\beta=\varphi(\alpha)$ auch in der Form:

$$\varphi(\alpha\,\beta)=0$$

anschreiben, da man durch die Entwickelung von β hieraus wieder die Gleichung $\beta=\varphi(\alpha)$ ableitet. Wenn man aber die Gleichung $\varphi(\alpha\,\beta)=0$ nach α differentiirt, um durch dieselbe Betrachtung wie vorhin diejenige Gleichung zu erhalten, woraus z_y bestimmt werden müsste, damit $\varphi(\alpha\,\beta)=0$ das allgemeine Integral der Gleichung (b) darstellt, so entsteht:

$$\frac{d\varphi}{d\alpha}+\frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha}=0.$$

Man bezeichne die Funktion $\frac{d\beta}{d\alpha}$ durch γ, und es ist offenbar, dass sich die vorliegende Gleichung als willkührliche Funktion der drei veränderlichen Grössen α, β und γ auffassen lässt, und also identisch sein muss mit dem allgemeinen Integral $\varphi(\alpha\,\beta\,\gamma)=0$ der Gleichung (a). Man hat somit die allgemeine Gleichung $\varphi(\alpha\,\beta\,\gamma)=0$ aus der einfacheren $\alpha=\alpha_1$ unmittelbar abgeleitet, und man sieht auch ein, dass die Gleichung:

$$f(z\,y\,x\,\alpha)=\varphi(\alpha)$$

in der That als allgemeines Integral der partiellen Differentialgleichung $z_x=\psi(z_y\,z\,y\,x)$ angesehen werden darf, insofern man zur Elimination des Differentialquotienten z_y, welcher dort noch eine Stelle findet, die Gleichung

$$\frac{df}{d\alpha}=\varphi'(\alpha)$$

gebraucht. Diese Elimination kann übrigens erst dann ausgeführt werden, nachdem die willkührliche Funktion φ in eine bestimmte übergegangen ist. Da z_y nur in der Funktion α eine Stelle findet, so versteht es sich, dass die Elimination von z_y mit der von α zusammenfällt. Man kann deshalb auch sagen, dass das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung $z_x=\psi(z_y\,z\,y\,x)$ aus den beiden Gleichungen:

$$f(z\,y\,x\,\alpha)=\varphi(\alpha) \quad \text{und} \quad \frac{df}{d\alpha}=\varphi'(\alpha)$$

durch die Elimination von α gewonnen werde.

Wenn es übrigens nicht gerade darauf ankommt, denjenigen Werth der Veränderlichen z zu bestimmen, welcher zweien gege-

benen Werthen der beiden anderen Veränderlichen y und x entspricht, sondern wenn nur verlangt wird, dass man die jedesmal zusammengehörigen Werthe z, y und x aufstelle, so bedarf es nicht einmal der Elimination von α. Man denke sich dann die Grösse α und zugleich irgend eine von den drei Veränderlichen z, y und x, etwa x, als die beiden unabhängigen Veränderlichen. Die zugehörigen Werthe der beiden anderen Veränderlichen z und y berechnen sich dann aus den beiden Gleichungen:

$$f(z\,y\,x\,\alpha) = \varphi(\alpha) \quad \text{und} \quad \frac{df}{d\alpha} = \varphi'(\alpha).$$

Man sieht jetzt ein, dass die Integration der partiellen Differentialgleichung $z_x = \psi(z_y\,z\,y\,x)$ auf die Bestimmung eines vollständigen Integrals zurückkommt. Es ist aber nicht nothwendig, dass das vollständige Integral auf dem oben angegebenen Wege mit Hilfe der Gleichung (a) erzielt werde. Die Integration der partiellen Differentialgleichung $z_x = \psi(z_y\,z\,y\,x)$ wird manchmal wesentlich abgekürzt, indem es gelingt, auch ohne die Hilfe der Gleichung (a) ein besonderes Integral der partiellen Differentialgleichung anzugeben, worin zwei willkührliche Beständige α_1 und $\varphi(\alpha_1)$ vorkommen.

1. Es sei $z_x = \psi(z_y)$.

Man findet hier ein vollständiges Integral in der Form $z = \alpha y + \beta x + \gamma$, worin α, β und γ Beständige sind. Denn setzt man dies ein, so bleibt $\beta = \psi(\alpha)$, so dass also α und γ willkührlich bleiben. Man setze nun $\gamma = \varphi(\alpha)$, und das allgemeine Integral der obigen Gleichung ergiebt sich durch die Elimination von α aus den beiden Gleichungen:

$$z = \alpha y + x\psi(\alpha) + \varphi(\alpha) \quad \text{und} \quad 0 = y + x\psi'(\alpha) + \varphi'(\alpha).$$

2. Es sei nun $z^2(1 + z_x^2 + z_y^2) = a^2$.

Zur Berechnung von α findet sich, da $z_x = \sqrt{\frac{a^2}{z^2} - z_y^2 - 1}$ ist, die Gleichung:

$$\text{(a)} \quad \sqrt{\frac{a^2}{z^2} - z_y^2 - 1}\,\frac{d\tau}{dx} + z_y\frac{d\tau}{dy} + \left(\frac{a^2}{z^2} - 1\right)\frac{d\tau}{dz} - \frac{a^2 z_y}{z^3}\,\frac{d\tau}{dz_y} = 0.$$

Man genügt durch die einfachere:

$$\left(\frac{a^2}{z^2} - 1\right) dz_y + \frac{a^2 z_y}{z^3}\,dz = 0,$$

und diese führt auf das vollständige Differential:

$$\frac{dz_y}{z_y}+\frac{\frac{a^2dz}{z^3}}{\frac{a^2}{z^2}-1}=0.$$

Die Integration liefert $\alpha=\frac{z_y}{\sqrt{\frac{a^2}{z^2}-1}}=\frac{zz_y}{\sqrt{a^2-z^2}}$. Man hat also

$z_y=\frac{\alpha\sqrt{a^2-z^2}}{z}$, und die Gleichung (b) zeigt sich in der Form:

$$\text{(b)}\qquad dz=\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z}(\alpha dy+\sqrt{1-\alpha^2}.dx).$$

Theilt man durch $\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z}$, und nimmt man $\sin\alpha$ anstatt α, so hat man das vollständige Differential:

$$\frac{zdz}{\sqrt{a^2-z^2}}=\sin\alpha.dy+\cos\alpha.dx.$$

Durch die Integration entsteht:

$$\sqrt{a^2-z^2}+y\sin\alpha+x\cos\alpha=\varphi(\alpha),$$

und das allgemeine Integral ist ausgedrückt durch die beiden Gleichungen

$$\sqrt{a^2-z^2}+y\sin\alpha+x\cos\alpha=\varphi(\alpha)\quad\text{und}\quad y\cos\alpha-x\sin\alpha=\varphi'(\alpha).$$

3. Es sei noch $y(z_x^2+z_y^2)=zz_y$.

Man findet, da hier $z_x=\sqrt{\frac{zz_y}{y}-z_y^2}$ ist, zur Bestimmung von α die Gleichung:

$$\text{(a)}$$

$$2\sqrt{\frac{zz_y}{y}-z_y^2}.\frac{d\tau}{dx}+(2z_y-\frac{z}{y})\frac{d\tau}{dy}+\frac{zz_y}{y}\frac{d\tau}{dz}+\frac{z_y}{y}(z_y-\frac{z}{y})\frac{d\tau}{dz_y}=0.$$

Man genügt derselben durch $\alpha=\frac{zz_y}{y}$. Daraus folgt $z_y=\frac{\alpha y}{z}$; und die Gleichung (b) ist:

$$dz=\frac{\alpha ydy}{z}+\sqrt{\alpha-\frac{\alpha^2y^2}{z^2}}\,dx.$$

Vertauscht man darin $\sqrt{\alpha}$ gegen α, so findet sich das vollständige Differential:

$$\frac{zdz-\alpha^2ydy}{\sqrt{z^2-\alpha^2y^2}}-\alpha dx=0.$$

Durch die Integration entsteht:

$$\sqrt{z^2 - \alpha^2 y^2} = \alpha x + \varphi(\alpha).$$

Das allgemeine Integral ist demnach ausgedrückt durch die beiden Gleichungen:

$$\sqrt{z^2 - \alpha^2 y^2} = \alpha x + \varphi(\alpha) \quad \text{und} \quad \alpha y^2 + \sqrt{z^2 - \alpha^2 y^2}.(x + \varphi'(\alpha)) = 0.$$

Es ist unmöglich, eine endliche Gleichung zwischen den Veränderlichen z, y und x anzugeben mit irgend willkührlichen Funktionen bestimmter veränderlicher Grössen, so dass dieselbe das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung $z = \psi(z_y\, z\, y\, x)$ darstellt. Denn das allgemeine Integral hat hier zwar die Form $\beta = \varphi(\alpha)$, wo β eine bestimmte Funktion der Veränderlichen $z\, y\, x$ und von α ist; allein die Grösse α ist nicht eine bestimmte Funktion der Veränderlichen z, y und x, sondern von der willkührlichen Funktion φ selbst abhängig, da dieselbe aus der Gleichung $\frac{d\beta}{d\alpha} = \varphi'(\alpha)$ zu berechnen ist. Die Methode, wornach man die partielle Differentialgleichung $z_x = \psi(z_y\, z\, y\, x)$ integrirt, ist übrigens allgemein gültig, und muss desshalb auch auf die Gleichung $Xz_x + Yz_y = Z$ anwendbar sein. Es ist nicht schwer, dasjenige, was man von dem allgemeinen Integral dieser partiellen Differentialgleichung weiss, mit den so eben gemachten Bemerkungen in Einklang zu bringen. Da es nämlich feststeht, dass das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung $Xz_x + Yz_y = Z$ in der Form $\beta = \varphi(\alpha)$ auftritt, worin α und β bestimmte Funktionen der drei Veränderlichen z, y und x sind, so müssen sich, wenn es auf die Bestimmung der Werthe z_x und z_y ankommt, die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d\beta}{dz} z_y + \frac{d\beta}{dy} = \varphi'(\alpha)\left(\frac{d\alpha}{dz} z_y + \frac{d\alpha}{dy}\right),$$

$$\frac{d\beta}{dz} z_x + \frac{d\beta}{dx} = \varphi'(\alpha)\left(\frac{d\alpha}{dz} z_x + \frac{d\alpha}{dx}\right)$$

ergeben. Lässt man die willkührliche Funktion φ in eine willkührliche Beständige c übergehen, so hat man offenbar zwei Werthe z_y und z_x von derjenigen Allgemeinheit, wie sie nach der oben gegebenen Vorschrift in die vollständige Differentialgleichung

$$\text{(b)} \qquad dz = z_y dy + z_x dx$$

eingesetzt werden müssen, um daraus das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung $Xz_x + Yz_y = Z$ ableiten zu können. Die vorliegenden Werthe z_y und z_x wandeln die Gleichung (b) um in:

$$\frac{d\beta}{dz}dz + \frac{d\beta}{dy}dy + \frac{d\beta}{dx}dx = c\left(\frac{d\alpha}{dz}dz + \frac{d\alpha}{dy}dy + \frac{d\alpha}{dx}dx\right);$$

und durch die Integration entsteht $\beta = \alpha c + \varphi(c)$. Das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung $Xz_x + Yz_y = Z$ lässt sich demnach durch die beiden Gleichungen:

$$\beta = \alpha\gamma + \varphi(\gamma), \quad \text{und} \quad \alpha + \varphi'(\gamma) = 0$$

ausdrücken. Die Elimination von γ zeigt sich hier unabhängig von der besonderen Beschaffenheit der willkührlichen Funktion φ. Denn aus der Gleichung $\alpha + \varphi'(\gamma) = 0$ folgt offenbar $\gamma = f(\alpha)$. Wenn man dies in die andere Gleichung $\beta = \alpha\gamma + \varphi(\gamma)$ einsetzt, so gelangt man in der That zu jener einfachen Integralform $\beta = \varphi(\alpha)$, worin α und β bestimmte Funktionen der Veränderlichen z, y und x bezeichnen.

Bei der Bestimmung des Differentialquotienten z_y als Funktion der drei Veränderlichen z, y und x ist man in dem Bisherigen von der Voraussetzung ausgegangen, dass der Differentialquotient z_x aus der vorliegenden partiellen Differentialgleichung $\psi(z_y z_x z y x) = 0$ sich entwickeln lasse. Wenn nun aber dies nicht möglich, oder doch nur in einer unbequemen Form zu bewerkstelligen ist, so suche man eine Gleichung $\tau = 0$ auf als Funktion der Veränderlichen und der beiden Differentialquotienten z_x und z_y, so dass die beiden Gleichungen $\psi = 0$ und $\tau = 0$ vorliegen, wenn es auf die Bestimmung der beiden Differentialquotienten ankommt. Was nun die Funktion τ betrifft, so ergiebt sich diese wieder aus einer partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades. Denn die Differentiation von $\tau = 0$ liefert die beiden Gleichungen:

$$\frac{d\tau}{dz_y}\left(\frac{dz_y}{dy}\right) + \frac{d\tau}{dz_x}\left(\frac{dz_x}{dy}\right) + \left(\frac{d\tau}{dy}\right) = 0,$$

$$\frac{d\tau}{dz_y}\left(\frac{dz_y}{dx}\right) + \frac{d\tau}{dz_x}\left(\frac{dz_x}{dx}\right) + \left(\frac{d\tau}{dx}\right) = 0,$$

indem man abkürzend $\frac{d\tau}{dz}z_y + \frac{d\tau}{dy} = \left(\frac{d\tau}{dy}\right)$, $\frac{d\tau}{dz}z_x + \frac{d\tau}{dx} = \left(\frac{d\tau}{dx}\right)$ u. s. w. setzt. Ebenso giebt die partielle Differentialgleichung $\psi = 0$ die beiden:

$$\frac{d\psi}{dz_y}\left(\frac{dz_y}{dy}\right) + \frac{d\psi}{dz_x}\left(\frac{dz_x}{dy}\right) + \left(\frac{d\psi}{dy}\right) = 0,$$

$$\frac{d\psi}{dz_y}\left(\frac{dz_y}{dx}\right) + \frac{d\psi}{dz_x}\left(\frac{dz_x}{dx}\right) + \left(\frac{d\psi}{dx}\right) = 0.$$

Wenn man daraus zunächst die Differentialquotienten $\left(\frac{dz_y}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz_y}{dy}\right)$ eliminirt, so behält man die Gleichungen:

$$\left(\frac{d\psi}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x}-\frac{d\psi}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y}\right)\left(\frac{dz_x}{dy}\right)+\frac{d\psi}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dy}\right)-\left(\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_y}=0,$$

$$\left(\frac{d\psi}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y}-\frac{d\psi}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x}\right)\left(\frac{dz_y}{dx}\right)+\frac{d\psi}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dx}\right)-\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_x}=0.$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung $\left(\frac{dz_x}{dy}\right)=\left(\frac{dz_y}{dx}\right)$ aber erhält man durch die Addition:

$$\frac{d\psi}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dx}\right)+\frac{d\psi}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dy}\right)-\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_x}-\left(\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_y}=0,$$

oder auch, indem man die Werthe $\left(\frac{d\tau}{dy}\right)\left(\frac{d\tau}{dx}\right)$.... wieder einsetzt, die Gleichung:

$$\text{(c)}\qquad \left.\begin{matrix}\frac{d\psi}{dz_x}\frac{d\tau}{dx}+\frac{d\psi}{dz_y}\frac{d\tau}{dy}+\left(\frac{d\psi}{dz_x}z_x+\frac{d\psi}{dz_y}z_y\right)\frac{d\tau}{dz}\\ -\left(\frac{d\psi}{dz}z_x+\frac{d\psi}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_x}-\left(\frac{d\psi}{dz}z_y+\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_y}\end{matrix}\right\}=0.$$

Daraus ergiebt sich jene Gleichung $\tau=0$, welche in Verbindung mit der Gleichung $\psi=0$ zur Darstellung der beiden Differentialquotienten z_x und z_y zu verwenden ist. Man sieht auf der Stelle, dass man durch $\tau=\psi$ genügt. Wenn man die Lösung $\psi=0$ benutzt, um den Differentialquotienten z_x zu eliminiren, so kommt man wieder auf die Gleichung (a), der man sich oben zur Bestimmung von z_y bedient hat. Man braucht aber nicht grade diese Elimination vorzunehmen, um zu einer zweiten Funktion τ zu gelangen, welche der Gleichung (c) genügt. Es kann vorkommen, dass diese Elimination unausführbar ist, oder, dass wenigstens eine zweite Funktion $\tau=\alpha$ vortheilhafter auf andere Weise aus der Gleichung (c) abgeleitet wird. Nachdem man die Werthe z_x und z_y aus den Gleichungen $\psi=0$ und $\alpha=\alpha_1$ berechnet hat, erhält man durch die Integration der vollständigen Differentialgleichung:

$$\text{(b)}\qquad dz=z_y dy+z_x dx$$

eine Gleichung $f(z\,y\,x\,\alpha_1)=\varphi(\alpha_1)$. Das allgemeine Integral der par-

tiellen Differentialgleichung $\psi(z_y z_x z y x) = 0$ aber ist wieder das Resultat der Elimination von α zwischen den beiden Gleichungen:

$$f(z y x \alpha) = \varphi(\alpha), \quad \text{und} \quad \frac{df}{d\alpha} = \varphi'(\alpha).$$

4. Es sei $(x^2 + y^2)(z_x^2 + z_y^2) = 1$.

In der Voraussetzung, dass die Funktion α von z unabhängig sei, hat man zur Bestimmung von α die Gleichung:

(c)

$$(x^2 + y^2)(z_x \frac{d\tau}{dx} + z_y \frac{d\tau}{dy}) - (z_x^2 + z_y^2)(x \frac{d\tau}{dz_x} + y \frac{d\tau}{dz_y}) = 0.$$

Man genügt aber durch $\alpha = xz_y - yz_x$. Daraus folgt $z_x = \frac{xz_y - \alpha}{y}$. Wenn man dies in die partielle Differentialgleichung einsetzt, so hat man die Gleichung zur Bestimmung von z_y. Man findet:

$$z_y = \frac{\alpha x + \sqrt{1-\alpha^2}.y}{x^2 + y^2}, \quad \text{und} \quad z_x = \frac{-\alpha y + \sqrt{1-\alpha^2}.x}{x^2 + y^2}.$$

Vertauscht man α mit $\sin\alpha$, so hat man die vollständige Differentialgleichung:

$$\text{(b)} \qquad dz = \cos\alpha . \frac{ydy + xdx}{x^2 + y^2} + \sin\alpha . \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Daraus findet man als allgemeines Integral der partiellen Differentialgleichung die beiden Gleichungen:

$$z = \cos\alpha . l\sqrt{y^2 + x^2} + \sin\alpha . \operatorname{arc tg}\frac{y}{x} + \varphi(\alpha),$$

$$\sin\alpha . l\sqrt{y^2 + x^2} = \cos\alpha . \operatorname{arc tg}\frac{y}{x} + \varphi'(\alpha).$$

Man weiss, dass die Integration einer partiellen Differentialgleichung des ersten Grades wesentliche Erleichterungen erfährt durch die geeigneten Transformationen oder durch die Einführung von neuen Veränderlichen, welche als Funktionen der vorkommenden Veränderlichen gedacht werden. Dies gilt also auch für die Gleichung (c). Was die Wahl der neuen Veränderlichen betrifft, so geben darüber die früheren Untersuchungen bestimmte Vorschriften. Ich will noch ein anderes Hilfsmittel der Transformation angeben, was gerade hier einen besonderen Vortheil bietet, wo es schliesslich jedesmal darauf ankommt, die

beiden Differentialquotienten z_x und z_y als Funktionen der Veränderlichen z, y und x darzustellen. Man setze nämlich eine gewisse Funktion der in der partiellen Differentialgleichung $\psi = 0$ vorkommenden Grössen einer neuen Veränderlichen s gleich; man bilde also die Gleichung $f(z_y\, z_x\, z\, y\, x) = s$, in der Weise, dass die beiden Differentialquotienten z_y und z_x ohne Anstand aus den Gleichungen $\psi = 0$ und $f(z_y z_x z y x) = s$ als Funktionen von $z\,y\,x$ und von s entwickelt werden. Es trifft sich dann gewöhnlich, dass jene Annahme $f = s$ auch der Integration der Gleichung (c) förderlich ist. Um diese Gleichung darnach umzubilden, setze man die beiden Werthe $z_y = \psi_1(s z y x)$ und $z_x = \psi_2(s z y x)$ in die Gleichung:

$$\frac{dz_y}{dz} z_x + \frac{dz_y}{dx} = \frac{dz_x}{dz} z_y + \frac{dz_x}{dy}$$

ein, und es entseht zur Bestimmung von s die Gleichung:

$$\frac{d\psi_1}{ds}\frac{ds}{dx} - \frac{d\psi_2}{ds}\frac{ds}{dy} + \left(\frac{d\psi_1}{ds}\psi_2 - \frac{d\psi_2}{ds}\psi_1\right)\frac{ds}{dz}$$
$$= \frac{d\psi_2}{dz}\psi_1 + \frac{d\psi_2}{dy} - \frac{d\psi_1}{dz}\psi_2 - \frac{d\psi_1}{dx}.$$

Nachdem man ein besonderes Integral $\alpha = \alpha_1$ aufgefunden hat, erhält man das allgemeine Integral aus der vollständigen Differentialgleichung:

$$dz = \psi_1(s\, z\, y\, x)dy + \psi_2(s\, z\, y\, x)dx,$$

worin der aus der Glichung $\alpha = \alpha_1$ gezogene Werth s einzusetzen ist.

5. Es sei nun $y^2 z_x{}^2 - 2xy z_x z_y + (1-y^2) z_y{}^2 = y^2$.

Man nehme hier $s = \frac{z_y}{z_x}$. Dadurch entstehen die beiden Werthe:

$$z_x = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 2xys + (1-y^2)s^2}} \quad \text{und} \quad z_y = \frac{ys}{\sqrt{y^2 - 2xys + (1-y^2)s^2}}.$$

In der Voraussetzung, dass die Veränderliche z in α nicht vorkomme, schreibt man zur Bestimmung von s die Gleichung:

$$\text{(c)} \qquad y^2(y - xs)\frac{d\tau}{dx} - (xy - (1-y^2)s)\left(y\frac{d\tau}{dy} + s\frac{d\tau}{ds}\right) = 0.$$

Man genügt derselben durch $\alpha = \frac{y}{s}$, oder $s = \frac{y}{\alpha}$. Man gelangt so zu den beiden Werthen:

$$z_x = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 2x\alpha + 1 - y^2}}, \quad \text{und} \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{\alpha^2 - 2x\alpha + 1 - y^2}},$$

und dann zu dem vollständigen Differential:

$$dz - \frac{\alpha dx + y dy}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha x + 1 - y^2}} = 0.$$

Durch die Integration entsteht $z + \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha x + 1 - y^2} = \varphi(\alpha)$; und das allgemeine Integral ist ausgedrückt durch die beiden Gleichungen:

$$z + \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha x + 1 - y^2} = \varphi(\alpha),$$

und

$$\alpha - x = \varphi'(\alpha) . \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha x + 1 - y^2}.$$

6. Es sei $zz_x = (yz_x + xz_y)(z_y + \sqrt{z_y^2 - z_x^2})$.

Man nehme hier $s = \frac{z_y}{z_x} + \sqrt{\left(\frac{z_y}{z_x}\right)^2 - 1}$. Daraus folgt dann $\frac{z_y}{z_x} = \frac{s^2 + 1}{2s}$, und dies führt auf die beiden Werthe:

$$z_y = \frac{(s + \frac{1}{s})z}{2sy + (s^2 + 1)x}, \quad \text{und} \quad z_x = \frac{2z}{2sy + (s^2 + 1)x}.$$

Man findet unter der Voraussetzung, dass α von z unabhängig sei, zur Bestimmung dieser Funktion die Gleichung:

$$\text{(c)} \qquad (s - \frac{1}{s})^2 (x \frac{d\tau}{dx} - s \frac{d\tau}{ds}) + 4(y + sx)\left(\frac{1}{s} \frac{d\tau}{dx} - \frac{d\tau}{dy}\right) = 0.$$

Man genügt derselben durch $\alpha = y + sx$ oder $s = \frac{\alpha - y}{x}$; und man gelangt dadurch zu den beiden Werthen:

$$\frac{z_y}{z} = \frac{(\alpha - y)^2 + x^2}{(\alpha - y)(\alpha^2 - y^2 + x^2)}, \quad \text{und} \quad \frac{z_x}{z} = \frac{2x}{\alpha^2 - y^2 + x^2}.$$

Die vollständige Differentialgleichung:

$$\frac{dz}{z} - \frac{dy}{\alpha - y} + \frac{2y dy}{\alpha^2 - y^2 + x^2} - \frac{2x dx}{\alpha^2 - y^2 + x^2} = 0$$

führt auf die endliche Gleichung: $\alpha^2 - y^2 + x^2 = \varphi(\alpha) . z(\alpha - y)$; und das allgemeine Integral ist ausgedrückt durch die beiden Gleichungen:

$$\frac{\alpha^2-y^2+x^2}{z(\alpha-y)}=\varphi(\alpha),\quad\text{und}\quad\frac{(\alpha-y)^2-x^2}{z(\alpha-y)^2}=\varphi'(\alpha).$$

Wenn die Entwicklung einer der beiden Differentialquotienten aus der Gleichung $\psi(z_y\, z_x\, z\, y\, x)=0$ nicht gut ausgeführt werden kann, und wenn sich dann eine einfachere Funktion f findet, welche die Eigenschaft besitzt, dass man den einen Differentialquotienten ohne Anstand aus der Gleichung $f(z_y\, z_x\, z\, y\, x)=s$ entwickelt, so kann es vorkommen, dass dadurch die partielle Differentialgleichung die Form $\psi_1(s\, z\, y\, x)=0$ annimmt. In diesem Falle wird man mit Vortheil den folgenden Weg einschlagen. Man entwickle den Werth $z=\psi(s\, y\, x)$ aus der Gleichung $\psi_1=0$, und bide daraus durch Differentiiren die Werthe:

$$z_y=\frac{d\psi}{ds}s_y+\frac{d\psi}{dy},\quad\text{und}\quad z_x=\frac{d\psi}{ds}s_x+\frac{d\psi}{dx}.$$

Man setze nun die Werthe z, z_y und z_x in die Gleichung $f=s$ ein. Dadurch gelangt man zu einer partiellen Differentialgleichung $f_1(s_y\, s_x\, s\, y\, x)=0$, welche nach den früheren Regeln sich integriren lässt. Da nämlich der Werth z_x der Voraussetzung nach ohne Anstand aus der Gleichung $f=s$ entwickelt wird, so kann dasselbe auch für den Differentialquotienten s_x geschehen, indem man sich der Gleichung: $f_1(s_y\, s_x\, s\, y\, x)=0$ bedient. Nachdem man das allgemeine Integral der letzten Gleichung aufgefunden hat, bleibt nur noch übrig, die Grösse s mittels $\psi_1(s\, z\, y\, x)=0$ zu eliminiren.

7. Es sei $2z=(s+\frac{1}{s})ax+\psi(s)$, nachdem man abkürzend

$$s=\frac{z_x-\sqrt{z_x^2+z_y^2-a^2}}{z_y+a}$$

gesetzt hat.

Man bilde aus der vorliegenden Differentialgleichung die beiden Werthe:

$$2z_y=((1-\frac{1}{s^2})ax+\psi'(s))\frac{ds}{dy},$$

$$2z_x=((1-\frac{1}{s^2})ax+\psi'(s))\frac{ds}{dx}+a(s+\frac{1}{s}).$$

Um dieselben in die Gleichung $s(z_y+a)=z_x-\sqrt{z_x^2+z_y^2-a^2}$ einzuführen, schaffe man hier vorerst die Wurzelgrösse weg. Man erhält:

$$s^2(z_y+a)^2-2sz_x(z_y+a)=z_y^2-a^2,$$

oder auch, nachdem man mit $s(z_y+a)$ getheilt hat, die Gleichung:

$$2z_x=(s-\frac{1}{s})z_y+a(s+\frac{1}{s}).$$

Wenn man nun aber die Werthe z_y und z_x einsetzt, so erhält man die neue Gleichung:

$$2\frac{ds}{dx}-(s-\frac{1}{s})\frac{ds}{dy}=0.$$

Das allgemeine Integral zeigt sich in der Fom:

$$2y+(s-\frac{1}{s})x=\varphi(s).$$

Das allgemeine Integral der ursprünglichen Differentialgleichung aber ist dargestellt durch die beiden Gleichungen:

$$2z=(s+\frac{1}{s})ax+\psi(s)$$

und

$$2y+(s-\frac{1}{s})ax=\varphi(s).$$

Oftmals ist es vortheilhafter, sogleich in der partiellen Differentialgleichung $\psi(z_y\,z_x\,z\,y\,x)=0$ an die Stelle von z, y und x andere Veränderliche einzusetzen, indem man diese als Funktionen von z, y und x so zu bestimmen sucht, dass die transformirte Gleichung den bis dahin gestellten Anforderungen entspricht.

8. Es sei $z_x-z_y=\sqrt{4a^2+(z_x+z_y)^2}\,.\,\psi'(x-y)$.

Man setze hier an die Stelle von y und x die neuen Veränderlichen $v=x+y$ und $u=x-y$. Dadurch entsteht:

$$z_y=z_v-z_u,\quad\text{und}\quad z_x=z_v+z_u.$$

Man erhält die neue Gleichung:

$$z_u=\sqrt{a^2+z_v^2}\,.\,\psi'(u).$$

Zur Bestimmung von z_v hat man hier die Gleichung:

$$\text{(a)}\qquad \frac{\sqrt{a^2+z_v^2}}{\psi'(u)}\frac{d\tau}{du}-z_v\frac{d\tau}{dv}+a^2\frac{d\tau}{dz}=0.$$

Man genügt durch $\alpha=z_v$, und hat desshalb die vollständige Differentialgleichung:

$$dz = \alpha dv + \sqrt{a^2 + \alpha^2}\,.\,\psi'(u)du.$$

Das allgemeine Integral ist ausgedrückt durch die beiden Gleichungen:

$$z = \alpha v + \sqrt{a^2 + \alpha^2}\,.\,\psi(u) + \varphi(\alpha),$$

$$0 = v + \frac{\alpha\,.\,\psi(u)}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}} + \varphi'(\alpha).$$

9. Es sei $z_x - z_y = (z_x + z_y)^2(xz_x - yz_y)$.

Man setze wieder anstatt y und x die neuen Veränderlichen $v = x + y$ und $u = x - y$. Daraus folgt:

$$z_u = 2z_v^2(vz_u + uz_v).$$

Daraus entwickle man den Werth

$$z_u = \frac{2uz_v^3}{1 - 2vz_v^2}.$$

Zur Bestimmung von z_v erhält man die Gleichung:

(a)

$$(1 - 2vz_v^2)^2\frac{d\tau}{du} - 2uz_v^2(3 - 2vz_v^2)\frac{d\tau}{dv} - 4uz_v^3\frac{d\tau}{dz} + 4uz_v^5\frac{d\tau}{dz_v} = 0.$$

Man genügt derselben durch $\alpha = z - \frac{1}{z_v}$ oder $z_v = \frac{1}{z - \alpha}$, und man findet so die vollständige Differentialgleichung:

$$(z - \alpha)dz - dv - \frac{2udu}{(z - \alpha)^2 - 2v} = 0.$$

Das vollständige Integral:

$$((z - \alpha)^2 - 2v)(2(z - \alpha)dz - 2dv) - 4udu = 0$$

führt auf die endliche Gleichung: $((z - \alpha)^2 - 2v)^2 - 4u^2 = \varphi(\alpha)$; und das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung ist dargestellt durch die beiden Gleichungen:

$$((z - \alpha)^2 - 2v)^2 - 4u^2 = \varphi(\alpha),$$

$$((z - \alpha)^2 - 2v)4(z - \alpha) = \varphi'(\alpha).$$

10. Es sei

$$1 = \frac{y}{z}z_y + \frac{x}{z}z_x + \cos n\sqrt{1 + \frac{y^2}{z^2} + \frac{x^2}{z^2}}\,.\,\sqrt{1 + z_y^2 + z_x^2}.$$

Man bringe hier an die Stelle von z, y und x drei neue Veränderliche, indem man setzt:

$$z = r\cos\vartheta,\quad y = r\sin\vartheta\cos\varepsilon,\quad x = r\sin\vartheta\sin\varepsilon.$$

Um die neuen Veränderlichen in die Differentialgleichung einzuführen, schreibe man dieselbe vor Allem in der Form:

$$z\frac{d\tau}{dz} + y\frac{d\tau}{dy} + x\frac{d\tau}{dx}$$

$$= \cos n\sqrt{z^2+y^2+x^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{d\tau}{dz}\right)^2+\left(\frac{d\tau}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\tau}{dx}\right)^2}.$$

Da nun τ als Funktion von r, ε und ϑ auftritt, so hat man:

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{d\tau}{dr}\frac{dr}{dz} + \frac{d\tau}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz} + \frac{d\tau}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dz},$$

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{d\tau}{dr}\frac{dr}{dy} + \frac{d\tau}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dy} + \frac{d\tau}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dy},$$

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{d\tau}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{d\tau}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dx} + \frac{d\tau}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dx}.$$

Um hier die neuen Veränderlichen einzuführen, schreibe man:

$$r = \sqrt{z^2+y^2+x^2},\quad \mathrm{tg}\,\varepsilon = \frac{x}{y},\quad \cos\vartheta = \frac{z}{r}.$$

Daraus entsteht durch Differentiation:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{z}{r},\qquad \frac{d\varepsilon}{dz} = 0,\qquad \sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dz} = \frac{z^2}{r^3} - \frac{1}{r},$$

$$\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r},\qquad \frac{1}{\cos^2\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dy} = -\frac{x}{y^2},\qquad \sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dy} = \frac{zy}{r^3},$$

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r};\qquad \frac{1}{\cos^2\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{1}{y};\qquad \sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{zx}{r^3}.$$

Man transformire zunächst die linke Seite der partiellen Differentialgleichung, und bilde desshalb die folgenden Ausdrücke:

$$z\frac{dr}{dz} + y\frac{dr}{dy} + x\frac{dr}{dx} = r,$$

$$z\frac{d\varepsilon}{dz} + y\frac{d\varepsilon}{dy} + x\frac{d\varepsilon}{dx} = 0,$$

$$z\frac{d\vartheta}{dz} + y\frac{d\vartheta}{dy} + x\frac{d\vartheta}{dx} = 0,$$

Um auch die rechte Seite zu transformiren, bilde man weiter:

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)^2+\left(\frac{dr}{dy}\right)^2+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2=1, \qquad \frac{dr}{dz}\frac{d\varepsilon}{dz}+\frac{dr}{dy}\frac{d\varepsilon}{dy}+\frac{dr}{dx}\frac{d\varepsilon}{dx}=0,$$

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)^2+\left(\frac{d\varepsilon}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)^2=\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}, \qquad \frac{dr}{dz}\frac{d\vartheta}{dz}+\frac{dr}{dy}\frac{d\vartheta}{dy}+\frac{dr}{dx}\frac{d\vartheta}{dx}=0,$$

$$\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right)^2+\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)^2=\frac{1}{r^2}, \qquad \frac{d\varepsilon}{dz}\frac{d\vartheta}{dz}+\frac{d\varepsilon}{dy}\frac{d\vartheta}{dy}+\frac{d\varepsilon}{dx}\frac{d\vartheta}{dx}=0.$$

Man gelangt so zu der transformirten Gleichung:

$$r\frac{d\tau}{dr}=\cos n\sqrt{r^2\left(\frac{d\tau}{dr}\right)^2+\left(\frac{d\tau}{dv}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\cdot\left(\frac{d\tau}{d\varepsilon}\right)^2}.$$

Nimmt man hier r als die abhängige, ε und ϑ als die unabhängigen Veränderlichen an, so hat man:

$$r^2\operatorname{tg}^2 n=r_\vartheta^2+\frac{r_\varepsilon^2}{\sin^2\vartheta}.$$

Um nun den Differentialquotienten r_ε als Funktion der Veränderlichen r, ε und ϑ darzustellen, bilde man, indem man abkürzend $\operatorname{tg}^2 n=a^2$ setzt, den Werth $r_\vartheta=\sqrt{a^2r^2-\frac{r_\varepsilon^2}{\sin^2\vartheta}}$. Die Gleichung zur Bestimmung von r_ε zeigt sich dann in der Form:

(a)

$$\sqrt{a^2r^2-\frac{r_\varepsilon^2}{\sin^2\vartheta}}\,\frac{d\tau}{d\vartheta}+\frac{r_\varepsilon}{\sin^2\vartheta}\frac{d\tau}{d\varepsilon}+a^2r^2\frac{d\tau}{dr}+a^2rr_\varepsilon\frac{d\tau}{dr_\varepsilon}=0.$$

Man genügt derselben durch $\alpha=\frac{r_\varepsilon}{r}$. Daraus folgt aber $r_\varepsilon=\alpha r$; und man hat die vollständige Differentialgleichung:

$$\text{(b)} \qquad \frac{dr}{r}=\alpha d\varepsilon+\sqrt{a^2-\frac{\alpha^2}{\sin^2\vartheta}}\,d\vartheta.$$

Nimmt man nun, um den irrationalen Ausdruck zu integriren, vorerst $\sin\vartheta=u$, so hat man:

$$\sqrt{a^2-\frac{\alpha^2}{\sin^2\vartheta}}\,d\vartheta=\sqrt{\frac{a^2u^2-\alpha^2}{1-u^2}}\,\frac{du}{u}.$$

Nimmt man weiter $\frac{a^2u^2-\alpha^2}{1-u^2}=v^2$, so hat man $u^2=\frac{\alpha^2+v^2}{a^2+v^2}$. Desshalb ist:

$$\sqrt{\frac{a^2u^2-\alpha^2}{1-u^2}}\frac{du}{u}=\frac{v^2dv}{\alpha^2+v^2}-\frac{v^2dv}{a^2+v^2}=\frac{a^2dv}{a^2+v^2}-\frac{\alpha^2dv}{\alpha^2+v^2}.$$

Die Integration der vollständigen Differentialgleichung giebt desshalb:

$$lr=\alpha\varepsilon+a.\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{a}-\alpha.\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{\alpha}+\varphi(\alpha).$$

Wenn man dies nach α differentiirt, so entsteht, weil auch v eine Funktion von α, und zwar $\frac{\alpha^2+v^2}{a^2+v^2}=\sin^2\vartheta$ ist, die Gleichung:

$$0=\varepsilon-\operatorname{arctg}\frac{v}{\alpha}+\varphi'(\alpha).$$

Man setze diesen Werth ε in die erstere Gleichung ein, und bringe zugleich an die Stelle von v die Veränderliche ϑ, indem man $v=\frac{\sqrt{a^2\sin^2\vartheta-\alpha^2}}{\cos\vartheta}$ schreibt, und das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung ist ausgedrückt durch die beiden Gleichungen:

$$r=e^{a.\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2\sin^2\vartheta-\alpha^2}}{a\cos\vartheta}+\varphi(\alpha)-\alpha\varphi'(\alpha)}$$

und

$$\varepsilon=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2\sin^2\vartheta-\alpha^2}}{\alpha\cos\vartheta}-\varphi'(\alpha).$$

Denkt man sich hier ϑ und α als die unabhängigen Veränderlichen, so ergeben sich die gleichzeitigen Werthe r und ε. Wenn aber die zusammengehörigen Werthe r, ε und ϑ bekannt sind, so findet man die zusammengehörigen Werthe der ursprünglichen Veränderlichen aus den Gleichungen:

$$z=r\cos\vartheta,\quad y=r\sin\vartheta\cos\varepsilon,\quad x=r\sin\vartheta\sin\varepsilon.$$

Nachdem man das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung $\psi(z_y\, z_x\, z\, y\, x)=0$ aufgefunden hat, kommt es darauf an, alle möglichen Funktionen anzugeben, wodurch man derselben genügt, wenn man die abhängige Veränderliche daraus eliminirt. Vor Allem vergegenwärtige man sich diejenigen Rechnungsoperationen, wodurch man die partielle Differentialgleichung aus dem allgemeinen Integral wieder ableitet. Das allgemeine Integral ist hier $\beta=\varphi(\alpha)$, wo β eine bestimmte Funktion der drei Veränderlichen z, y und x und einer Veränderlichen α ist, welche

aus der Gleichung $\frac{d\beta}{d\alpha} = \varphi'(\alpha)$ berechnet werden muss. Man bilde daraus die beiden Gleichungen:

$$\frac{d\beta}{dz}z_y + \frac{d\beta}{dy} + \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - \varphi'(\alpha)\right)\left(\frac{d\alpha}{dz}z_y + \frac{d\alpha}{dy}\right) = 0,$$

$$\frac{d\beta}{dz}z_x + \frac{d\beta}{dx} + \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - \varphi'(\alpha)\right)\left(\frac{d\alpha}{dz}z_x + \frac{d\alpha}{dx}\right) = 0,$$

welche aber, da $\frac{d\beta}{d\alpha} - \varphi'(\alpha) = 0$ ist, übergehen in die einfacheren:

1. $$\frac{d\beta}{dz}z_y + \frac{d\beta}{dy} = 0,$$

und

2. $$\frac{d\beta}{dz}z_x + \frac{d\beta}{dx} = 0.$$

Durch die Elimination von α erhält man daraus die partielle Differentialgleichung. Die Grösse α in dem allgemeinen Integral $\beta = \varphi(\alpha)$ kann aber auch als Beständige gedacht werden, so dass also $\varphi(\alpha)$ einer zweiten willkührlichen Beständigen gleichkommt; und es versteht sich, dass dann die vorhin zur Berechnung des veränderlichen α benutzte Gleichung $\frac{d\beta}{d\alpha} = \varphi'(\alpha)$ wegfällt, da wegen $d\alpha = 0$ doch wieder die beiden Gleichungen 1. und 2. entstehen, woraus die partielle Differentialgleichung durch die Elimination von α gewonnen wird.

Aus dieser Entstehungsweise der partiellen Differentialgleichung schliesst man zunächst, dass man nicht zu allen besonderen Integralen gelangt, wenn man sich auf diejenigen Funktionen beschränkt, welche aus den beiden Gleichungen $\beta = \varphi(\alpha)$ und $\frac{d\beta}{d\alpha} = \varphi'(\alpha)$ durch die Elimination von α sich ergeben, nachdem man die willkührliche Funktion φ irgend wie bestimmt hat. Man hat dabei auch alle diejenigen Funktionen zu beachten, welche aus der einzigen Gleichung $\beta = \varphi(\alpha)$ hervorgehen, unter der Annahme eines beständigen α. Wenn es also darauf ankommt das Willkührliche in dem allgemeinen Integral so einzurichten, dass dasselbe eine vorliegende Funktion liefere, so hat man zweierlei zu untersuchen. Das einemal fragt es sich, ob die beiden Grössen α und $\varphi(\alpha)$ als Beständige sich so angeben lassen, dass die vorliegende Funktion der Gleichung $\beta = \varphi(\alpha)$ genüge. Wenn dies

aber unmöglich ist, so hat man es mit der Bestimmung der willkührlichen Funktion φ zu thun, in der Art, dass man durch die Elimination von α aus den beiden Gleichungen $\beta = \varphi(\alpha)$ und $\frac{d\beta}{d\alpha} = \varphi'(\alpha)$ die vorliegende Funktion ableite.

Wenn das allgemeine Integral z. B. durch die beiden Gleichungen:

$$\alpha^2 z^2 + 2\alpha x = \frac{y^2}{z^2} + 2\varphi(\alpha), \quad \text{und} \quad \alpha z^2 + x = \varphi'(\alpha)$$

ausgedrückt ist, und dann die Frage entsteht, wie man demselben durch $z^2 = y^2$ genüge, was auch die entsprechende partielle Differentialgleichung $y(z_x{}^2 + z_y{}^2) = z z_y$ befriedigt, so findet man, dass dies für $\alpha = 0$ und $2\varphi(\alpha) = -1$ geschieht. Man genügt der partiellen Differentialgleichung auch durch die Funktion $z^2 = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$. Wenn diese aus dem allgemeinen Integral abgeleitet werden soll, so zeigt sich, dass dies unter der Annahme eines beständigen α nicht mehr geschehen kann. Man setze desshalb den vorliegenden Werth $z^2 = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$ in jene beiden Gleichungen ein, wodurch dieselben übergehen in:

$$\alpha^2 + 2\alpha x - \frac{\alpha^2 x^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 + 2\varphi(\alpha)$$

und

$$\alpha + x - \frac{\alpha x^2}{x^2 + y^2} = \varphi'(\alpha).$$

Man eliminire daraus die Veränderliche y, und ordne zugleich nach Potenzen von x. Man erhält:

$$(\alpha\varphi' - 2\varphi)(\alpha - \varphi') + (\alpha^2 - 2\varphi)x = 0,$$

was zu einer identischen Gleichung wird, wenn man $2\varphi = \alpha^2$ setzt. Unter dieser Bedingung also genügt die Gleichung $z^2 = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$ auch dem allgemeinen Integral.

Das allgemeine Integtal der partiellen Differentialgleichung $\psi(z_y\, z_x\, z\, y\, x) = 0$ kann auch in der Form $\alpha = \varphi_1(\beta)$ angeschrieben werden. In der obigen Form $\beta = \varphi(\alpha)$ bezeichnet β eine bestimmte Funktion der Veränderlichen $z\, y\, x$ und von α. Man entwickle aus der Gleichung $\beta = f(z\, y\, x\, \alpha)$ den Werth $\alpha = f_1(z\, y\, x\, \beta)$,

und setze diesen in die andere Form $\alpha = \varphi_1(\beta)$ ein, so dass also hier α als bestimmte Funktion der Veränderlichen $z\,y\,x$ und von β auftritt; und man hat dann, um β zu eliminiren, die Gleichung $\frac{d\alpha}{d\beta} = \varphi_1'(\beta)$. Durch die Differentiation von $\alpha = \varphi_1(\beta)$ erhält man die beiden Gleichungen:

$$\frac{d\alpha}{dz} z_y + \frac{d\alpha}{dy} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha}{dz} z_x + \frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

und die Elimination von β führt wieder auf die partielle Differentialgleichung $\psi(z_y\, z_x\, z\, y\, x) = 0$ zurück. Irgend ein besonderes Integral der partiellen Differentialgleichung wird nun eben so wohl aus der Integralform $f(z\,y\,x\,\alpha) = \varphi(\alpha)$, als auch aus der Integralform $f_1(z\,y\,x\,\beta) = \varphi_1(\beta)$ sich ableiten lassen. Doch giebt es hier bei einen Ausnahmefall, welcher eine besondere Betrachtung verlangt. Wenn nämlich in der letzteren Form $f_1(z\,y\,x\,\beta) = \varphi_1(\beta)$ die Grösse β als Veränderliche gedacht wird, so kann dennoch die willkührliche Funktion $\varphi_1(\beta)$ eine Beständige sein, indem dieselbe von β unabhängig gedacht wird. Ueberträgt man diesen Fall auf die erstere Form $f(z\,y\,x\,\alpha) = \varphi(\alpha)$, welche aus der anderen dadurch hergeleitet wird, dass man dort α an die Stelle von $\varphi_1(\beta)$ und $\varphi(\alpha)$ an die Stelle von β bringt, und dann nach $\varphi(\alpha)$ entwickelt, so sieht man ein, dass hier, damit die vorige Bedeutung der Integralform nicht verloren gehe, die Grösse α als Beständige zu nehmen ist, während doch $\varphi(\alpha)$ veränderlich sein soll, was unmöglich ist. Wenn also $\varphi_1(\beta)$ eine Beständige ist, während β selbst veränderlich gedacht wird, so liefert die Integralform $f_1(z\,y\,x\,\beta) = \varphi_1(\beta)$ gewisse Funktionen, welche der ersteren Form $f(z\,y\,x\,\alpha) = \varphi(\alpha)$ nicht mehr genügen. Man müsste demnach, wenn es sich um die Bestimmung dieser Funktionen handelt, auch die Form $f_1(z\,y\,x\,\beta) = \varphi_1(\beta)$ gebrauchen, um darin die willkührliche Funktion φ_1 einer willkührlichen Beständigen gleichzusetzen. Allein es wird sich in der Folge noch zeigen, dass die letztere Integralform bei der Darstellung der erwähnten besonderen Integrale entbehrlich ist, da sich ein anderes Mittel findet, dieselben auch aus der ersteren Form $f(z\,y\,x\,\alpha) = \varphi(\alpha)$ abzuleiten.

Was nun die besonderen Auflösungen der partiellen Differentialgleichung $\psi(z_y\, z_x\, z\, y\, x) = 0$ betrifft, oder diejenigen Funktionen, welche zwar der partiellen Differentialgleichung, nicht aber dem allgemeinen Integral Genüge leisten, so kommt es, wenn dieselben aus der Integralform $f(z\,y\,x\,\alpha) = \varphi(\alpha)$ bestimmt werden sollen, auf diejenigen Glieder von $f(z\,y\,x\,\alpha)$ an, welche mit einem zwischen 0 und 1 liegenden Exponenten verbunden sind. Alle

Funktionen, welche unter einem solchen Exponenten stehen, werden den beiden Gleichungen:

1. $$\frac{d\beta}{dz}z_y + \frac{d\beta}{dy} = 0,$$

und

2. $$\frac{d\beta}{dz}z_x + \frac{d\beta}{dx} = 0$$

genügen, mag nun α in der Funktion β als Beständige oder als Veränderliche gedacht werden; und man weiss, dass diese Funktionen die bezeichnete Eigenschaft auch für die partielle Differentialgleichung beibehalten, welche durch die Elimination von α aus den beiden Gleichungen 1. und 2. abgeleitet wird. Nun ist man aber veranlasst, zwischen den so bestimmten Funktionen einen Unterschied zu machen, da dieselben zum Theil auch wieder als besondere Integrale der partiellen Differentialgleichung angesehen werden müssen. Um dies einzusehen, muss man sich erinnern, wie man zu den besonderen Auflösungen einer Differentialgleichung der ersten Ordnung mit zwei Veränderlichen gelangt, wenn das allgemeine Integral als beliebige Funktion der willkührlichen Beständigen vorliegt. Wenn das allgemeine Integral in der Form $F(z\,y\,x\,\beta) = 0$ geschrieben wird, wo entweder z und y oder z und x die beiden Veränderlichen sind, und β die willkührliche Beständige, so bildet man, in der Voraussetzung, dass die Veränderliche z in den besonderen Auflösungen vorkomme, die Gleichung $\frac{dF}{dz}\frac{dz}{d\beta} + \frac{dF}{d\beta} = 0$. Es kommt dann auf diejenigen Funktionen an, welche dieser Gleichung unter der Annahme $\frac{dz}{d\beta} = 0$ genügen. Man wird aber dieselbe auf zweierlei Weise befriedigen; das einemal, indem man $\frac{dF}{dz} = \infty$ setzt, das anderemal, indem man $\frac{dF}{d\beta} = 0$ bestehen lässt. Nachdem man alle Funktionen dargestellt hat, welche dem einen oder dem anderen Falle entsprechen, eliminirt man daraus die willkührliche Beständige β mit Hilfe der Gleichung $F(z\,y\,x\,\beta) = 0$, und man gelangt zu gewissen Gleichungen, unter welchen alle besonderen Auflösungen der vorliegenden Differentialgleichung vorkommen. Aus der Integralform $f(z\,y\,x\,\alpha) = \varphi(\alpha)$ der partiellen Differentialgleichung $\psi(z_y\,z_x\,z\,y\,x) = 0$ entstehen, mag nun α beständig oder mag es veränderlich gedacht werden, durch Differentiation:

1. $$\frac{df}{dz}z_y + \frac{df}{dy} = 0,$$

und ... $\alpha = \varphi_1(\beta)$ ein, so dass a... veränderlichen $z\,y\,x$ und vo... eliminiren, die Gleichung

2. $\frac{df}{dz}z_x + \frac{df}{dx} = 0.$

Um die besonderen Auflösungen dieser beiden [illegible] erhält man chungen nach dem so eben angegebenen Verfahren aus de[illegible] chung $f(z\,y\,x\,\alpha) = \varphi(\alpha)$ abzuleiten, muss man vor Allem beachten, dass die Grösse $\varphi(\alpha)$ hierbei die Stelle der willkührlichen Beständigen vertritt. Ausserdem muss auch die Grösse α als Beständige gedacht werden, selbst wenn dieselbe in der besonderen Auflösung nachträglich veränderliche Bedeutung erhalten sollte. Denn nur so kann die Gleichung $f(z\,y\,x\,\alpha) = \varphi(\alpha)$ als das allgemeine Integral der beiden Differentialgleichungen 1. und 2. betrachtet werden. Da dies Integral nach der willkührlichen Beständigen $\varphi(\alpha)$ entwickelt ist, in der Weise, dass man $\frac{dF}{d\varphi} = -1$ erhält, so versteht es sich, dass sich diesmal aus der Gleichung $\frac{dF}{d\varphi} = 0$ keine besonderen Auflösungen ergeben. Dieselben werden dann alle aus der anderen Gleichung $\frac{dF}{dz} = \infty$ oder auch $\frac{df}{dz} = \infty$ hervorgehen.

Man hat schon oben die Gleichung $f(z\,y\,x\,\alpha) = \varphi(\alpha)$ auch in der Form $f_1(z\,y\,x\,\beta) = \varphi_1(\beta)$ angeschrieben, und diese aus der vorigen abgeleitet, indem man dort $\varphi(\alpha)$ mit β und α mit $\varphi_1(\beta)$ vertauscht, und dann nach $\varphi_1(\beta)$ aufgelöst hat. Wenn man sich der Integralform $f_1(z\,y\,x\,\beta) = \varphi_1(\beta)$ bedient, um durch das oben angedeutete Verfahren die besonderen Auflösungen der Differentialgleichungen 1. und 2. zu bestimmen, so wird man jedenfalls zu denselben Funktionen gelangen, welche man vorhin aus der Gleichung $\frac{df}{dz} = \infty$ aufgefunden hat. Allein man hat, weil das Integral $f_1(z\,y\,x\,\beta) = \varphi_1(\beta)$ der Differentialgleichungen 1. und 2. jetzt nicht mehr nach der willkührlichen Beständigen β aufgelöst vorliegt, gleichzeitig die beiden Differentialgleichungen $\frac{df_1}{d\beta} = 0$ $\frac{df_1}{dz} = \infty$ anzusetzen, um dann aus allen den so entstehenden Funktionen die willkührliche Beständige β mittels $f_1(z\,y\,x\,\beta) = \varphi_1(\beta)$ zu eliminiren. Nun sind aber diejenigen Funktionen, welche durch die Elimination von β aus den beiden Gleichungen $f_1(z\,y\,x\,\beta) = \varphi_1(\beta)$ und $\frac{df_1}{d\beta} = 0$ hervorgehen, nichts anderes als besondere Integrale



...llen Differentialgleichung $\psi(z_y\, z_x\, z\, y\, x)=0$, da deren ...nes Integral auch durch die beiden Gleichungen:

$$f_1(z\, y\, x\, \beta)=\varphi_1(\beta) \quad \text{und} \quad \frac{df_1}{d\beta}=\varphi_1'(\beta)$$

ausgedrückt ist; und zwar sind dies diejenigen besonderen Integrale, welche der Annahme entsprechen, dass $\varphi_1(\beta)$ von β unabhängig sei. Schon oben ist von diesen besonderen Integralen gezeigt worden, dass sie aus der Integralform $f(z\, y\, x\, \alpha)=\varphi(\alpha)$ als solche nicht abgeleitet werden können, während sie doch einen Bestandtheil der anderen Integralform $f_1(z\, y\, x\, \beta)=\varphi_1(\beta)$ ausmachen. Daraus folgt, dass dieselben nicht unter denjenigen besonderen Integralen sich vorfinden, welche zugleich mit den besonderen Auflösungen der Differentialgleichungen 1. und 2. durch die Gleichung $\frac{df}{dz}=\infty$ dargestellt werden, da die letzteren einen Bestandtheil der Integralform $f(z\, y\, x\, \alpha)=\varphi(\alpha)$ ausmachen. Man schliesst weiter, dass das Resultat der Elimination von β zwischen den beiden Gleichungen $f_1(z\, y\, x\, \beta)=\varphi_1(\beta)$ und $\frac{df_1}{d\beta}=0$ jedenfalls unter denjenigen Funktionen vorkommen wird, welche man als besondere Auflösungen der Differentialgleichungen 1. und 2. mit Hilfe der Gleichung $\frac{df}{dz}=\infty$ aufgefunden hat, oder welche auch aus der Gleichung $f(z\, y\, x\, \alpha)=\varphi(\alpha)$ unmittelbar erkannt werden, indem man auf diejenigen Glieder Rücksicht nimmt, welche mit einem zwischen 0 und 1 liegenden Exponenten verbunden sind. Somit ist denn der oben ausgesprochene Satz nachgewiesen, dass diejenigen Funktionen, welche man als besondere Auflösungen der Differentialgleichungen

$$1. \qquad \frac{d\beta}{dz}z_y+\frac{d\beta}{dy}=0$$

und

$$2. \qquad \frac{d\beta}{dz}z_x+\frac{d\beta}{dx}=0$$

herleitet, zum Theil wieder als besondere Integrale der partiellen Differentialgleichung $\psi(z_y\, z_x\, z\, y\, x)=0$ zu betrachten seien.

Dieselben Bemerkungen bieten aber noch ein anderes Interesse, wenn man sich erinnert, dass es den Anschein hatte, als könnten diejenigen besonderen Integrale der partiellen Differentialgleichung $\psi(z_y\, z_x\, z\, y\, x)=0$, welche aus den beiden Gleichungen:

$$f_1(z\,y\,x\,\beta) = \varphi_1(\beta) \quad \text{und} \quad \frac{df_1}{d\beta} = \varphi_1'(\beta)$$

hervorgehen, wenn β veränderlich, $\varphi_1(\beta)$ aber von β unabhängig gedacht wird, nicht auch aus den beiden Gleichungen:

$$f(z\,y\,x\,\alpha) = \varphi(\alpha) \quad \text{und} \quad \frac{df}{d\alpha} = \varphi'(\alpha)$$

abgeleitet werden. Es ist jetzt nachgewiesen, dass die ersteren Gleichungen entbehrlich sind, da die hier bezeichneten besonderen Integrale jedesmal zum Vorschein kommen, wenn man alle Glieder der Gleichung $f(z\,y\,x\,\alpha) = \varphi(\alpha)$ gleich Null setzt, welche unter einem zwischen 0 und 1 liegenden Exponenten stehen. Man sieht zugleich ein, dass eben diese Gleichungen nur dann als besondere Auflösungen der partiellen Differentialgleichung sich herausstellen können, wenn sie auch in der Integralform $f_1(z\,y\,x\,\beta) = \varphi_1(\beta)$ unter einem solchen Exponenten stehen. Wollte man die besonderen Auflösungen von den besonderen Integralen trennen, so müsste man also auch die andere Integralform $f_1(z\,y\,x\,\beta) = \varphi_1(\beta)$ untersuchen. Insofern es aber nur auf die Bestimmung derjenigen Funktionen ankommt, welche der partiellen Differentialgleichung überhaupt genügen, kann diese Untersuchung als überflüssig betrachtet werden, und man reicht aus mit der einzigen Integralform $f(z\,y\,x\,\alpha) = \varphi(\alpha)$.

Das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung

$$3. \qquad y\,(z_x^2 + z_y^2) = z z_y$$

ist ausgedrückt durch die beiden Gleichungen:

$$\sqrt{z^2 - \alpha^2 y^2} + \alpha x = \varphi(\alpha), \quad \text{und} \quad \alpha y^2 = \sqrt{z^2 - \alpha^2 y^2}\,.\,(x - \varphi'(\alpha)).$$

Aus dem Vorkommen der Wurzelgrösse schliesst man, dass der Werth $z^2 = c^2 y^2$, wo c eine willkührliche Beständige ist, der partiellen Differentialgleichung genügt. Doch ist die Gleichung $z = cy$ in dieser Integralform nicht enthalten, weder für ein beständiges, noch für ein veränderliches α, wie man auch immer die Funktion φ bestimmen mag. Vertauscht man $\varphi(\alpha)$ gegen β, und α gegen $\varphi_1(\beta)$, und löst man dann noch $\varphi_1(\beta)$ auf, so erhält man als allgemeines Integral die beiden Gleichungen:

$$\sqrt{z^2(x^2 + y^2) - y^2\beta^2} + \beta x = (x^2 + y^2)\,\varphi(\beta),$$

$$\frac{\beta y^2}{\sqrt{z^2(x^2 + y^2) - y^2\beta^2}} = x - (x^2 + y^2)\,\varphi'(\beta).$$

Man setze hier $\varphi_1(\beta)$ einer Beständigen c gleich, und desshalb $\varphi_1'(\beta)=0$, und man erhält durch die Elimination der vorkommenden Wurzelgrösse zunächst $\beta=cx$. Um aber β vollständig zu eliminiren, setze man diesen Werth β in die letztere Gleichung ein; und man findet die Gleichung $z^2=c^2y^2$ in der That als besonderes Integral der partiellen Differentialgleichung.

Aus der in der letzteren Integralform vorkommenden Wurzelgrösse schliesst man, dass die partielle Differentialgleichung durch den Werth $z^2=\frac{c^2y^2}{x^2+y^2}$ befriedigt wird. Doch gelingt es auf keine Weise, die Integralform damit in Uebereinstimmung zu bringen. Setzt man aber in der ersteren Integralform $\varphi(\alpha)=c$, und desshalb $\varphi'(\alpha)=0$, so entsteht durch die Elimination der vorkommenden Wurzelgrösse die Gleichung $\alpha=\frac{cx}{x^2+y^2}$. Wenn man diesen Werth α in eine der beiden Gleichungen einsetzt, so findet man in der That die Gleichung $z^2=\frac{c^2y^2}{x^2+y^2}$ als besonderes Integral der partiellen Differentialgleichung.

Als allgemeines Integral der partiellen Differentialgleichung

$$5. \qquad y^2z_x^2-2xyz_xz_y+(1-y^2)z_y^2=y^2$$

findet man die beiden Gleichungen:

$$\alpha+z+\sqrt{\alpha^2-2\alpha x+1-y^2}=\varphi(\alpha) \text{ und } \alpha-x=\sqrt{\alpha^2-2\alpha x+1-y^2}(\varphi'(\alpha)-1).$$

Die Wurzelgrösse deutet darauf hin, dass man der partiellen Differentialgleichung durch $c^2-2cx+1=y^2$ genügt, wenn c eine willkührliche Beständige ist. Auch findet sich hier ein veränderliches α, für welches die Funktion unter dem Wurzelzeichen genügt. Denn unter der Voraussetzung, dass $\alpha^2-2\alpha x+1=y^2$ sei, geht die zweite Gleichung über in $\alpha=x$. Setzt man dies α in die erstere Gleichung ein, so entsteht die Wurzelgrösse $\sqrt{1-x^2-y^2}$; und daraus folgt, dass auch die Gleichung $x^2+y^2=1$ der partiellen Differentialgleichung genügt. Doch lässt sich weder die Gleichung $x^2+y^2=1$, noch auch die Gleichung $c^2-2cx+1=y^2$ mit der obigen Integralform in Uebereinstimmung bringen. Setzt man aber $\varphi(\alpha)=\beta$ und $\alpha=\varphi_1(\beta)$, und entwickelt man dann $\varphi_1(\beta)$, so hat man als allgemeines Integral die beiden Gleichungen:

$$\frac{1-y^2-(z-\beta)^2}{z-\beta+x}=\varphi_1(\beta) \text{ und } \frac{(z-\beta+x)^2+1-x^2-y^2}{(z-\beta+x)^2}=\varphi_1'(\beta).$$

Setzt man weiter $\varphi_1(\beta)=2c$ und dessbalb $\varphi_1'(\beta)=0$, so geht die letztere Gleichung über in $z-\beta+x=\sqrt{-1+x^2+y^2}$. Die Elimination von β aber führt auf die Gleichung:

$$\sqrt{-1+x^2+y^2}.(c-x-\sqrt{-1+x^2+y^2})=0,$$

woraus man ersieht, dass die beiden vorhin genannten Funktionen in der That besondere Integrale der partiellen Differentialgleichung sind.

Wir gehen jetzt über zu einer allgemeineren Aufgabe. Wir beschäftigen uns mit der allgemeinen partiellen Differentialgleichung mit vier Veränderlichen:

$$\psi(z_y\, z_x\, z_w\, z\, y\, x\, w)=0,$$

in der Voraussetzung, dass die Zerlegung in Faktoren nicht auf partielle Differentialgleichungen des ersten Grades zurückführe. Wie man zu dem allgemeinen Integral gelangen werde, dies lässt sich aus den bisherigen Untersuchungen leicht errathen. Es kommt hier darauf an, zwei endliche Gleichungen $\sigma=0$ und $\tau=0$ aufzustellen zwischen den Veränderlichen der partiellen Differentialgleichung und den Differentialquotienten z_y, z_x und z_w, welche sich auch aus dem allgemeinen Integral durch Differentiation ableiten liessen. Denn nachdem man diese Differentialquotienten aus den drei Gleichungen $\psi=0$, $\sigma=0$ und $\tau=0$ als Funktionen der Veränderlichen $z\, y\, x$ und w berechnet hat, gelangt man zu dem allgemeinen Integral der partiellen Differentialgleichung $\psi=0$ durch die Integration der vollständigen Differentialgleichung:

$$dz=z_y dy+z_x dx+z_w dw.$$

Die eigentliche Aufgabe, welche hier vorliegt, ist also die Darstellung der beiden Gleichungen $\sigma=0$ und $\tau=0$. Man bemerke, dass zwischen den Werthen z_y, z_x und z_w, welche aus den Gleichungen $\psi=0$, $\sigma=0$ und $\tau=0$ sich ergeben, die folgenden Beziehungen bestehen:

$$\left(\frac{dz_w}{dx}\right)=\left(\frac{dz_x}{dw}\right),\quad \left(\frac{dz_w}{dy}\right)=\left(\frac{dz_y}{dw}\right),\quad \left(\frac{dz_x}{dy}\right)=\left(\frac{dz_y}{dx}\right),$$

wo man, um abzukürzen, $\frac{dz_w}{dz}z_x+\frac{dz_w}{dx}=\left(\frac{dz_w}{dx}\right)$ u. s. w. gesetzt hat; und es lässt sich bald übersehen, in welcher Weise die bekannten Hilfsmittel zu verwenden sind, um die vorliegende Aufgabe zu lösen. Man bilde zunächst aus der Gleichung $\psi=0$ die folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{d\psi}{dz_y}\left(\frac{dz_y}{dy}\right)+\frac{d\psi}{dz_x}\left(\frac{dz_x}{dy}\right)+\frac{d\psi}{dz_w}\left(\frac{dz_w}{dy}\right)+\left(\frac{d\psi}{dy}\right)=0,$$

$$\frac{d\psi}{dz_y}\left(\frac{dz_y}{dx}\right)+\frac{d\psi}{dz_x}\left(\frac{dz_x}{dx}\right)+\frac{d\psi}{dz_w}\left(\frac{dz_w}{dx}\right)+\left(\frac{d\psi}{dx}\right)=0,$$

$$\frac{d\psi}{dz_y}\left(\frac{dz_y}{dw}\right)+\frac{d\psi}{dz_x}\left(\frac{dz_x}{dw}\right)+\frac{d\psi}{dz_w}\left(\frac{dz_w}{dw}\right)+\left(\frac{d\psi}{dw}\right)=0.$$

Ebenso bildet man aus der Gleichung $\tau=0$ drei andere Differentialgleichungen, welche von den vorliegenden darin abweichen, dass überall τ an die Stelle von ψ tritt. Wenn man aus diesen sechs Differentialgleichungen die Grössen $\left(\frac{dz_y}{dy}\right)$, $\left(\frac{dz_x}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz_w}{dw}\right)$ eliminirt, so behält man die folgenden:

$$\left(\frac{d\psi}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y}-\frac{d\psi}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x}\right)\left(\frac{dz_x}{dy}\right)$$
$$+\left(\frac{d\psi}{dz_w}\frac{d\tau}{dz_y}-\frac{d\psi}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_w}\right)\left(\frac{dz_w}{dy}\right)+\left(\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_y}-\frac{d\psi}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dy}\right)=0,$$

$$\left(\frac{d\psi}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x}-\frac{d\psi}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y}\right)\left(\frac{dz_y}{dx}\right)$$
$$+\left(\frac{d\psi}{dz_w}\frac{d\tau}{dz_x}-\frac{d\psi}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_w}\right)\left(\frac{dz_w}{dx}\right)+\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_x}-\frac{d\psi}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dx}\right)=0,$$

$$\left(\frac{d\psi}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_w}-\frac{d\psi}{dz_w}\frac{d\tau}{dz_y}\right)\left(\frac{dz_y}{dw}\right)$$
$$+\left(\frac{d\psi}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_w}-\frac{d\psi}{dz_w}\frac{d\tau}{dz_x}\right)\left(\frac{dz_x}{dw}\right)+\left(\frac{d\psi}{dw}\right)\frac{d\tau}{dz_w}-\frac{d\psi}{dz_w}\left(\frac{d\tau}{dw}\right)=0.$$

Durch die Addition und mit Rücksicht auf die obigen drei Beziehungen, welche zwischen den Differentialquotienten z_y, z_x und z_w bestehen, gelangt man zu der Gleichung:

(a)

$$\frac{d\psi}{dz_w}\left(\frac{d\tau}{dw}\right)+\frac{d\psi}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dx}\right)+\frac{d\psi}{dz_w}\left(\frac{d\tau}{dy}\right)-\left(\frac{d\psi}{dw}\right)\frac{d\tau}{dz_w}-\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_x}$$
$$-\left(\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_y}=0,$$

worin, da ja ψ die gegebene Funktion ist, nur die eine Unbekannte τ eine Stelle findet. Demnach hat man zur Bestimmung

dieser Funktion τ eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades.

Die Gleichung $\sigma=0$ führt auf eine dritte Gruppe von Differentialgleichungen, und wenn man diese in derselben Weise mit der ersten Gruppe verbindet, wie man vorhin die zweite Gruppe damit verbunden hat, um zu der Gleichung (a) zu gelangen, so hat man zur Bestimmung von σ die Gleichung:

(b)

$$\frac{d\psi}{dz_w}\left(\frac{d\sigma}{dw}\right)+\frac{d\psi}{dz_x}\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)+\frac{d\psi}{dz_y}\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)-\left(\frac{d\psi}{dw}\right)\frac{d\sigma}{dz_w}-\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\frac{d\sigma}{dz_x}$$
$$-\left(\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{d\sigma}{dz_y}=0.$$

Diese beiden partiellen Differentialgleichungen (a) und (b) enthalten die sieben unabhängigen Veränderlichen $z_y, z_x, z_w, z, y, x, w$; und das allgemeine Integral ist dargestellt durch eine willkührliche Funktion von sechs veränderlichen Grössen. Eine von diesen veränderlichen Grössen ist durch die vorliegende Funktion ψ unmittelbar gegeben, da man durch $\tau=\psi$ und $\sigma=\psi$ genügt. Da die beiden partiellen Differentialgleichungen ausserdem nur durch die abhängige Veränderliche sich unterscheiden, so werden auch die fünf übrigen veränderlichen Grössen gemeinschaftlich sein; und wenn man dieselben durch $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon$ bezeichnet, so werden jene beiden Gleichungen, deren man sich in Verbindung mit $\psi=0$ zur Bestimmung der Differentialquotienten z_y, z_x und z_w zu bedienen hat, in der Form:

$$\varphi_1(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\psi)=0 \quad \text{und} \quad \varphi_2(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\psi)=0$$

sich darstellen, worin φ_1 und φ_2 willkührliche Funktionen sind. Wegen $\psi=0$ darf man auch von den einfacheren Formen:

$$\varphi_1(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon)=0 \quad \text{und} \quad \varphi_2(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon)=0$$

Gebrauch machen. Doch darf man nicht glauben, dass die beiden Funktionen φ_1 und φ_2 unabhängig von einander seien, da sie dann zwar die Gleichungen (a) und (b), nicht aber gleichzeitig die drei Beziehungen:

$$\left(\frac{dz_w}{dx}\right)=\left(\frac{dz_x}{dw}\right),\quad \left(\frac{dz_w}{dy}\right)=\left(\frac{dz_y}{dw}\right),\quad \left(\frac{dz_x}{dy}\right)=\left(\frac{dz_y}{dx}\right)$$

erfüllen würden. Damit diese gleichzeitig erfüllt werden, müssen jene beiden Funktionen φ_1 und φ_2 ausser den Gleichungen (a) und (b) noch eine dritte Gleichung befriedigen, welche man aus den obi-

gen Gruppen 2. und 3. ganz ebenso ableitet, wie man auch die Gleichungen (a) und (b) aus den Gruppen 1. und 2., 1. und 3. abgeleitet hat. Man erhält:

(c)

$$\frac{d\sigma}{dz_w}\left(\frac{d\tau}{dw}\right)+\frac{d\sigma}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dx}\right)+\frac{d\sigma}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dy}\right)-\left(\frac{d\sigma}{dw}\right)\frac{d\tau}{dz_w}-\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_x}$$
$$-\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_y}=0.$$

Wenn man die eine Funktion φ_1 willkührlich lässt, so folgt hieraus für die zweite Funktion φ_2 eine bestimmte Form. Doch bekümmern wir uns vorerst nicht weiter um die allgemeinen Gleichungen $\varphi_1=0$ und $\varphi_2=0$, da sich herausstellt, dass die Gleichungen (a), (b), (c) entbehrlich sind, nachdem man zwei bestimmte Funktionen α und β aufgefunden hat, welche denselben gleichzeitig Genüge leisten. Man wird dann mit Hilfe der beiden Gleichungen $\alpha=\alpha_1$ und $\beta=\beta_1$, worin α_1 und β_1 willkührliche Beständige sind, die allgemeinen Gleichungen $\varphi_1=0$ und $\varphi_2=0$ auf einem anderen Wege weit vortheilhafter darstellen. Dieselben Untersuchungen werden zugleich das Ergebniss liefern, dass man die Integration der vollständigen Differentialgleichung

$$dz=z_y dy+z_x dx+z_w dw$$

durchzuführen im Stande ist, noch ehe man die Differentialquotienten z_y, z_x und z_w mit Hilfe der Gleichungen $\psi=0$, $\sigma=0$ und $\tau=0$ als Funktionen der Veränderlichen ausgedrückt hat, so dass also eben diese Gleichungen erst nach vollzogener Integration zu der erwähnten Elimination verwendet werden.

Wie man zu zwei bestimmten Funktionen α und β gelangt, welche die Gleichungen (a), (b) und (c) an der Stelle von σ und τ gleichzeitig befriedigen, dies soll späterhin gezeigt werden. Zunächst aber will ich annehmen, dass zwei Gleichungen $\alpha=\alpha_1$ und $\beta=\beta_1$ von der bezeichneten Eigenschaft vorliegen, so dass also, nachdem man die Werthe z_y, z_x und z_w aus den drei Gleichungen $\psi=0$, $\alpha=\alpha_1$ und $\beta=\beta_1$ als Funktionen von $z\,y\,x\,w\,\alpha_1$ und β_1 berechnet hat, die vollständige Differentialgleichung

(d) $$dz=z_y dy+z_x dx+z_w dw$$

durch einen Faktor in das vollständige Differential:

$$\frac{df}{dz}dz+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dw}dw=0$$

umgewandelt werden kann. Die Integration liefert dann die Gleichung:

$$f(z\,y\,x\,w\,\alpha_1\,\beta_1) = \varphi(\alpha_1\,\beta_1),$$

wo f eine bestimmte, φ aber eine willkührliche Funktion vorstellt. Man erhält damit ein besonderes Integral der partiellen Differentialgleichung $\psi = 0$, worin drei willkührliche Beständige, nämlich α_1, β_1 und $\varphi(\alpha_1\,\beta_1)$ vorkommen. Jede derartige Integralform wird ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung genannt.

Das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung wird aus einem vollständigen Integral abgeleitet. Man setze an die Stelle von α_1 und β_1 die Funktionen α und β in die obige Form ein, und man hat:

$$f(z\,y\,x\,w\,\alpha\,\beta) = \varphi(\alpha\,\beta).$$

Durch die Differentiation entsteht:

$$\frac{df}{dz}dz + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dw}dw + \left(\frac{df}{d\alpha} - \frac{d\varphi}{d\alpha}\right)d\alpha + \left(\frac{df}{d\beta} - \frac{d\varphi}{d\beta}\right)d\beta = 0.$$

Wenn man aber die beiden Gleichungen

$$\frac{df}{d\alpha} - \frac{d\varphi}{d\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{df}{d\beta} - \frac{d\varphi}{d\beta} = 0$$

bestehen lässt und dann durch $\frac{df}{dz}$ theilt, so hat man wieder die Gleichung:

$$\text{(d)} \qquad dz = z_y dy + z_x dx + z_w dw.$$

Denn wenn man die Werthe z_y, z_x und z_w aus den drei Gleichungen $\psi = c$, $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \beta_1$ entwickelt, so zeigt sich jeder dieser Werthe als bestimmte Funktion von $z\,y\,x\,w\,c\,\alpha_1$ und β_1. Nimmt man darin $c = 0$, so hat man die vorhin berechneten Werthe:

$$z_y = \frac{df}{dy} : \frac{df}{dz}, \quad z_x = \frac{df}{dx} : \frac{df}{dz}, \quad z_w = \frac{df}{dw} : \frac{df}{dz}.$$

Bringt man aber an die Stelle von α_1 und β_1 die Funktionen α und β, und ausserdem an die Stelle von $c = 0$ die Funktion ψ, so hat man drei identische Gleichungen vor sich. Daraus folgt also, dass man der partiellen Differentialgleichung $\psi = 0$ auch durch:

$$f(z\,y\,x\,w\,\alpha\,\beta) = \varphi(\alpha\,\beta)$$

genügt, wenn man zur Bestimmung von α und β die beiden Gleichungen:

$$\frac{df}{d\alpha}=\frac{d\varphi}{d\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{df}{d\beta}=\frac{d\varphi}{d\beta}$$

gebraucht. Es versteht sich, dass dies zugleich die beiden Gleichungen $\sigma=0$ und $\tau=0$ sind, in derjenigen Form, wie sie in Verbindung mit $\psi=0$ zur Berechnung der Differentialquotienten z_y, z_x und z_w sich gestalten, wenn die vorliegende Integralform aus der vollständigen Differentialgleichung (d) hervorgehen soll. Man kann aber nachweisen, dass es überhaupt keine allgemeinere Gleichung giebt, durch deren Differentiation die partielle Differentialgleichung entsteht. Denn bezeichnet man abkürzend $f(z\,y\,x\,w\,\alpha\,\beta)$ mit γ, so hat man anstatt der obigen auch die Integralform:

$$\varphi(\alpha\,\beta\,\gamma)=0.$$

Allein die beiden Gleichungen, welche zur Berechnung von α und β dienen, zeigen sich diesmal in der Form:

$$\frac{d\varphi}{d\alpha}+\frac{d\varphi}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha}=0 \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{d\beta}+\frac{d\varphi}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\beta}=0.$$

Aus der ersteren Gleichung erhält man $\frac{d\gamma}{d\alpha}$, aus der anderen $\frac{d\gamma}{d\beta}$ als willkührliche Funktion von α, β und γ. Wenn nun auch diese beiden willkührlichen Funktionen in einer bestimmten Abhängigkeit zu einander stehen, so darf man doch anstatt dieser beiden Gleichungen zwei andere:

$$\varphi_1\left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\frac{d\gamma}{d\beta}\,\alpha\,\beta\,\gamma\right)=0 \quad \text{und} \quad \varphi_2\left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\frac{d\gamma}{d\beta}\,\alpha\,\beta\,\gamma\right)=0$$

gebrauchen, worin die eine Funktion φ_1 ganz willkührlich gedacht wird. Denn man kann der zweiten alsdann jedesmal eine solche Bedeutung beilegen, dass man durch die Entwickelung von $\frac{d\gamma}{d\alpha}$ und $\frac{d\gamma}{d\beta}$ dieselben Werthe erhält, wie sie aus den ursprünglichen Gleichungen hervorgehen. Nun hat man schon oben aus der Beschaffenheit der Gleichungen (a), (b) und (c) geschlossen, dass die allgemeinsten Gleichungen, deren man sich in Verbindung mit $\psi=0$ zur Bestimmung der Differentialquotienten z_y, z_x und z_w bedienen kann, durch willkührliche Funktionen von fünf veränderlichen Grössen ausgedrückt sind, wenn auch in der Weise, dass die beiden willkührlichen Funktionen in einer bestimmten Abhängigkeit zu einander stehen. Wir schliessen weiter, dass die vorhin aufgefundenen Gleichungen identisch sind mit denjenigen, welche auch aus den Gleichungen (a), (b) und (c) hervorgehen,

wenn man bei deren Integration der Allgemeinheit des Resultats nichts vergiebt. Durch diese Betrachtungen überzeugt man sich, dass man berechtigt ist, die Gleichung:

$$f(z\,y\,x\,w\,\alpha\,\beta) = \varphi(\alpha\,\beta)$$

für das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung $\psi = 0$ auszugeben, sobald man zur Bestimmung von α und β die beiden Gleichungen:

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{d\varphi}{d\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{df}{d\beta} = \frac{d\varphi}{d\beta}$$

bestehen lässt.

Man hat jetzt gesehen, wie man aus einem vollständigen Integral die beiden Gleichungen $\sigma = 0$ und $\tau = 0$ ableitet, welche in Verbindung mit der partiellen Differentialgleichung $\psi = 0$ die allgemeinen Werthe z_y, z_x und z_w liefern. Es bleibt nur noch übrig, die beiden Gleichungen $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \beta_1$ darzustellen, woraus das vollständige Integral abgeleitet worden ist. Hierbei bemerke man denn vor Allem, dass die eine der beiden Gleichungen durch jede Funktion α ausgedrückt werden kann, welche der Gleichung:

(a)

$$\frac{d\psi}{dz_w}\left(\frac{d\tau}{dw}\right) + \frac{d\psi}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dx}\right) + \frac{d\psi}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dy}\right) - \left(\frac{d\psi}{dw}\right)\frac{d\tau}{dz_w} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_x}$$
$$- \left(\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_y} = 0$$

an der Stelle von τ genügt. Was die andere Gleichung betrifft, so lässt sich leicht übersehen, dass dieselbe dann als willkührliche Funktion von drei veränderlichen Grössen sich darstellt. Denn schreibt man das allgemeine Integral in der Form:

$$\varphi(\alpha\,\beta\,\gamma) = 0,$$

so hat man zur Bestimmung von α und β die beiden Gleichungen:

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{d\beta} + \frac{d\varphi}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\beta} = 0.$$

Nun darf man aber, wenn es darauf ankommt, aus dem allgemeinen Integral ein besonderes abzuleiten, die eine von diesen beiden Gleichungen durch $\alpha = \alpha_1$ ersetzen, während die zweite unverändert beibehalten wird. Daraus folgt, dass jene andere Gleichung, welche neben $\alpha = \alpha_1$ zur Bestimmung der Differentialquotienten benutzt werden kann, in ihrer allgemeinsten Form durch

eine willkührliche Funktion der drei veränderlichen Grössen β, γ und $\frac{d\gamma}{d\beta}$ ausgedrückt ist. Um diese Form zu erhalten, wird man zunächst die vier anderen Funktionen $\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1\,\varepsilon_1$ bestimmen, welche ausser α die Gleichung (a) befriedigen. Denn auch die zweite Gleichung $\sigma=0$ zeigt sich als eine Funktion der fünf veränderlichen Grössen $\alpha\,\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1\,\varepsilon_1$. Diese Funktion muss dann so bestimmt werden, dass dadurch auch die Gleichung:

(c)

$$\frac{d\sigma}{dz_w}\left(\frac{d\tau}{dw}\right)+\frac{d\sigma}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dx}\right)+\frac{d\sigma}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dy}\right)-\left(\frac{d\sigma}{dw}\right)\frac{d\tau}{dz_w}-\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_x}$$
$$-\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_y}=0$$

erfüllt wird. Desshalb führe man an die Stelle von $z_y\,z_x\,z_w\,z\,y\,x\,w$ die fünf neuen Veränderlichen $\alpha\,\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1\,\varepsilon_1$ ein. Schreibt man die Gleichung (c) abkürzend durch $(\sigma\tau)=0$ an, so entsteht durch diese Transformation die neue Gleichung:

$$(c')\qquad (\alpha\beta_1)\frac{d\tau}{d\beta_1}+(\alpha\gamma_1)\frac{d\tau}{d\gamma_1}+(\alpha\delta_1)\frac{d\tau}{d\delta_1}+(\alpha\varepsilon_1)\frac{d\tau}{d\varepsilon_1}=0.$$

Man weiss im Voraus, dass die Coeffizienten als Funktionen von $\alpha\,\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1\,\varepsilon_1$ sich darstellen lassen, weil das allgemeine Integral durch eine willkührliche Funktion von drei veränderlichen Grössen ausgedrückt ist, welche selbst bestimmte Funktionen von $\alpha\,\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1\,\varepsilon_1$ sind. Doch handelt es sich hier nur um ein besonderes Integral der Gleichung (c'). Wenn es sich trifft, dass jede der drei verschiedenen Funktionen, welche der Gleichung (c') genügen, die vier Veränderlichen $\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1\,\varepsilon_1$ einschliesst, dann bedarf man allerdings aller dieser Funktionen, um zu einem besonderen Integral β zu gelangen. Es wird aber oft genug vorkommen, dass eine Funktion genügt, welche nicht alle diese Veränderliche zu gleicher Zeit einschliesst. In diesem Falle ist die Kenntniss der übrigen Veränderlichen, die man aus der Gleichung (a) abzuleiten hat, überflüssig. Man bestimme desshalb zunächst nur die eine Funktion β_1. Wenn dieselbe nicht auch der Gleichung (c) genügt, so bestimme man eine zweite Funktion γ_1. Wenn man auch mit den beiden β_1 und γ_1 nicht ausreicht, um die Gleichung (c') zu befriedigen, dann suche man eine dritte Funktion δ_1 auf, u. s. w. In dieser Weise ist dann die Rechnung möglichst vortheilhaft eingerichtet, weil jeder von den so eben erwähnten Versuchen einen Bestandtheil des nächstfolgenden Versuches ausmacht, indem

jedesmal die Bildung eines weiteren Coeffizienten der Gleichung (c') verlangt wird, welche ohnehin alle hergestellt werden müssen, wenn die gesuchte Funktion sogleich von den vier Veränderlichen $\beta_1\, \gamma_1\, \delta_1\, \varepsilon_1$ abhängig gedacht wird.

11. Die Gleichung

$$z_w = \psi(z_x\, z_y)$$

liefert ein vollständiges Integral in der Form $z = \alpha y + \beta x + \gamma w + \delta$, worin $\alpha\, \beta\, \gamma$ und δ Beständige sind. Denn setzt man dies in die partielle Differentialgleichung ein, so geht dieselbe über in $\gamma = \psi(\alpha\beta)$, wodurch also γ als Funktion von α und β bestimmt wird. Man setze nun $\delta = \varphi(\alpha\beta)$, und das allgemeine Integral lässt sich darstellen durch die drei Gleichungen:

$$z = \alpha y + \beta x + w.\psi(\alpha\beta) + \varphi(\alpha\beta),$$

$$0 = y + w\frac{d\psi}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{d\alpha},$$

$$0 = x + w\frac{d\psi}{d\beta} + \frac{d\varphi}{d\beta}.$$

12. Es sei

$$z_x z_y + 2z z_w = 1.$$

Denkt man sich z als Funktion von $v = \alpha y + \beta x + w$, wo α und β willkührliche Beständige sind, so geht die partielle Differentialgleichung über in:

$$\alpha\beta z_v^2 + 2z z_v = 1.$$

Die Annahme, dass es einen Werth z von der bezeichneten Eigenschaft gebe, ist zulässig, da die neue Differentialgleichung in der That nur die beiden Veränderlichen v und z einschliesst. Die Bestimmung des vollständigen Integrals ist dadurch aber auf die Integration einer Differentialgleichung mit nur zwei Veränderlichen zurückgeführt. Daraus entwickelt man den Werth

$$\frac{1}{z_v} = z + \sqrt{z^2 + \alpha\beta};$$

und durch die Integration erhält man $\int(z + \sqrt{z^2 + \alpha\beta})\,dz = v + \varphi(\alpha\beta)$. Das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung lässt sich demnach ausdrücken durch die drei Gleichungen:

$$\int_0^z (z + \sqrt{z^2 + \alpha\beta})\,dz = \alpha y + \beta x + w + \varphi(\alpha\beta),$$

$$\frac{\beta}{2} \cdot \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z^2+\alpha\beta}} = y + \frac{d\varphi}{d\alpha},$$

$$\frac{\alpha}{2} \cdot \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z^2+\alpha\beta}} = x + \frac{d\varphi}{d\beta}.$$

13. Es sei nun

$$z_w z_x = a + wxz_y.$$

Nimmt man hier an, z habe die Form $\alpha y + s$, worin α eine willkührliche Beständige, s aber eine Funktion von w und x ist, so geht die partielle Differentialgleichung über in:

$$s_w . s_x = a + \alpha w x,$$

woraus s in der That als eine Funktion von w und x bestimmt werden kann. Das vollständige Integral lässt sich demnach aus einer partiellen Differentialgleichung mit nur drei Veränderlichen ableiten. Um eine zweite Gleichung $\tau = 0$ zur Bestimmung der Differentialquotienten s_w und s_x zu erhalten, bilde man die partielle Differentialgleichung:

$$s_x \frac{d\tau}{dw} + s_w \frac{d\tau}{dx} + \alpha\left(x\frac{d\tau}{ds_w} + w\frac{d\tau}{ds_x}\right) = 0.$$

Daraus folgt $s_x^2 - \alpha w^2 = \beta$ oder $s_x = \sqrt{\alpha w^2 + \beta}$. Auf diesem Wege gelangt man zu der vollständigen Differentialgleichung:

$$ds = dx\sqrt{\alpha w^2 + \beta} + \frac{a + \alpha w x}{\sqrt{\alpha w^2 + \beta}} dw.$$

Man schreibt aber vortheilhafter α^2 anstatt α und $\alpha^2\beta^2$ anstatt β und man erhält:

$$\alpha ds = \alpha^2 dx \sqrt{w^2+\beta^2} + \frac{a + \alpha^2 w x}{\sqrt{w^2+\beta^2}} dw.$$

Durch die Integration findet man:

$$\alpha s = \alpha^2 x \sqrt{w^2+\beta^2} + a l \frac{w + \sqrt{w^2+\beta^2}}{\beta} + \varphi(\alpha\beta).$$

Das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung $z_w . z_x = a + wxz_y$ lässt sich demnach ausdrücken durch die drei Gleichungen:

$$\alpha z = \alpha^3 y + \alpha^2 x \sqrt{w^2+\beta^2} + al\frac{w+\sqrt{w^2+\beta^2}}{\beta} + \varphi(\alpha\beta),$$

$$z = 3\alpha^2 y + 2\alpha x\sqrt{w^2+\beta^2} + \frac{d\varphi}{d\alpha},$$

$$0 = \alpha^2\beta^2 x - aw + \beta.\sqrt{w^2+\beta^2}.\frac{d\varphi}{d\beta}.$$

14. Es sei

$$(w^2+x^2+y^2)(z_w^2+z_x^2+z_y^2)=1.$$

Zur Bestimmung von α und β hat man zunächst die Gleichung:

$$\text{(a)}\qquad \left.\begin{array}{l}(w^2+x^2+y^2)\left(z_w\frac{d\tau}{dw}+z_x\frac{d\tau}{dx}+z_y\frac{d\tau}{dy}\right)+\frac{d\tau}{dz}\\ -(z_w^2+z_x^2+z_y^2)\left(w\frac{d\tau}{dz_w}+x\frac{d\tau}{dz_x}+y\frac{d\tau}{dz_y}\right)\end{array}\right\}=0.$$

Man genügt derselben durch:

$$\alpha_1 = xz_y - yz_x,\quad \beta_1 = wz_y - yz_w,\quad \gamma_1 = wz_x - xz_w,$$

von denen die erste als Funktion α benutzt werden soll. Man findet eine vierte Funktion $\delta_1 = wz_w + xz_x + yz_y$, und wenn man nun τ als Funktion von α, β, γ, δ voraussetzt, so gelangt man zu der Gleichung:

$$\text{(c')}\qquad \gamma_1\frac{d\tau}{d\beta_1} - \beta_1\frac{d\tau}{d\gamma_1} = 0.$$

Man genügt derselben durch $\beta = \delta_1$ und auch durch $\beta = \beta_1^2 + \gamma_1^2$. Behält man die erstere Gleichung bei, so hat man zur Bestimmung der Differentialquotienten z_y, z_x und z_w die drei Gleichungen:

$$(w^2+x^2+y^2)(z_w^2+z_x^2+z_y^2)=1,\quad xz_y - yz_x = \alpha,\quad wz_w + xz_x + yz_y = \beta.$$

Aus den beiden letzteren erhält man zunächst:

$$(x^2+y^2)z_x = x(\beta - wz_w) - \alpha y,$$
$$(x^2+y^2)z_y = y(\beta - wz_w) + \alpha x.$$

Setzt man diese Werthe z_y und z_x in die erste Gleichung ein, so hat man zur Bestimmung von z_w die quadratische Gleichung:

$$(w^2+x^2+y^2)((w^2+x^2+y^2)z_w^2 - 2\beta w z_w + \beta^2 + \alpha^2) = x^2 + y^2.$$

Daraus findet man den Werth:

$$z_w = \frac{\beta w}{w^2+x^2+y^2} + \frac{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)(x^2+y^2) - \alpha^2 w^2}}{w^2+x^2+y^2}.$$

Aus dem Obigen ergeben sich alsdann auch die beiden Werthe:

$$z_x = \frac{-\alpha y}{x^2+y^2} + \frac{\beta x}{w^2+x^2+y^2} - \frac{wx}{x^2+y^2} \cdot \frac{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)(x^2+y^2)-\alpha^2 w^2}}{w^2+x^2+y^2},$$

$$z_y = \frac{\alpha x}{x^2+y^2} + \frac{\beta y}{w^2+x^2+y^2} - \frac{wy}{x^2+y^2} \cdot \frac{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)(x^2+y^2)-\alpha^2 w^2}}{w^2+x^2+y^2}.$$

Man gelangt zu einfacheren Ausdrücken, wenn man die neuen Veränderlichen

$$r = \sqrt{w^2+x^2+y^2}, \quad s = \frac{w}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad t = \frac{y}{x}$$

gebraucht. Denn dadurch entstehen die Gleichungen:

$$z_y = \frac{\alpha}{1+t^2}\frac{dt}{dy} + \frac{\beta}{r}\frac{dr}{dy} + \frac{\sqrt{1-\beta^2-\alpha^2(1+s^2)}}{1+s^2}\frac{ds}{dy},$$

$$z_x = \frac{\alpha}{1+t^2}\frac{dt}{dx} + \frac{\beta}{r}\frac{dr}{dx} + \frac{\sqrt{1-\beta^2-\alpha^2(1+s^2)}}{1+s^2}\frac{ds}{dx},$$

$$z_w = \frac{\beta}{r}\frac{dr}{dw} + \frac{\sqrt{1-\beta^2-\alpha^2(1+s^2)}}{1+s^2}\frac{ds}{dw},$$

und durch die Integration erhält man das vollständige Integral:

$$z = \alpha . \operatorname{arctg} t + \beta . lr + \int_0^s \frac{\sqrt{1-\beta^2-\alpha^2(1+s^2)}}{1+s^2} ds + \varphi(\alpha\beta).$$

15. Es sei noch

$$z_w^2 + x^2 z_x^2 + \frac{z_y^2}{\sin^2 w} = z^2 + x^2.$$

Zur Bestimmung von α und β hat man zunächst die Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad z_w\frac{d\tau}{dw} + x^2 z_x \frac{d\tau}{dx} + \frac{z_y}{\sin^2 w}\frac{d\tau}{dy} + (z^2+x^2)\frac{d\tau}{dz}$$

$$+ \left(z z_w + \frac{z_y^2 \cos w}{\sin^3 w}\right)\frac{d\tau}{dz_w} + (z z_x - x z_x^2 + x)\frac{d\tau}{dz_x} + z z_y \frac{d\tau}{dz_y} = 0.$$

Die Annahme, dass man durch eine Funktion genüge, worin die Veränderlichen x, z und z_x fehlen, führt auf die beiden Gleichungen:

$$z_w\frac{d\tau}{dw} + \frac{z_y}{\sin^2 w}\frac{d\tau}{dy} + \frac{z_y^2 \cos w}{\sin^3 w}\frac{d\tau}{dz_w} = 0, \quad z_w \frac{d\tau}{dz_w} + z_y \frac{d\tau}{dz_y} = 0.$$

Aus der letzteren folgt $\tau = \varphi(s\, w\, y)$, worin $s = \frac{z_w}{z_y}$ ist. Die andere Gleichung wird dadurch umgewandelt in:

$$s\frac{d\tau}{dw} + \frac{1}{\sin^2 w}\frac{d\tau}{dy} + \frac{\cos w}{\sin^3 w}\frac{d\tau}{ds} = 0.$$

Daraus findet man die Funktion $\alpha_1 = s^2 + \frac{1}{\sin^2 w}$. Der Gleichung (a) genügt man auch durch eine Funktion, worin nur die beiden Veränderlichen $v = \frac{z}{x}$ und z_x vorkommen. Denn unter dieser Voraussetzung behält man die Gleichung:

$$(vz_x - v^2 - 1)\frac{d\tau}{dv} + (z_x^2 - vz_x - 1)\frac{d\tau}{dz_x} = 0.$$

Nimmt man noch $u = z_x - v$ anstatt z_x, so entsteht die einfachere Gleichung:

$$(vu - 1)\frac{d\tau}{dv} + u^2\frac{d\tau}{du} = 0.$$

Daraus ergiebt sich die Funktion $\beta_1 = \frac{1}{u^2} - \frac{2v}{u}$.

Man reicht aber schon mit den beiden bis dahin aufgefundenen Funktionen aus. Denn gebraucht man die erstere an der Stelle von α, so hat man die Gleichung:

$$\text{(c)} \qquad \frac{z_w}{z_y^2}\frac{d\tau}{dw} - \frac{z_w^2}{z_y^3}\frac{d\tau}{dy} + \frac{\cos w}{\sin^3 w}\frac{d\tau}{dz_w} = 0,$$

der man offenbar durch $\tau = \beta_1$ genügt, weil die Veränderlichen w, y und z_w in dieser Funktion fehlen. Zur Bestimmung der Differentialquotienten z_y, z_x und z_w hat man demnach die drei Gleichungen:

$$z_w^2 = \alpha z_y^2 - \frac{z_y^2}{\sin^2 w}, \quad \alpha z_y^2 + x^2 z_x^2 = z + x^2, \quad u = \frac{1}{v + \sqrt{v^2 + \beta}}.$$

Man wird mit Vortheil anstatt z die Veränderliche $v = \frac{z}{x}$ gebrauchen. Dann ist $z_w = xv_w$, $z_y = xv_y$, $z_x = xv_x + v$ und $u = z_x - v = xv_x$. Man hat desshalb zur Bestimmung der Differentialquotienten v_y, v_x und v_w die folgenden Gleichungen:

$$v_w^2 = \left(\alpha - \frac{1}{\sin^2 w}\right)v_y^2, \quad \alpha v_y^2 + x^2 v_x^2 + 2xvv_x = 1, \quad xv_x = \frac{1}{v + \sqrt{v^2 + \beta}}.$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich der Werth v_z. Aus der zweiten Gleichung findet man:

$$\alpha v_y^2 + x^2 v_x^2 = \frac{-v+\sqrt{v^2+\beta}}{v+\sqrt{v^2+\beta}} = \frac{\beta}{(v+\sqrt{v^2+\beta})^2} = \beta x^2 v_x^2.$$

Wenn man nun $\frac{\beta-1}{\alpha}$ gegen α^2 vertauscht, und desshalb α gegen $\frac{\beta-1}{\alpha^2}$, so hat man die beiden Werthe:

$$v_y = \alpha x v_x \quad \text{und} \quad v_w = x v_x . \sqrt{\beta - 1 - \frac{\alpha^2}{\sin^2 w}}.$$

Das vollständige Integral der vorliegenden partiellen Differentialgleichung ergiebt sich demnach aus der vollständigen Differentialgleichung:

$$(v+\sqrt{v^2+\beta})\,dv = \alpha dy + \frac{dx}{x} + \sqrt{\beta - 1 - \frac{\alpha^2}{\sin^2 w}}\,dw.$$

Die Integrationsmethode, welche in dem Bisherigen für die partielle Differentialgleichung mit drei und vier Veränderlichen aufgestellt worden ist, lässt sich ohne Weiteres auch auf eine partielle Differentialgleichung $\psi = 0$ mit beliebig vielen Veränderlichen übertragen. Es kommt hierbei immer nur auf die Bestimmung eines vollständigen Integrals an, oder auf die Bestimmung eines besonderen Integrals, in welchem eben so viele willkührliche Beständige $a\,b\,c \ldots. k$ vorkommen, als die partielle Differentialgleichung unabhängige Veränderliche hat. Denn schreibt man das vollständige Integral in der Form:

$$f(z\,y\,x\,w\,v \ldots.\, a\,b\,c \ldots.) = k,$$

so hat man, um das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung daraus abzuleiten, nichts weiter zu thun, als die willkührlichen Beständigen $a\,b\,c \ldots.$ durch die veränderlichen Grössen $\alpha\,\beta\,\gamma \ldots.$ und die Beständige k durch eine willkührliche Funktion dieser Veränderlichen zu ersetzen. Die Gleichung

$$f(z\,y\,x\,w \ldots.\, \alpha\,\beta\,\gamma \ldots.) = \varphi(\alpha\,\beta\,\gamma \ldots.)$$

ist dann das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung $\psi = 0$, sobald man zur Bestimmung der Veränderlichen $\alpha\,\beta\,\gamma \ldots.$ die folgenden Gleichungen:

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{d\varphi}{d\alpha}, \quad \frac{df}{d\beta} = \frac{d\varphi}{d\beta}, \quad \frac{df}{d\gamma} = \frac{d\varphi}{d\gamma} \text{ u. s. w.}$$

bestehen lässt.

Das vollständige Integral ergiebt sich durch die Integration der vollständigen Differentialgleichung:

$$dz = z_y dy + z_x dx + z_w dw + z_v dv + \ldots.$$

Um aber die n Differentialquotienten $z_y\, z_x\, z_w\, z_v \ldots.$ als Funktionen der Veränderlichen $z\, y\, x\, w\, v \ldots.$ angeben zu können, sind ausser $\psi = 0$ noch $n-1$ andere Gleichungen:

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma = c \text{ u. s. w.}$$

erforderlich, worin $\alpha\, \beta\, \gamma \ldots.$ bestimmte Funktionen der Veränderlichen und der gesuchten Differentialquotienten, $a\, b\, c \ldots.$ aber willkührliche Beständige sind. Die Darstellung dieser $n-1$ Gleichungen macht den eigentlichen Gegenstand der Untersuchung aus. Doch lässt sich die Regel, wornach dies geschieht, jetzt leicht übersehen. Man nehme, um bei dieser Untersuchung sich kürzer fassen zu können, beispielweise vier unabhängige Veränderliche $y\, x\, w\, v$, und bezeichne vor Allem den Ausdruck:

$$\frac{d\psi}{dz_v}\left(\frac{d\tau}{dv}\right) + \frac{d\psi}{dz_w}\left(\frac{d\tau}{dw}\right) + \frac{d\psi}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dx}\right) + \frac{d\psi}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dy}\right)$$
$$- \left(\frac{d\psi}{dv}\right)\frac{d\tau}{dz_v} - \left(\frac{d\psi}{dw}\right)\frac{d\tau}{dz_w} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_x} - \left(\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_y}$$

abkürzend durch $(\psi\tau) = 0$. Man hat dann zur Bestimmung der Funktionen $\alpha\, \beta\, \gamma$ zunächst die drei Gleichungen:

$$\text{(a)} \qquad (\psi\alpha) = 0, \quad (\psi\beta) = 0, \quad (\psi\gamma) = 0,$$

welche sich nur durch die Unbekannte von einander unterscheiden. Ausser ψ giebt es noch sieben andere Funktionen $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1\, \delta_1\, \varepsilon_1\, \zeta_1\, \eta_1$, welche diesen Gleichungen an der Stelle der Unbekannten genügen; aber man kann sich irgend einer davon bedienen, um die Gleichung $\alpha = a$ darzustellen. Auch die beiden Unbekannten β und γ sind Funktionen von $\alpha_1\, \beta_1 \ldots.\, \eta_1$, bleiben aber vorerst noch unbestimmt, weil sie ausser den Gleichungen (a) noch anderen Anforderungen entsprechen sollen. Es bestehen nämlich zunächst noch die beiden Gleichungen:

$$\text{(b)} \qquad (\alpha\beta) = 0 \text{ und } (\alpha\gamma) = 0.$$

Um die Unbekannten β und γ hiernach zu bestimmen, bringe man an die Stelle der Veränderlichen $z_y\, z_x\, z_w\, z_v\, z\, y\, x\, w\, v$ die Grössen $\alpha\, \beta_1\, \gamma_1 \ldots.\, \eta_1$. Man schreibe den Ausdruck:

$$(\alpha\beta_1)\frac{d\tau}{d\beta_1} + (\alpha\gamma_1)\frac{d\tau}{d\gamma_1} + (\alpha\delta_1)\frac{d\tau}{d\delta_1} + (\alpha\varepsilon_1)\frac{d\tau}{d\varepsilon_1} + (\alpha\zeta_1)\frac{d\tau}{d\zeta_1} + (\alpha\eta_1)\frac{d\tau}{d\eta_1}$$

abkürzend durch das Zeichen $((\alpha\tau))$ und man hat dann die beiden transformirten Gleichungen:

$$\text{(b')} \qquad ((\alpha\beta)) = 0 \quad \text{und} \quad ((\alpha\gamma)) = 0,$$

die sich auch wieder nur durch die Unbekannten β und γ von einander unterscheiden. Ausserdem lassen sich da die neun ursprünglichen Veränderlichen jedenfalls durch α und die sechs neuen Veränderlichen $\beta_1\,\gamma_1\,\ldots.\,\eta_1$ eliminiren; und man findet fünf verschiedene Funktionen $\beta_2\,\gamma_2\,\delta_2\,\varepsilon_2\,\zeta_2$, welche diesen Gleichungen an der Stelle der Unbekannten genügen. Irgend eine dieser fünf Funktionen kann benutzt werden, um die Gleichung $\beta = b$ herzustellen. Die Unbekannte γ ist dann zwar auch eine Funktion von $\beta_2\,\gamma_2\,\delta_2\,\varepsilon_2\,\zeta_2$, allein vorerst noch unbestimmt, weil sie ausser den Gleichungen (b') noch die Gleichung

$$\text{(c)} \qquad (\beta\gamma) = 0$$

zu erfüllen hat. Man setze an die Stelle der Veränderlichen $z_y\,z_x\,z_w\,z_v\,z\,y\,x\,w\,v$ die Grössen $\alpha\,\beta\,\gamma_2\,\delta_2\,\varepsilon_2\,\zeta_2$ ein; und man gelangt dadurch zu der neuen Gleichung:

$$\text{(c')} \qquad (\beta\gamma_2)\frac{d\tau}{d\gamma_2} + (\beta\delta_2)\frac{d\tau}{d\delta_2} + (\beta\varepsilon_2)\frac{d\tau}{d\varepsilon_2} + (\beta\zeta_2)\frac{d\tau}{d\zeta_2} = 0.$$

Die Coeffizienten lassen sich als Funktionen von $\alpha\,\beta$ und der vier neuen Veränderlichen $\gamma_2\,\delta_2\,\varepsilon_2\,\zeta_2$ darstellen; es giebt desshalb drei verschiedene Funktionen τ, welche genügen. Doch bedarf man nur einer einzigen, um die Gleichung $\gamma = c$ herzustellen.

Auf dem hier vorgeschriebenen Wege gelangt man also jedenfalls zur Kenntniss eines vollständigen Integrals, indem man die sieben verschiedenen Funktionen der Gleichung (a) in der angegebenen Weise benutzt. Sehr oft wird man aber schon mit weniger als sieben Funktionen ausreichen, und es kann sogar vorkommen, dass schon drei von diesen Funktionen zu dem gewünschten Ziele führen. Wenn aber auch die sieben verschiedenen Funktionen der Gleichung (a) und dann wieder die fünf verschiedenen Funktionen der Gleichung (b') nöthig wären, um endlich zu einer einzigen Funktion der Gleichung (c') zu gelangen, so darf man doch nicht glauben, dass man desshalb alle jene Funktionen als Integrale der genannten Differentialgleichungen aufzusuchen hätte. Man braucht vielmehr für jede der beiden Differentialgleichungen (a) und (b') in der Regel nur zwei solcher Integrale darzustellen, da sich die übrigen Funktionen durch Differentiation aus irgend zweien darstellen lassen. Die Funktionen $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1\,\varepsilon_1\,\zeta_1\,\eta_1$ der Gleichung (a) besitzen nämlich, was schon oben hervorgehoben

worden ist, die Eigenschaft, dass man jedesmal eine Funktion davon erhält, wenn man irgend zwei von den Grössen $(\alpha_1\beta_1)$, $(\alpha_1\gamma_1)$, $(\alpha_1\delta_1)$, ... $(\beta_1\gamma_1)$, $(\beta_1\delta_1)$, ... $(\gamma_1\delta_1)$ zu einem Quotienten mit einander verbindet. Dies kann aber nur in der Weise zu Stande kommen, dass jede von diesen Grössen für sich in eine Funktion von $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ .... übergeht. Wenn also irgend zwei Funktionen α_1 und β_1 bekannt sind, so hat man auch eine dritte Funktion $\gamma_1 = (\alpha_1\beta_1)$, und dies führt wieder auf zwei weitere Funktionen $(\alpha_1\gamma_1)$ und $(\beta_1\gamma_1)$ u. s. w. Nur für den Fall, dass der Ausdruck $(\alpha_1\beta_1)$ in eine Funktion von α_1 und β_1 allein übergeht, wären diese beiden Funktionen nicht ausreichend, um daraus durch Differentiation noch andere abzuleiten. Man wäre dann genöthigt, zunächst noch eine dritte Funktion γ_1 als besonderes Integral der Gleichung (a) aufzusuchen. Ganz ebenso erhält man auch, wenn irgend zwei Funktionen β_2 und γ_2 der Gleichung (b') bekannt sind, eine dritte Funktion δ_2 durch den Ausdruck $(\beta_2\gamma_2)$ und alsdann wieder noch andere in der Form $(\beta_2\delta_2)$ und $(\gamma_2\delta_2)$.

VI. Integration der partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung und der ersten Stufe.

Das allgemeine Integral einer partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung wird als eine endliche Gleichung gedacht, worin zwei von einander unabhängige willkührliche Funktionen vorkommen. Wenn die partielle Differentialgleichung nur drei Veränderliche hat, so ist jede dieser beiden Funktionen willkührlich nach einer einzigen veränderlichen Grösse; wenn aber $n+1$ Veränderliche da sind, so hat man es mit willkührlichen Funktionen von $n-1$ veränderlichen Grössen zu thun. Eine endliche Gleichung, welche die bezeichnete Eigenschaft besitzt, wird jedesmal als das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung angesehen; und wenn es auch vorkommt, dass sich gleichzeitig verschiedene endliche Gleichungen der Art vorfinden, so glaubt man doch annehmen zu dürfen, dass die Verschiedenheit eine nur scheinbare sei und dass jede davon auf irgend eine der übrigen sich zurückführen lasse.

Ueber die Art und Weise, wie die beiden willkührlichen Funktionen in dem allgemeinen Integral auftreten, lässt sich wenig sagen, was allgemein Gültigkeit hätte. Nur dies mag zunächst bemerkt werden, dass nicht jede endliche Gleichung, worin zwei willkührliche Funktionen von der bezeichneten Eigenschaft vorkommen, als das allgemeine Integral einer partiellen Differential-

gleichung der zweiten Ordnung betrachtet werden dürfte. Denn wenn z. B. das allgemeine Integral einer partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit den drei Veränderlichen $z\,y\,x$ in der Form $\tau=0$ vorliegt, so hat man, um daraus die partielle Differentialgleichung wieder abzuleiten, vor Allem die folgenden fünf Gleichungen:

$$\left(\frac{d\tau}{dy}\right)=0,\quad \left(\frac{d\tau}{dx}\right)=0,\quad \left(\frac{d^2\tau}{dy^2}\right)=0,\quad \left(\frac{d^2\tau}{dx\,dy}\right)=0,\quad \left(\frac{d^2\tau}{dx^2}\right)=0$$

herzustellen. Durch die Elimination der willkührlichen Grössen zwischen diesen Differentialgleichungen und der endlichen Gleichung $\tau=0$ ergiebt sich die partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung. Denkt man sich nun τ als eine bestimmte Funktion der drei Veränderlichen $z\,y\,x$ und der beiden willkührlichen Funktionen $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\beta)$, so finden sich in jenen sechs Gleichungen die sechs willkührlichen Grössen φ, $\frac{d\varphi}{d\alpha}$, $\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}$, ψ, $\frac{d\psi}{d\beta}$, $\frac{d^2\psi}{d\beta^2}$ vor. Man kann aber aus sechs verschiedenen Gleichungen nur fünf von einander unabhängige Grössen eliminiren; und daraus folgt, dass jene Gleichung $\tau=0$ nur dann als das allgemeine Integral einer partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit drei Veränderlichen angesehen werden könnte, wenn die beiden willkührlichen Funktionen in der Weise auftreten, dass durch die Elimination von irgend fünf jener willkührlichen Grössen zugleich die sechste hinwegfällt. Man kann auch sagen, das Vorkommen der beiden willkührlichen Funktionen müsse von der Art sein, dass in jenen sechs Gleichungen, welche bei der Elimination des Willkührlichen zu verwenden sind, nur fünf verschiedene, von einander unabhängige Grössen sich vorfinden, welche allein das Willkührliche einschliessen. Denn nur so ist es möglich, das Willkührliche zu eliminiren.

Nun giebt es aber einen Fall, welcher vor Allem bemerkenswerth ist. Wenn nämlich das allgemeine Integral $\tau=0$ von solcher Beschaffenheit ist, dass die eine der beiden willkührlichen Funktionen φ und ψ schon nach den ersten Differentiationen eliminirt werden kann, so dass also durch diese Elimination eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung $\sigma=0$ entsteht, worin nur noch die andere willkührliche Funktion vorkommt, so ist leicht nachzuweisen, dass diese partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung $\sigma=0$ allein ausreicht, um daraus die zugehörige partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung abzuleiten. Denkt man sich z. B. die Gleichung $\tau=0$ wieder als das allgemeine Integral einer partiellen Differentialgleichung der zwei-

ten Ordnung mit den drei Veränderlichen $z\,y\,x$, und nimmt man demgemäss an, dass aus den drei Gleichungen:

$$\tau=0,\quad \left(\frac{d\tau}{dy}\right)=0,\quad \left(\frac{d\tau}{dx}\right)=0$$

eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung $\sigma=0$ sich herstellen lässt, worin nur noch die eine willkührliche Funktion φ vorkommt, so lassen sich jene sechs Gleichungen, welche überhaupt zur Elimination der beiden willkührlichen Funktionen φ und ψ gegeben sind, auch durch die folgenden sechs ersetzen:

$$1.\qquad \sigma=0,\quad \left(\frac{d\sigma}{dy}\right)=0,\quad \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)=0,$$

$$2.\qquad \tau=0,\quad \left(\frac{d\tau}{dy}\right)=0,\quad \left(\frac{d^2\tau}{dy^2}\right)=0.$$

Mit demselben Rechte könnte man sich auch der Gleichungen:

$$1.\qquad \sigma=0,\quad \left(\frac{d\sigma}{dy}\right)=0,\quad \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)=0,$$

$$3.\qquad \tau=0,\quad \left(\frac{d\tau}{dx}\right)=0,\quad \left(\frac{d^2\tau}{dx^2}\right)=0$$

bedienen. Die drei Gleichungen 1. sind nach der Annahme frei von φ, während diese Grösse in den Gleichungen 2. und 3. noch eine Stelle findet. Wollte man nun annehmen, dass die Gleichungen 1. zur Elimination der andern willkührlichen Funktion ψ unzureichend seien, dass also hierbei noch die drei übrigen Gleichungen zu Hilfe genommen werden müssten, so würde dies voraussetzen, dass man die Grösse φ, welche in den Gleichungen 1. fehlt, aus den Gleichungen 2. und auch aus den Gleichungen 3. eliminiren könne, da es nur so möglich wäre, eine weitere Gleichung zu gewinnen, worin die willkührliche Funktion ψ allein vorkommt. Nun kann man aber aus den Gleichungen 2. nichts weiter als blosse Funktionen von x eliminiren; und ebenso lassen sich aus den Gleichungen 3. nur Funktionen von y eliminiren. Aus diesen beiden Gruppen von Gleichungen kann also nichts Gemeinschaftliches, was zugleich von Veränderlichen abhängig wäre, eliminirt werden; und hieraus folgt denn, dass die drei Gleichungen 1. zur Elimination der in $\sigma=0$ vorkommenden willkührlichen Funktion ψ jedenfalls ausreichen, wenn die Gleichung $\tau=0$ überhaupt das allgemeine Integral einer partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung darstellt. Damit ist aber auch der Beweis geliefert, dass die partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung jedesmal von einer partiellen Differentialgleichung

der ersten Ordnung abgeleitet werden kann, welche dann selbst das allgemeine Integral $\tau = 0$ der ersteren Gleichung liefert, wenn dieses die Eigenschaft besitzt, dass die eine der beiden willkührlichen Funktionen schon nach den ersten Differentiationen zum Verschwinden gebracht werden kann. Wenn die partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung auf eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung zurückgeführt werden kann, welche dann selbst das allgemeine Integral der ersteren Gleichung liefert, so sagt man, dieselbe besitze ein erstes Integral. Es mag mir gestattet sein, um mich kürzer ausdrücken zu können, in diesem Falle die Differentialgleichung eine der ersten Stufe zu nennen.

Die Bestimmung des ersten Integrals ist keinen besonderen Schwierigkeiten unterworfen. Unter den partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung mit drei Veränderlichen betrachten wir zunächst die Gleichung:

$$X\frac{d^2z}{dx^2} + 2V\frac{d^2z}{dxdy} + Y\frac{d^2z}{dy^2} = Z,$$

worin $X\,V\,Y\,Z$ bestimmte Funktionen der drei Veränderlichen $z\,y\,x$ und der Differentialquotienten z_y und z_x sind. Als erstes Integral hat man hier jedesmal die Gleichung $\beta = \varphi(\alpha)$, wo φ eine willkührliche Funktion, α und β aber bestimmte Funktionen der fünf Grössen $z_y\,z_x\,z\,y\,x$ sind. Denn es lässt sich keine Differentialgleichung der ersten Ordnung angeben, worin eine willkührliche Funktion in anderer Weise aufträte, und welche zugleich eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung von der angegebenen Form zur Folge hätte. Um die beiden Funktionen α und β zu bestimmen, schreibe man das erste Integral $\beta - \varphi(\alpha) = 0$ abkürzend in der Form $\tau = 0$. Daraus entstehen die beiden Differentialgleichungen:

$$1. \qquad \frac{d\tau}{dz_y}\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d\tau}{dz_x}\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{d\tau}{dz}z_y + \frac{d\tau}{dy} = 0,$$

$$2. \qquad \frac{d\tau}{dz_y}\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{d\tau}{dz_x}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d\tau}{dz}z_x + \frac{d\tau}{dx} = 0.$$

Wenn nun aber die partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$X\frac{d^2z}{dx^2} + 2V\frac{d^2z}{dxdy} + Y\frac{d^2z}{dy^2} = Z$$

in der That durch die Elimination von φ aus diesen beiden Gleichungen abgeleitet werden kann, so gelangt man zu einer identischen Gleichung, sobald man irgend zwei von den drei Diffe-

rentialquotienten der zweiten Ordnung aus den Gleichungen 1. und 2. entwickelt, und deren Werthe in die partielle Differentialgleichung einsetzt. Eliminirt man die beiden Differentialquotienten $\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$, so gelangt man zu der folgenden Gleichung:

$$\left(X\left(\frac{d\tau}{dz_y}\right)^2 - 2V\frac{d\tau}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x} + Y\left(\frac{d\tau}{dz_x}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dxdy}$$
$$+ X\frac{d\tau}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dz}z_x + \frac{d\tau}{dx}\right) + Y\frac{d\tau}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dz}z_y + \frac{d\tau}{dy}\right) + Z\frac{d\tau}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y} = 0.$$

Da nun der Differentialquotient zweiter Ordnung $\frac{d^2z}{dxdy}$ weder in den Coeffizienten der partiellen Differentialgleichung, noch auch in der Funktion τ vorkommt, so kann diese Gleichung nur dadurch zu einer identischen werden, dass sowohl der gemeinsame Faktor von $\frac{d^2z}{dxdy}$, als auch der Rest der Gleichung für sich verschwindet. Zur Bestimmung von τ hat man demnach die beiden Gleichungen:

$$X\left(\frac{d\tau}{dz_y}\right)^2 - 2V\frac{d\tau}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x} + Y\left(\frac{d\tau}{dz_x}\right)^2 = 0,$$
$$X\frac{d\tau}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dz}z_x + \frac{d\tau}{dx}\right) + Y\frac{d\tau}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dz}z_y + \frac{d\tau}{dy}\right) + Z\frac{d\tau}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y} = 0.$$

Daraus bildet man aber leicht zwei andere Gleichungen, welche in Bezug auf die Differentialquotienten der gesuchten Funktion τ von dem ersten Grade sind. Denn die erstere schreibt sich auch in der Form:

$$\text{(a)} \qquad X\frac{d\tau}{dz_y} - (V \pm \sqrt{V^2 - XY})\frac{d\tau}{dz_x} = 0$$

oder als Differentialgleichung mit nur zwei Veränderlichen:

$$Xdz_x + (V \pm \sqrt{V^2 - XY})\,dz_y = 0.$$

Man eliminire damit die Grösse $\frac{d\tau}{dz_y}$, und so geht dann die andere Gleichung über in:

$$\text{(b)} \quad X\left(\frac{d\tau}{dz}z_x + \frac{d\tau}{dx}\right) + (V \mp \sqrt{V^2 - XY})\left(\frac{d\tau}{dz}z_y + \frac{d\tau}{dy}\right) + Z\frac{d\tau}{dz_x} = 0.$$

Bringt man nun aber an die Stelle von τ die obige Form $\beta - \varphi(\alpha)$, so zeigt es sich, dass jede der beiden Funktionen α und β den Differentialgleichungen (a) und (b) an der Stelle von

τ genügen muss. Darin ist denn zugleich die Bedingung ausgesprochen, unter welcher die vorliegende partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung ein erstes Integral besitzt. Wenn es nicht zwei verschiedene Funktionen von der bezeichneten Eigenschaft giebt, dann giebt es auch kein erstes Integral.

Für den Fall $X=0$ bedürfen die Gleichungen (a) und (b) einer Verwandlung, damit dieselben gleichbedeutend seien mit den ursprünglichen Differentialgleichungen, welche in Bezug auf die Differentialquotienten von τ quadratisch sind. In dieser Absicht multiplizire man dieselben mit $V \pm \sqrt{V^2 - XY}$ und es entstehen die neuen Gleichungen:

$$(\mathrm{a}') \qquad (V \mp \sqrt{V^2 - XY}) \frac{d\tau}{dz_y} - Y \frac{d\tau}{dz_x} = 0,$$

$$(\mathrm{b}') \quad (V \pm \sqrt{V^2 - XY}) \left(\frac{d\tau}{dz} z_x + \frac{d\tau}{dx} \right) + Y \left(\frac{d\tau}{dz} z_y + \frac{d\tau}{dy} \right) + Z \frac{d\tau}{dz_y} = 0,$$

deren man sich in dem angegebenen Falle zu bedienen hat, während für den Fall $Y=0$ nur die vorigen Formen brauchbar sind.

Wenn gleichzeitig $X=0$ und $Y=0$ ist, so erhält man die Gleichungen:

$$\frac{d\tau}{dz_x} = 0 \text{ und } 2V \left(\frac{d\tau}{dz} z_x + \frac{d\tau}{dx} \right) + Z \frac{d\tau}{dz_y} = 0$$

oder

$$\frac{d\tau}{dz_y} = 0 \text{ und } 2V \left(\frac{d\tau}{dz} z_y + \frac{d\tau}{dy} \right) + Z \frac{d\tau}{dz_x} = 0.$$

Das zweite Integral einer partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung kann so beschaffen sein, dass nach den ersten Differentiationen sowohl die eine, als die andere der beiden willkührlichen Funktionen sich eliminiren lässt. Es versteht sich, dass man in diesem Falle zwei verschiedene erste Integralformen auffindet. Man gelangt zu diesen beiden Integralformen, indem man entweder die in den Gleichungen (a) und (b) vorkommende Wurzelgrösse das eine Mal mit dem positiven, das andere Mal mit dem negativen Vorzeichen gebraucht; oder, wenn nur eine Form der beiden Differentialgleichungen (a) und (b) benutzt wird, indem man dann drei verschiedene Funktionen α, β und γ darstellt, welche denselben gleichzeitig Genüge leisten.

Um das zweite Integral mit seinen beiden willkührlichen Funktionen zu erhalten, wird man das erste Integral der Integration unterwerfen. Wenn zwei verschiedene Integralformen der Art vorliegen, so kann man auch, anstatt eines davon in der an-

gegebenen Weise zu benutzen, von den beiden Formen gleichzeitig Gebrauch machen. Man berechne daraus die beiden Werthe z_y und z_x, und die Bestimmung des zweiten Integrals ist dann zurückgeführt auf die Integration der vollständigen Differentialgleichung:

$$dz = z_y dy + z_x dx.$$

Es ist schon vorhin erwähnt worden, dass die Rechnung, wodurch man zu den beiden ersten Integralformen gelangt, insofern solche überhaupt bestehen, sich zweifach gestaltet. Wenn man den letzteren Weg einzuschlagen hat, wo es drei verschiedene Funktionen giebt, welche einer und derselben Form der beiden Differentialgleichungen (a) und (b) Genüge leisten, so stellen die beiden ersten Integralformen ein und dieselbe Funktion von z_y und z_x vor, da diese jedesmal aus derselben Gleichung (a) gewonnen wird. In diesem Falle erhält man das zweite Integral der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung durch die Elimination eben dieser Funktion zwischen den beiden ersten Integralformen.

1. Es sei nun $\frac{d^2z}{dx^2} - a^2\frac{d^2z}{dy^2} = 0$. Man hat hier:

(a) $$dz_x \pm a dz_y = 0,$$

wo jedes der beiden Vorzeichen benutzt werden darf. Das eine Mal entsteht $z_x - az_y = \alpha_1$. Man findet dann weiter:

(b) $$(z_x + az_y)\frac{d\tau}{dz} + \frac{d\tau}{dx} + a\frac{d\tau}{dy} = 0.$$

Da nun τ eine Function von $\alpha_1\, z\, y\, x$ sein soll, so erhält man, wenn α_1 an die Stelle von z_x gebracht wird, die neue Gleichung:

$$(\alpha_1 + 2az_y)\frac{d\tau}{dz} + \frac{d\tau}{dx} + a\frac{d\tau}{dy} = 0.$$

Man genügt durch $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = y - ax$. Das erste Integral zeigt sich demnach in der Form:

$$z_x - az_y = \varphi(y - ax).$$

Das andere Mal findet man das erste Integral:

$$z_x + az_y = \psi(y + ax).$$

Durch die zweite Integration entsteht jedesmal die endliche Gleichung:

$$z = \varphi(y - ax) + \psi(y + ax).$$

2. Für die Gleichung $z_y^2\frac{d^2z}{dx^2} - 2z_yz_x\frac{d^2z}{dxdy} + z_x^2\frac{d^2z}{dy^2} = 0$ hat man:

(a) $$z_y dz_x - z_x dz_y = 0.$$

Daraus folgt $\alpha_1 = \frac{z_x}{z_y}$. Man hat weiter:

(b) $$z_y \frac{d\tau}{dx} - z_x \frac{d\tau}{dy} = 0,$$

oder auch, wenn man z_x mittels α_1 eliminirt,

$$\frac{d\tau}{dx} - \alpha_1 \frac{d\tau}{dy} = 0.$$

Daraus erhält man $\alpha = \alpha_1$, $\beta = z$ und $\gamma = y + x\alpha_1$. Man hat also die beiden ersten Integrale:

$$\alpha_1 = \varphi(z) \quad \text{und} \quad y + x\alpha_1 = \psi(z).$$

Durch die Elimination von α_1 gelangt man zu dem zweiten Integral:

$$y + x\varphi(z) = \psi(z).$$

3. Es sei $\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2z}{dy^2} + \frac{4z_x}{x+y} = 0$. Man findet die Gleichung:

(a) $$dz_x \pm dz_y = 0.$$

Doch nur das untere Vorzeichen führt hier zum Ziel. Man hat $z_x - z_y = \alpha_1$, und man erhält dann weiter:

(b) $$(z_x + z_y)\frac{d\tau}{dz} + \frac{d\tau}{dx} + \frac{d\tau}{dy} - \frac{4z_x}{x+y}\frac{d\tau}{dz_x} = 0.$$

Da τ als Funktion von α_1, z, y und x sich herausstellt, so geht diese Gleichung, wenn man zugleich z_y mittels α_1 eliminirt, über in:

$$(2z_x - \alpha_1)\frac{d\tau}{dz} + \frac{d\tau}{dx} + \frac{d\tau}{dy} - \frac{4z_x}{x+y}\frac{d\tau}{d\alpha_1} = 0.$$

Diese zerfällt nun aber in die beiden:

$$(x+y)\frac{d\tau}{dz} - 2\frac{d\tau}{d\alpha_1} = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_1\frac{d\tau}{dz} - \frac{d\tau}{dx} - \frac{d\tau}{dy} = 0.$$

Die erstere liefert $\beta = (x+y)\alpha_1 + 2z$ und die andere wird dadurch umgewandelt in die einfachere:

$$\frac{d\tau}{dx} + \frac{d\tau}{dy} = 0.$$

Man genügt hier durch $\alpha = x - y$ und $\beta = \beta_1 = (x+y)\alpha_1 + 2z$. Das erste Integral hat demnach die Form:

$$(x+y)(z_x - z_y) + 2z = \varphi(x-y).$$

4. Es sei nun $zz_y\frac{d^2z}{dx^2} - (z_y + zz_x)\frac{d^2z}{dxdy} + z_x\frac{dz^2}{dy^2} = 0$. Man hat hier die beiden Gleichungen:

(a) $$z_y dz_x - z_x dz_y = 0 \quad \text{und} \quad z dz_x - dz_y = 0.$$

Die letztere giebt $zz_x - z_y = \alpha_1$. Man hat weiter:

$$\text{(b)} \qquad z_y \frac{d\tau}{dx} - z_x \frac{d\tau}{dy} = 0.$$

Daraus folgt aber $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = z$; und das erste Integral:

$$zz_x - z_y = \varphi(z).$$

5. Es sei $(a^2 + z_x z_y + z_y^2)\frac{d^2z}{dx^2} + (z_y^2 - z_x^2)\frac{d^2z}{dxdy} - (a^2 + z_x z_y + z_x^2)\frac{d^2z}{dy^2} = 0.$

Man findet hier die beiden Gleichungen:

$$\text{(a)}$$

$$(a^2 + z_x z_y + z_y^2)\, dz_x - (a^2 + z_x z_y + z_x^2)\, dz_y = 0 \quad \text{und} \quad dz_x + dz_y = 0.$$

Die Integration der ersteren giebt:

$$\frac{a^2 + 2z_x z_y}{(z_x - z_y)^2} = \alpha_1.$$

Nun hat man aber weiter die Gleichung:

$$\text{(b)} \qquad (z_x + z_y)\frac{d\tau}{dz} + \frac{d\tau}{dx} + \frac{d\tau}{dy} = 0.$$

Man genügt dieser Gleichung durch $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = x - y$; und das erste Integral zeigt sich dann in der Form:

$$a^2 + 2z_x z_y = (z_x - z_y)^2 \varphi(x - y).$$

6. Es sei noch

$$(z_x + az_y)\left(\frac{d^2z}{dx^2} + (1 + b)\frac{d^2z}{dxdy} + b\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{d^2z}{dx^2} + (1 + c)\frac{d^2z}{dxdy} + c\frac{d^2z}{dy^2}.$$

Man hat hier die Werthe:

$X = z_x + az_y - 1$, $\quad 2V = (z_x + az_y)(1 + b) - (1 + c)$, $\quad Y = (z_x + az_y)b - c$;

und dies führt auf die beiden Gleichungen:

$$(z_x + az_y - 1)\, dz_x + ((z_x + az_y)b - c)\, dz_y \quad \text{und} \quad dz_x + dz_y = 0.$$

Aus der ersteren findet man durch die Integration:

$$z_x + bz_y + \frac{c - b}{c - a}\, l\left(z_x + az_y - \frac{c - a}{b - a}\right) = \alpha_1.$$

Man findet weiter die Gleichung:

$$\text{(b)} \qquad (z_x + z_y)\frac{d\tau}{dz} + \frac{d\tau}{dx} + \frac{d\tau}{dy} = 0.$$

Man genügt dieser durch $\alpha = a_1$ und $\beta = x - y$, und man hat das allgemeine Integral:

$$z_x + bz_y + \frac{c-b}{c-a} l\left(z_x + az_y - \frac{c-a}{b-a}\right) = \varphi(x-y).$$

Auch die allgemeinere partielle Differentialgleichung

$$U\left(\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2\right) + X\frac{d^2z}{dx^2} + 2V\frac{d^2z}{dxdy} + Y\frac{d^2z}{dy^2} = Z$$

führt auf ein erstes Integral $\beta = \varphi(\alpha)$, worin α und β eben so wie die Coefficienten der Differentialgleichung bestimmte Funktionen der drei Veränderlichen $z\,y\,x$ und der Differentialquotienten z_y und z_x sind. Denn wenn man aus den beiden Gleichungen

$$1. \qquad \frac{d\tau}{dz_y}\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d\tau}{dz_x}\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{d\tau}{dz}z_y + \frac{d\tau}{dy} = 0,$$

$$2. \qquad \frac{d\tau}{dz_y}\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{d\tau}{dz_x}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d\tau}{dz}z_x + \frac{d\tau}{dx} = 0,$$

worin abkürzend $\tau = \beta - \varphi(\alpha)$ gesetzt worden, die willkührliche Funktion φ eliminirt, so findet man eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung von der vorliegenden Form.

Um diejenigen Gleichungen zu erhalten, mit deren Hilfe die Funktionen α und β hier sich bestimmen lassen, vorausgesetzt, dass ein erstes Integral möglich ist, so eliminire man wieder die beiden Differentialquotienten $\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$ aus den Gleichungen 1. und 2. und aus der partiellen Differentialgleichung. Man gelangt so zu der Gleichung:

$$\Big\{U\left(\frac{d\tau}{dz}z_y + \frac{d\tau}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_y} + U\left(\frac{d\tau}{dz}z_x + \frac{d\tau}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_x} - X\left(\frac{d\tau}{dz_y}\right)^2 + 2V\frac{d\tau}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x}$$
$$- Y\left(\frac{d\tau}{dz_x}\right)^2\Big\}\frac{d^2z}{dxdy}$$
$$+ U\left(\frac{d\tau}{dz}z_y + \frac{d\tau}{dy}\right)\left(\frac{d\tau}{dz}z_x + \frac{d\tau}{dx}\right) - X\left(\frac{d\tau}{dz}z_x + \frac{d\tau}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_y}$$
$$- Y\left(\frac{d\tau}{dz}z_y + \frac{d\tau}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_x} - Z\frac{d\tau}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y} = 0.$$

Nun muss aber der gemeinsame Faktor von $\frac{d^2z}{dxdy}$ und dann auch

der Rest der Gleichung für sich verschwinden. Man erhält desshalb zur Bestimmung von τ zwei partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung, welche leicht wieder in solche des ersten Grades umgewandelt werden können. Denn schreibt man dieselben in der Form:

$$(U\left(\frac{d\tau}{dz}z_y+\frac{d\tau}{dy}\right)-X\frac{d\tau}{dz_y})\frac{d\tau}{dz_y}+2V\frac{d\tau}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y}$$
$$+(U\left(\frac{d\tau}{dz}z_x+\frac{d\tau}{dx}\right)-Y\frac{d\tau}{dz_x})\frac{d\tau}{dz_x}=0,$$

$$(U\left(\frac{d\tau}{dz}z_y+\frac{d\tau}{dy}\right)-X\frac{d\tau}{dz_y})(U\left(\frac{d\tau}{dz}z_x+\frac{d\tau}{dx}\right)-Y\frac{d\tau}{dz_x})-(XY+UZ)\frac{d\tau}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x}=0,$$

so ergiebt sich durch die Elimination von $U\left(\frac{d\tau}{dz}z_x+\frac{d\tau}{dx}\right)-Y\frac{d\tau}{dz_x}$ zunächst:

$$(U\left(\frac{d\tau}{dz}z_y+\frac{d\tau}{dy}\right)-X\frac{d\tau}{dz_y})^2+2V(U\left(\frac{d\tau}{dz}z_y+\frac{d\tau}{dy}\right)-X\frac{d\tau}{dz_y})\frac{d\tau}{dz_x}$$
$$+(XY+UZ)\left(\frac{d\tau}{dz_x}\right)^2=0.$$

Durch die Auflösung dieser quadratischen Gleichung entsteht die partielle Differentialgleichung des ersten Grades:

$$\text{(a)}\quad U\left(\frac{d\tau}{dz}z_y+\frac{d\tau}{dy}\right)-X\frac{d\tau}{dz_y}+(V\pm\sqrt{V^2-(XY+UZ)})\frac{d\tau}{dz_x}=0.$$

Indem man diese mit der zweiten der ursprünglichen verbindet, so erhält man noch eine andere partielle Differentialgleichung des ersten Grades, nämlich:

$$\text{(b)}\quad U\left(\frac{d\tau}{dz}z_x+\frac{d\tau}{dx}\right)-Y\frac{d\tau}{dz_x}+(V\mp\sqrt{V^2-(XY+UZ)})\frac{d\tau}{dz_y}=0.$$

Es kommt also darauf an, zwei verschiedene Funktionen α und β anzugeben, von denen jede die beiden Differentialgleichungen (a) und (b) an der Stelle von τ erfüllt, nachdem man der darin vorkommenden Wurzelgrösse entweder das obere oder das untere Vorzeichen gegeben hat.

Wenn zwei verschiedene partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit den drei Veränderlichen $z\,y\,x$ aus ein und derselben endlichen Gleichung ihren Ursprung nehmen, und zuerst nach z und y, sodann nach z und x differentiirt werden, so erge-

ben sich vier verschiedene partielle Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, woraus eine dritte partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung abgeleitet wird, indem man die drei Differentialquotienten der zweiten Ordnung $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ eliminirt. Da auch diese auf jene endliche Gleichung hindeutet, so setze man die Differentialquotienten der ersten Ordnung z_y und z_x, wie sie aus den beiden ursprünglichen Gleichungen als Funktionen von $z\,y\,x$ sich entwickeln, hier ein, und man wird so entweder der neuen Gleichung identisch genügen oder jene endliche Gleichung selbst erhalten. Wenn der Coeffizient U der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$U\left(\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2\right)+X\frac{d^2z}{dx^2}+2V\frac{d^2z}{dxdy}+Y\frac{d^2z}{dy^2}=Z$$

verschwindet, so ist, wie man oben gesehen hat, durch die beiden Grössen α und β des ersten Integrals $\beta=\varphi(\alpha)$ nur eine einzige Funktion von z_y und z_x gegeben, da dann die Verschiedenheit der beiden Grössen α und β immer nur in dem Vorkommen der drei übrigen Veränderlichen $z\,y\,x$ ihren Grund hat. Wenn aber U nicht verschwindet, so sind die beiden Grössen α und β des ersten Integrals $\beta=\varphi(\alpha)$ jedesmal durch verschiedene Funktionen von z_y und z_x ausgedrückt. Man hat es diesem Umstande zu verdanken, dass für den zuletzt erwähnten Fall, wo U nicht verschwindet, aus den beiden ersten Integralformen

1. $$\beta=\varphi(\alpha) \quad \text{und} \quad \delta=\psi(\gamma)$$

der vorliegenden partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung, deren zweites Integral jedesmal durch die so eben angedeutete Rechnung dargestellt wird.

Diese Rechnung gestattet aber ganz bemerkenswerthe Vereinfachungen. Gebraucht man nämlich anstatt des ersten Integrals $\beta=\varphi(\alpha)$ die einfachere Gleichung $\beta=\varphi(a)$, wo a eine willkührliche Beständige ist, um aus den beiden Gleichungen

2. $$\beta=\varphi(a) \quad \text{und} \quad \delta=\psi(\gamma)$$

die Differentialquotienten z_y und z_x als Funktionen von $z\,y\,x$ darzustellen, so ist einleuchtend, dass die Integration der vollständigen Differentialgleichung

$$dz=z_y dy+z_x dx$$

auf eine Integralform $f(z\,y\,x\,a)=0$ führt, welche auch durch die Elimination von z_y und z_x aus den drei Gleichungen

3. $$\alpha=a, \quad \beta=\varphi(a) \quad \text{und} \quad \delta=\psi(\gamma)$$

erzielt wird. Durch die Differentiation von $f(z\,y\,x\,a)=0$ erhält man wieder die Gleichungen 2., welche dann aber in der Form

$$4.\qquad \frac{df}{dz}z_y+\frac{df}{dy}=0 \text{ und } \frac{df}{dz}z_x+\frac{df}{dx}=0$$

sich zeigen. Setzt man in der Gleichung $f(z\,y\,x\,a)=0$ an die Stelle von a die Veränderliche α ein, so ergeben sich durch die Differentiation die beiden Gleichungen:

5.

$$\frac{df}{dz}z_y+\frac{df}{dy}+\frac{df}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dz_y}\,\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{d\alpha}{dz_x}\,\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d\alpha}{dz}z_y+\frac{d\alpha}{dy}\right)=0,$$

$$\frac{df}{dz}z_x+\frac{df}{dx}+\frac{df}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dz_y}\,\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d\alpha}{dz_x}\,\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d\alpha}{dz}z_x+\frac{d\alpha}{dx}\right)=0.$$

Da nun aber die Gleichungen 4., nachdem man an die Stelle von a die Veränderliche α eingesetzt hat, mit den beiden ersten Integralformen 1. gleichbedeutend sind, so hat man anstatt der beiden Gleichungen 5. die einzige $\frac{df}{d\alpha}=0$, worin die Differentialquotienten der zweiten Ordnung nicht mehr vorkommen, und welche desshalb nichts anderes sein kann, als jene dritte partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung, welche in Verbindung mit den beiden ersten Integralformen 1. durch die Elimination von z_y und z_x das zweite Integral liefert. Die Gleichung $f(z\,y\,x\,\alpha)=0$ ist übrigens durch die Elimination von z_x aus den Gleichungen 1. abgeleitet, nachdem dort die Grösse α an die Stelle des andern Differentialquotienten z_y eingeführt worden. Demnach ergiebt sich denn das zweite Integral auch durch die Elimination von α aus den beiden Gleichungen:

$$f(z\,y\,x\,\alpha)=0 \text{ und } \frac{df}{d\alpha}=0.$$

7. Es sei

$$\frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2=0.$$

Man hat die beiden Gleichungen

$$\text{(a)}\quad \frac{d\tau}{dz}z_y+\frac{d\tau}{dy}=0 \quad\text{und}\quad \text{(b)}\quad \frac{d\tau}{dz}z_x+\frac{d\tau}{dx}=0,$$

und man genügt denselben durch jede Funktion τ, worin nur z_y und z_x vorkommen. Man kann desshalb $\alpha=z_y$ und $\beta=z_x$ setzen. Man genügt aber auch durch $\gamma=z-yz_y-xz_x$. Es bestehen demnach die beiden ersten Integrale:

$$z_x = \varphi(z_y) \quad \text{und} \quad z = yz_y + xz_x + \psi(z_y).$$

Man setze nun $z_y = \alpha$ und eliminire z_x. Man erhält so das zweite Integral durch die beiden Gleichungen:

$$z = y\alpha + x\varphi(\alpha) + \psi(\alpha),$$
$$0 = y + x\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha).$$

8. Es sei

$$\frac{x+y}{a}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2\right) - z_y\frac{d^2z}{dx^2} + (z_x+z_y)\frac{d^2z}{dxdy} - z_x\frac{d^2z}{dy^2} = 0.$$

Man hat hier $V \pm \sqrt{V^2 - XY - UZ} = \frac{1}{2}(z_x+z_y) \pm \frac{1}{2}(z_x-z_y)$. Wenn man das untere Vorzeichen gebraucht, so entstehen die beiden Gleichungen:

$$\text{(a)} \qquad \frac{x+y}{a}\left(\frac{d\tau}{dz}z_y + \frac{d\tau}{dy}\right) + z_y\left(\frac{d\tau}{dz_y} + \frac{d\tau}{dz_x}\right) = 0,$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{x+y}{a}\left(\frac{d\tau}{dz}z_x + \frac{d\tau}{dx}\right) + z_x\left(\frac{d\tau}{dz_y} + \frac{d\tau}{dz_x}\right) = 0.$$

Durch die Elimination von $\frac{d\tau}{dz}$ entsteht die einfachere:

$$z_x\frac{d\tau}{dy} - z_y\frac{d\tau}{dx} = 0,$$

der man genügt, wenn τ irgend eine Funktion von $\alpha_1 = yz_y + xz_x$, z, z_x und z_y ist. Die Gleichungen (a) und (b) zeigen sich dann aber in der Form:

$$\frac{x+y}{a}\left(\frac{d\tau}{dz} + (a+1)\frac{d\tau}{d\alpha_1}\right) + \frac{d\tau}{dz_y} + \frac{d\tau}{dz_x} = 0.$$

Man findet die beiden Funktionen $\alpha = (a+1)z - \alpha_1$ und $\beta = z_x - z_y$, und das erste Integral zeigt sich demnach in der Form:

$$\varphi((a+1)z - yz_y - xz_x,\ z_x - z_y) = 0.$$

Wenn man das obere Zeichen vor der Wurzelgrösse

$$\sqrt{V^2 - XY - UZ}$$

gebraucht, so hat man die Gleichungen:

$$\text{(a)} \qquad \frac{x+y}{a}\left(\frac{d\tau}{dz}z_y + \frac{d\tau}{dy}\right) + z_y\frac{d\tau}{dz_y} + z_x\frac{d\tau}{dz_x} = 0,$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{x+y}{a}\left(\frac{d\tau}{dz}z_x + \frac{d\tau}{dx}\right) + z_y\frac{d\tau}{dz_y} + z_x\frac{d\tau}{dz_x} = 0.$$

Durch die Subtraktion erhält man die einfachere:

$$(z_x - z_y)\frac{d\tau}{dz} + \frac{d\tau}{dx} - \frac{d\tau}{dy} = 0.$$

Man genügt durch eine beliebige Funktion von $\alpha_1 = x + y$, z_x und z_y. Die Gleichungen (a) und (b) gehen dadurch über in:

$$\frac{\alpha_1}{a}\frac{d\tau}{d\alpha_1} + z_y\frac{d\tau}{dz_y} + z_x\frac{d\tau}{dz_x} = 0.$$

Daraus folgt aber $\alpha = \frac{\alpha_1{}^a}{z_y}$ und $\beta = \frac{z_x}{z_y}$, und das erste Integral in der Form:

$$\psi\left(\frac{(x+y)^a}{z_y},\ \frac{z_x}{z_y}\right) = 0.$$

Man setze nun $z_x - z_y = \alpha$, und die beiden ersten Integrale gehen, wenn z_x eliminirt wird, über in:

$$\varphi((a+1)z - \alpha x - (x+y)z_y,\ \alpha) = 0,\quad \psi\left(\frac{(x+y)^a}{z_y},\ \frac{\alpha}{z_y}\right) = 0.$$

Man schreibe dieselben einfacher:

$$\frac{a+1}{\alpha}z = x + \frac{x+y}{\alpha}z_y + \varphi(\alpha),\quad z_y = \alpha . \psi\left(\frac{(x+y)^a}{\alpha}\right).$$

Endlich vertausche man noch α gegen $\frac{a+1}{\alpha}$, und die Elimination von z_y führt auf die Gleichung:

$$\alpha z = x + (x+y)\psi(\alpha(x+y)^a) + \varphi(\alpha).$$

Um das zweite Integral zu erhalten, wird man α eliminiren mittels der Gleichung $z = (x+y)^{a+1} . \psi'(\alpha(x+y)^a) + \varphi'(\alpha)$.

9. Es sei noch

$$\frac{dz^2}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 - ((1+z_y{}^2)\frac{d^2z}{dx^2} - 2z_xz_y\frac{d^2z}{dxdy} + (1+z_x{}^2)\frac{dz^2}{dy^2}) \times \frac{\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}}{a} + \frac{(1+z_x{}^2+z_y{}^2)^2}{a^2} = 0.$$

Man hat hier $V^2 - XY - UZ = 0$ und die beiden Gleichungen:

(a) $$\frac{d\tau}{dz}z_y + \frac{d\tau}{dy} + ((1+z_y{}^2)\frac{d\tau}{dz_y} + z_xz_y\frac{d\tau}{dz_x})\frac{\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}}{a} = 0,$$

(b) $$\frac{d\tau}{dz}z_x + \frac{d\tau}{dx} + ((1+z_x{}^2)\frac{d\tau}{dz_x} + z_xz_y\frac{d\tau}{dz_y})\frac{\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}}{a} = 0.$$

Man multiplizire die erstere mit z_y, die andere Gleichung mit z_x, und man erhält durch die Addition:

$$(z_x^2+z_y^2)\frac{d\tau}{dz}+z_x\frac{d\tau}{dx}+z_y\frac{d\tau}{dy}+\left(z_x\frac{d\tau}{dz_x}+z_y\frac{d\tau}{dz_y}\right)\frac{(1+z_x^2+z_y^2)^{\frac{3}{2}}}{a}=0.$$

Daraus folgt $\alpha_1=\frac{z_y}{z_x}$, und die Gleichung geht, wenn z_y eliminirt wird, über in:

$$(1+\alpha_1^2)z_x\frac{d\tau}{dz}+\frac{d\tau}{dx}+\alpha_1\frac{d\tau}{dy}+\frac{(1+(1+\alpha_1^2)z_x^2)^{\frac{3}{2}}}{a}\frac{d\tau}{dz_x}=0.$$

Man genügt derselben durch die drei einfacheren Gleichungen:

$$dz-\frac{a(1+\alpha_1^2)z_x dz_x}{(1+(1+\alpha_1^2)z_x^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

$$dy-\frac{a\alpha_1 dz_x}{(1+(1+\alpha_1^2)z_x^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

$$dx-\frac{a dz_x}{(1+(1+\alpha_1^2)z_x^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Die Integration liefert die drei Funktionen:

$$z+\frac{a}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}=\beta_1,\quad y-\frac{az_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}=\gamma_1,$$

$$x-\frac{az_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}=\delta_1.$$

Man genügt dadurch aber auch den beiden Gleichungen (a) und (b), und man hat somit die beiden ersten Integralformen:

$$y-\frac{az_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}=\varphi\left(z+\frac{a}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right),$$

$$x-\frac{az_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}=\psi\left(z+\frac{a}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right).$$

Man setze nun $z+\frac{a}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}=\alpha$. Die Elimination von z_y und z_x führt dann auf die Gleichung:

$$(z-\alpha)^2+(y-\varphi(\alpha))^2+(x-\psi(\alpha))^2=a^2.$$

Um das zweite Integral zu erhalten, wird man α eliminiren mit Hilfe der Gleichung

$$z-\alpha+(y-\varphi(\alpha))\varphi'(\alpha)+(x-\psi(\alpha))\psi'(\alpha)=0.$$

Das obige Verfahren, wodurch man das erste Integral einer partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit drei Veränderlichen darstellt, lässt sich ohne Weiteres auf partielle Differentialgleichungen mit mehr als drei Veränderlichen übertragen. Wenn z. B. die vier Veränderlichen z, y, x und w vorkommen, schreibt man das erste Integral in der Form $\gamma=\varphi(\alpha\beta)$, wo α, β und γ bestimmte Funktionen dieser Veränderlichen und der drei Differentialquotienten erster Ordnung z_y, z_x und z_w bezeichnen. Denn wenn man die Form $\gamma=\varphi(\alpha\beta)$ nach einander in Bezug auf z und y, z und x, z und w differentiirt, so entstehen drei Differentialgleichungen, welche durch die Elimination der beiden willkührlichen Funktionen $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ und $\frac{d\varphi}{d\beta}$ eine bestimmte partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung herbeiführen.

Um nun das erste Integral für die Gleichung

$$W\frac{d^2z}{dw^2}+2S\frac{d^2z}{dwdx}+2T\frac{d^2z}{dwdy}+X\frac{d^2z}{dx^2}+2V\frac{d^2z}{dxdy}+Y\frac{d^2z}{dy^2}=Z$$

zu bestimmen, worin $W\,S\ldots.Z$ Funktionen von $z_y\,z_x\,z_w\,z\,y\,x\,w$ sind, schreibe man dasselbe vorerst wieder abkürzend in der Form $\tau=0$. Die drei Differentialgleichungen, welche durch die Elimination des Willkührlichen die vorliegende partielle Differentialgleichung herbeiführen, zeigen sich dann in der Form:

$$\frac{d\tau}{dz_y}\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{d\tau}{dz_x}\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d\tau}{dz_w}\frac{d^2z}{dwdy}+\frac{d\tau}{dz}z_y+\frac{d\tau}{dy}=0,$$

$$\frac{d\tau}{dz_y}\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d\tau}{dz_x}\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d\tau}{dz_w}\frac{d^2z}{dwdx}+\frac{d\tau}{dz}z_x+\frac{d\tau}{dx}=0,$$

$$\frac{d\tau}{dz_y}\frac{d^2z}{dwdy}+\frac{d\tau}{dz_x}\frac{d^2z}{dwdx}+\frac{d\tau}{dz_w}\frac{dz}{dw^2}+\frac{d\tau}{dz}z_w+\frac{d\tau}{dw}=0.$$

Wenn man damit von den sechs Differentialquotienten der zweiten Ordnung irgend drei aus der vorliegenden partiellen Differentialgleichung eliminirt, so gelangt man zu einer identischen Gleichung. Durch die Elimination von $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dw^2}$ entsteht:

$$\left(W\left(\frac{d\tau}{dz_x}\right)^2 - 2S\frac{d\tau}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_w} + X\left(\frac{d\tau}{dz_w}\right)^2\right)\frac{d\tau}{dz_y}\frac{d^2z}{dwdx}$$

$$+\left(W\left(\frac{d\tau}{dz_y}\right)^2 - 2T\frac{d\tau}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_w} + Y\left(\frac{d\tau}{dz_w}\right)^2\right)\frac{d\tau}{dz_x}\frac{d^2z}{dwdy}$$

$$+\left(X\left(\frac{d\tau}{dz_y}\right)^2 - 2V\frac{d\tau}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x} + Y\left(\frac{d\tau}{dz_x}\right)^2\right)\frac{d\tau}{dz_w}\frac{d^2z}{dxdy}$$

$$+ W\frac{d\tau}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dz}z_w + \frac{d\tau}{dw}\right) + X\frac{d\tau}{dz_w}\frac{d\tau}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dz}z_x + \frac{d\tau}{dx}\right)$$

$$+ Y\frac{d\tau}{dz_w}\frac{d\tau}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dz}z_w + \frac{d\tau}{dw}\right) + Z\frac{d\tau}{dz_w}\frac{d\tau}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y} = 0.$$

Doch kann man dieser Gleichung nur dadurch genügen, dass man die Faktoren von $\frac{d^2z}{dwdx}$, $\frac{d^2z}{dwdy}$ und $\frac{d^2z}{dxdy}$ und auch den Rest der Gleichung einzeln genommen verschwinden lässt. Man hat demnach zur Bestimmung von τ die vier Gleichungen:

1. $$W\left(\frac{d\tau}{dz_x}\right)^2 - 2S\frac{d\tau}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_w} + X\left(\frac{d\tau}{dz_w}\right)^2 = 0,$$

2. $$W\left(\frac{d\tau}{dz_y}\right)^2 - 2T\frac{d\tau}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_w} + Y\left(\frac{d\tau}{dz_w}\right)^2 = 0,$$

3. $$X\left(\frac{d\tau}{dz_x}\right)^2 - 2V\frac{d\tau}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x} + Y\left(\frac{d\tau}{dz_x}\right)^2 = 0,$$

4. $$W\frac{d\tau}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dz}z_w + \frac{d\tau}{dw}\right) + X\frac{d\tau}{dz_w}\frac{d\tau}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dz}z_x + \frac{d\tau}{dx}\right)$$
$$+ Y\frac{d\tau}{dz_w}\frac{d\tau}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dz}z_y + \frac{d\tau}{dy}\right) + Z\frac{d\tau}{dz_w}\frac{d\tau}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y} = 0.$$

Daraus ergeben sich aber vier andere Gleichungen, welche in Bezug auf die Differentialquotienten von τ vom ersten Grade sind. Denn aus den Gleichungen 1., 2. und 3. bestimmen sich zunächst die beiden Quotienten $\frac{d\tau}{dz_x} : \frac{d\tau}{dz_w} = s$ und $\frac{d\tau}{dz_y} : \frac{d\tau}{dz_w} = t$. Man hat:

1. $$Ws^2 - 2Ss + X = 0,$$

2. $$Wt^2 - 2Tt + Y = 0,$$

3. $$Xt^2 - 2Vts + Ys^2 = 0.$$

Nachdem man einen von den beiden Quotienten s und t aus den quadratischen Gleichungen 1. und 2. bestimmt hat, hat man zur Berechnung des andern eine Gleichung des ersten Grades. Dann multiplizirt man die Gleichung 1. mit t^2, die Gleichung 2. mit s^2, und zieht dann von deren Summe die Gleichung 3. ab, so entsteht:

$$3'. \qquad Wts - St - Ts + V = 0.$$

Damit die so berechneten Werthe $Ws = S_1$ und $Wt = T_1$ die Gleichungen 1., 2., 3. gleichzeitig erfüllen, muss zwischen den Coeffizienten dieser Gleichungen eine Bedingungsgleichung bestehen. Man schreibe dieselben in der Form:

$$1. \qquad (Ws - S)^2 = S^2 - WX,$$

$$2. \qquad (Wt - T)^2 = T^2 - WY,$$

$$3'. \qquad (Ws - S)(Wt - T) = ST - WV.$$

Daraus folgt dann auf der Stelle die Bedingungsgleichung:

$$(S^2 - WX)(T^2 - WY) = (ST - WV)^2,$$

oder auch die mehr symmetrische:

$$WV^2 + XT^2 + YS^2 = WXY + 2STV.$$

Wenn diese Bedingungsgleichung erfüllt ist, hat man zur Bestimmung von τ die drei Gleichungen:

$$\text{(a)} \qquad W\frac{d\tau}{dz_x} - S_1\frac{d\tau}{dz_w} = 0,$$

$$\text{(b)} \qquad W\frac{d\tau}{dz_y} - T_1\frac{d\tau}{dz_w} = 0,$$

(c)

$$W\left(\frac{d\tau}{dz}z_w + \frac{d\tau}{dw}\right) + S_2\left(\frac{d\tau}{dz}z_x + \frac{d\tau}{dx}\right) + T_2\left(\frac{d\tau}{dz}z_y + \frac{d\tau}{dy}\right) + Z\frac{d\tau}{dz_w} = 0,$$

worin abkürzend $\frac{WX}{S_1} = S_2$ und $\frac{WY}{T_1} = T_2$ gesetzt worden ist. Wenn es drei verschiedene Funktionen α, β und γ giebt, von denen jede gleichzeitig diese drei partiellen Differentialgleichungen an der Stelle von τ erfüllt, so besteht auch ein erstes Integral, und dieses hat dann die Form $\gamma = \varphi(\alpha\,\beta)$.

10. Es sei nun

$$w^2\frac{d^2z}{dw^2}+2wx\frac{d^2z}{dwdx}+2wy\frac{d^2z}{dwdy}+x^2\frac{d^2z}{dx^2}+2xy\frac{d^2z}{dxdy}+y^2\frac{d^2z}{dy^2}=0.$$

Man hat hier die Gleichungen:

(a) $$wdz_w+xdz_x=0,$$

(b) $$wdz_w+ydz_y=0.$$

Die erstere giebt $wz_w+xz_x=\alpha_1$; die andere aber geht, wenn man z_w mittels α_1 eliminirt, über in $d\alpha_1+ydz_y=0$. Daraus folgt aber $\alpha_1+yz_y=wz_w+xz_x+yz_y=\alpha_2$; und das erste Integral ist demnach eine Funktion von α_2, z, y, x und w. Nun hat man weiter die Gleichung:

(c) $$(wz_w+xz_x+yz_y)\frac{d\tau}{dz}+w\frac{d\tau}{dw}+x\frac{d\tau}{dx}+y\frac{d\tau}{dy}=0.$$

Man eliminire einen der Differentialquotienten mittels α_2, und es ist:

$$\alpha_2\frac{d\tau}{dz}+w\frac{d\tau}{dw}+x\frac{d\tau}{dx}+y\frac{d\tau}{dy}=0.$$

Man genügt durch $\alpha=\frac{x}{w}$, $\beta=\frac{y}{w}$, $\gamma=\alpha_2$; und das erste Integral zeigt sich desshalb in der Form:

$$wz_w+xz_x+yz_y=\varphi\left(\frac{x}{w}\,\frac{y}{w}\right).$$

Wenn die Anzahl der Veränderlichen zunimmt, so mehren sich rasch auch diejenigen partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades, welche alle durch das erste Integral der partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung befriedigt werden. Wenn $n+1$ Veränderliche vorkommen, so schreibt sich das erste Integral in der Form: $\varphi(\alpha\,\beta\,\gamma\ldots.)=0$, was eine willkührliche Funktion von n bestimmten veränderlichen Grössen ist. Durch die Differentiation ergeben sich daraus n verschiedene Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, mit deren Hilfe man die n Differentialquotienten $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dw^2}$, ... eliminiren kann. Nach vollzogener Elimination bleiben noch $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Differentialquotienten der zweiten Ordnung in der partiellen Differentialgleichung zurück. Diese fällt desshalb in $\frac{n(n-1)}{1.2}+1$

verschiedene Gleichungen aus einander, welche wieder alle als partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades dargestellt werden können. Jede von den n verschiedenen Funktionen aber, welche in dem allgemeinen Integral $\varphi(\alpha\beta\gamma\ldots.)=0$ Platz nehmen, muss allen diesen Differentialgleichungen Genüge leisten.

Es hat nun auch keine Schwierigkeit, die partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung zu bestimmen, von der man weiss, dass sie mehreren partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung gleichzeitig Genüge leistet. Es kommt dann nur darauf an, die allgemeinste Funktion zwischen den vorkommenden Veränderlichen und den Differentialquotienten der ersten Ordnung anzugeben, welche gleichzeitig alle diejenigen partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades erfüllt, welche jede der vorliegenden partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung nach den jetzt bekannten Regeln für sich zur Folge hat.

Hat man z. B. die beiden Gleichungen:

$$V\frac{d^2z}{dxdy}+Y\frac{d^2z}{dy^2}=Z$$

und

$$X_1\frac{d^2z}{dx^2}+V_1\frac{d^2z}{dxdy}=Z_1,$$

wo $V\,Y\ldots.Z_1$ bestimmte Funktionen der drei Veränderlichen $z\,y\,x$ und der Differentialquotienten erster Ordnung z_x und z_y sind, so kommt es auf die Bestimmung derjenigen Funktion τ an, welche gleichzeitig den folgenden vier Gleichungen Genüge leistet:

$$\text{(a}'\text{)}\qquad V\frac{d\tau}{dz_y}-Y\frac{d\tau}{dz_x}=0,$$

$$\text{(b}'\text{)}\qquad Y\left(\frac{d\tau}{dz}z_y+\frac{d\tau}{dy}\right)+Z\frac{d\tau}{dz_y}=0,$$

$$\text{(a)}\qquad X_1\frac{d\tau}{dz_y}-V_1\frac{d\tau}{dz_x}=0,$$

$$\text{(b)}\qquad X_1\left(\frac{d\tau}{dz}z_x+\frac{d\tau}{dx}\right)+Z_1\frac{d\tau}{dz_x}=0.$$

Die Gleichungen (a) und (a′) verlangen die Bedingung $VV_1=X_1Y$, und sind, wenn diese Bedingung erfüllt ist, identisch.

Man darf nicht glauben, dass die partielle Differentialgleichung

der zweiten Ordnung mit drei Veränderlichen immer nur den vorhin betrachteten Formen angehöre, wenn sie ein erstes Integral besitzt. Man hat dort das erste Integral jedesmal durch die Gleichung $\beta = \varphi(\alpha)$ ausgedrückt, worin α und β bestimmte Funktionen der drei Veränderlichen $z\,y\,x$ und der Differentialquotienten erster Ordnung z_y und z_x sind. Es lässt sich aber eine viel allgemeinere partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung anschreiben, woraus durch die Elimination einer willkührlichen Funktion eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung hervorgeht. Nimmt man nämlich die Gleichung:

$$\beta = \varphi(\alpha),$$

wo nun β eine bestimmte Funktion von z_y, z_x, z, y, x und α ist, α aber eine veränderliche Grösse, zu deren Bestimmung die Gleichung:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \varphi'(\alpha)$$

gegeben ist, so entstehen durch die Differentiation die beiden Gleichungen:

$$1. \qquad \frac{d\beta}{dz_y}\,\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d\beta}{dz_x}\,\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{d\beta}{dz}\,z_y + \frac{d\beta}{dy} = 0,$$

$$2. \qquad \frac{d\beta}{dz_y}\,\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{d\beta}{dz_x}\,\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d\beta}{dz}\,z_x + \frac{d\beta}{dx} = 0,$$

und die Elimination von α liefert eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung, worin nichts Willkührliches mehr vorkommt, welche aber nicht immer den schon oben angegebenen Formen angehört, sondern eine viel allgemeinere Funktion der Differentialquotienten der zweiten Ordnung darstellt.

Wenn eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung $\psi = 0$ integrirt werden soll, welche auf die soeben angegebene Weise entstanden ist, so wird man zunächst jene beiden Gleichungen 1. und 2. herstellen, deren gemeinsames Integral die Gleichung $\beta = \varphi(\alpha)$ ist. Es versteht sich, dass man, nachdem die eine von diesen beiden Gleichungen aufgefunden worden, mit Hilfe der vorliegenden Differentialgleichung $\psi = 0$ dann leicht auch die andere erhält. Denn wenn z. B. die Gleichung 1. bekannt ist, so hat man den Differentialquotienten $\frac{d^2z}{dy^2}$ daraus zu entwickeln, und in die Gleichung $\psi = 0$ einzusetzen, um die Gleichung 2. darzustellen. Um nun aber die eine dieser beiden Gleichungen, oder auch irgend eine andere daraus abgeleitete Glei-

chung zu erhalten, schreibe man dieselbe abkürzend in der Form $\tau=0$. Differentiirt man die beiden Gleichungen $\tau=0$ und $\psi=0$ nach x und dann auch nach y, so ergeben sich vier Differentialgleichungen der dritten Ordnung. Man muss aber beachten, dass dadurch nur drei wesentlich verschiedene Gleichungen gegeben sind, da jene vier Gleichungen alle durch zweimaliges Differentiiren aus einer einzigen Differentialgleichung der ersten Ordnung entspringen. Man eliminire irgend drei von den vier Differentialquotienten der dritten Ordnung $\frac{d^3z}{dy^3}$, $\frac{d^3z}{dxdy^2}$, $\frac{d^3z}{dx^2dy}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, und man erhält dann jedenfalls eine identische Gleichung, so dass also der Faktor des zurückgebliebenen Differentialquotienten der dritten Ordnung und auch der Rest dieser Gleichung für sich verschwindet. Auf diesem Wege gelangt man zu zwei verschiedenen partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades, woraus diese Unbekannte τ als Funktion der drei Veränderlichen z, y, x und der Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung hervorgeht.

Um diese Rechnung möglichst zu vereinfachen, nehme man an, dass die Gleichung $\tau=0$ von den Differentialquotienten der zweiten Ordnung nur die beiden $\frac{d^2z}{dy^2}$ und $\frac{d^2z}{dxdy}$ einschliesse, so dass also durch die Differentiation von $\tau=0$ die beiden Gleichungen:

$$\frac{d\tau}{dz_{yy}}\frac{d^3z}{dy^3}+\frac{d\tau}{dz_{xy}}\frac{d^3z}{dxdy^2}+\left(\frac{d\tau}{dy}\right)=0,$$

$$\frac{d\tau}{dz_{yy}}\frac{d^3z}{dxdy^2}+\frac{d\tau}{dz_{xy}}\frac{d^3z}{dx^2dy}+\left(\frac{d\tau}{dx}\right)=0$$

entstehen, worin abkürzend $\frac{d^2z}{dy^2}=z_{yy}$ und $\frac{d^2z}{dxdy}=z_{xy}$ gesetzt worden ist, und ausserdem die Abkürzungen:

$$\frac{d\tau}{dz_y}\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{d\tau}{dz_x}\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d\tau}{dz}z_y+\frac{d\tau}{dy}=\left(\frac{d\tau}{dy}\right),$$

$$\frac{d\tau}{dz_y}\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d\tau}{dz_x}\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{d\tau}{dz}z_x+\frac{d\tau}{dx}=\left(\frac{d\tau}{dx}\right)$$

aufgenommen sind. Um von den vier Differentialquotienten der dritten Ordnung drei zu eliminiren, bedarf man hier nur noch der Gleichung:

$$\frac{d\psi}{dz_{xx}}\frac{d^3z}{dx^2dy}+\frac{d\psi}{dz_{xy}}\frac{d^3z}{dxdy^2}+\frac{d\psi}{dz_{yy}}\frac{d^3z}{dy^3}+\left(\frac{d\psi}{dy}\right)=0,$$

da in den drei nun vorliegenden Differentialgleichungen der Differentialquotient $\frac{d^3z}{dx^3}$ nicht vorkommt. Wenn man nun die beiden Differentialquotienten $\frac{d^3z}{dy^3}$ und $\frac{d^3z}{dx^2dy}$ eliminirt, und zugleich die mit dem Differentialquotienten $\frac{d^3z}{dxdy^2}$ verbundenen Glieder zusammenfasst, so entsteht die Gleichung:

$$\left(\frac{d\psi}{dz_{xx}}\left(\frac{d\tau}{dz_{yy}}\right)^2 - \frac{d\psi}{dz_{xy}}\frac{d\tau}{dz_{yy}}\frac{d\tau}{dz_{xy}} + \frac{d\psi}{dz_{yy}}\left(\frac{d\tau}{dz_{xy}}\right)^2\right)\frac{d^3z}{dxdy^2}$$
$$+\frac{d\psi}{dz_{xx}}\frac{d\tau}{dz_{yy}}\left(\frac{d\tau}{dx}\right) + \frac{d\psi}{dz_{yy}}\frac{d\tau}{dz_{xy}}\left(\frac{d\tau}{dy}\right) - \left(\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_{xy}}\frac{d\tau}{dz_{yy}} = 0.$$

Diese zerfällt aber in die beiden folgenden:

$$\frac{d\psi}{dz_{xx}}\left(\frac{d\tau}{dz_{yy}}\right)^2 - \frac{d\psi}{dz_{xy}}\frac{d\tau}{dz_{yy}}\frac{d\tau}{dz_{xy}} + \frac{d\psi}{dz_{yy}}\left(\frac{d\tau}{dz_{xy}}\right)^2 = 0,$$
$$\frac{d\psi}{dz_{xx}}\frac{d\tau}{dz_{yy}}\left(\frac{d\tau}{dx}\right) + \frac{d\psi}{dz_{yy}}\frac{d\tau}{dz_{xy}}\left(\frac{d\tau}{dy}\right) - \left(\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_{xy}}\frac{d\tau}{dz_{yy}} = 0,$$

welche leicht in zwei andere umgewandelt werden, worin die Differentialquotienten der unbekannten Funktion τ nur auf dem ersten Grade vorkommen. Denn die erstere schreibt sich auch in der Form:

(a)

$$\frac{d\psi}{dz_{xx}}\cdot\frac{d\tau}{dz_{yy}} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{dz_{xy}} + \sqrt{\left(\frac{d\psi}{dz_{xy}}\right)^2 - 4\frac{d\psi}{dz_{xx}}\frac{d\psi}{dz_{yy}}}\right)\frac{d\tau}{dz_{xy}} = 0,$$

und die andere Gleichung geht, wenn $\frac{d\tau}{dz_{xy}}$ eliminirt wird, über in:

(b)

$$\frac{d\psi}{dz_{xx}}\left(\frac{d\tau}{dx}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{dz_{xy}} - \sqrt{\left(\frac{d\psi}{dz_{xy}}\right)^2 - 4\frac{d\psi}{dz_{xx}}\frac{d\psi}{dz_{yy}}}\right)\left(\frac{d\tau}{dy}\right) - \left(\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_{xy}}$$
$$= 0.$$

Wenn man nun z_{xx} mittels $\psi = 0$ eliminirt, so hat man in der That zwei partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades, woraus die Unbekannte τ als Funktion der beiden Differentialquotienten der zweiten Ordnung hervorgeht. Wenn die partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung $\psi = 0$

ein erstes Integral besitzt, so wird sich eine Gleichung $\alpha = a$ finden, worin α eine Funktion der Veränderlichen $z\, y\, x$ und der Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung, a aber eine willkührliche Beständige ist, und welche die beiden Differentialgleichungen (a) und (b) an der Stelle von τ gleichzeitig befriedigt. Mit Hilfe der Gleichungen $\alpha = a$ und $\psi = 0$ stelle man jene beiden Differentialgleichungen 1. und 2. her. Diese besitzen ein gemeinsames erstes Integral. Durch die Integration gelangt man zu einer partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung $\beta = b$, wo b eine zweite willkührliche Beständige bezeichnet. Die erstere a vertausche man gegen die Veränderliche α, die letztere b aber gegen die willkührliche Funktion $\varphi(\alpha)$; und das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung $\psi = 0$ ist dann ausgedrückt durch die beiden Gleichungen:

$$\beta = \varphi(\alpha) \quad \text{und} \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \varphi'(\alpha).$$

VII. Integration der partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung und der zweiten Stufe.

In dem vorigen Abschnitte ist gezeigt worden, dass eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung jedesmal ein erstes Integral besitzt, wenn das zweite Integral eine solche Beschaffenheit hat, dass schon nach den ersten Differentiationen die eine der beiden willkührlichen Funktionen sich eliminiren lässt, so dass also eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung hergestellt werden kann, worin nur noch die eine von den beiden willkührlichen Funktionen Platz nimmt. Diese partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung ist dann zugleich das erste Integral. Wenn nun aber das zweite Integral von der Art ist, dass man auf keine Weise eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung daraus ableiten kann, worin nur noch die eine der beiden willkührlichen Funktionen vorkommt, so versteht es sich, dass die zugehörige partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung kein erstes Integral besitzt. Denn es ist unmöglich, aus einer partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung, welche zwei verschiedene willkührliche Funktionen einschliesst, eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung abzuleiten, worin nichts Willkührliches mehr vorkommt. Wenn die drei Veränderlichen $z\, y\, x$ vorkommen, so ist in dem zuletzt genannten Falle die Elimination der beiden willkührlichen Funktionen, welche einen nothwendigen Bestandtheil des ersten Integrals $\tau = 0$ aus-

machen, nur dadurch zu bewerkstelligen, dass man gleichzeitig die fünf Differentialgleichungen:

$$\left(\frac{d\tau}{dy}\right)=0,\quad \left(\frac{d\tau}{dx}\right)=0,\quad \left(\frac{d^2\tau}{dy^2}\right)=0,\quad \left(\frac{d^2\tau}{dxdy}\right)=0,\quad \left(\frac{d^2\tau}{dy^2}\right)=0$$

verwendet. Die partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung soll hier, wenn sie kein erstes Integral besitzt, eine der zweiten Stufe heissen.

Die Integration einer partiellen Differentialgleichung der zweiten Stufe hat grössere Schwierigkeiten; und diese Schwierigkeiten haben gerade darin ihren Grund, dass man genöthigt ist, sogleich das zweite Integral $\tau = 0$ aufzusuchen. Beschränkt man sich zunächst auf die partielle Differentialgleichung mit drei Veränderlichen, so hat man als zweites Integral eine endliche Gleichung anzugeben, worin zwei willkührliche Funktionen $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\beta)$ vorkommen, und α und β selbst von den Veränderlichen abhängig sind. Es ist aber unmöglich, das Vorkommen dieser beiden willkührlichen Funktionen in der Weise festzustellen, dass das zweite Integral allgemein für jede partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung Geltung erhielte. Jede Form, welche man auch dem zweiten Integral in Bezug auf das Vorkommen der beiden willkührlichen Funktionen geben mag, gilt immer nur für eine bestimmte Klasse von partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Für die lineare Differentialgleichung

$$X\frac{d^2z}{dx^2}+2V\frac{d^2z}{dxdy}+Y\frac{d^2z}{dy^2}+X_1\frac{dz}{dx}+Y_1\frac{dz}{dy}=Z,$$

worin $X\,V \ldots . Z$ bestimmte Funktionen der beiden unabhängigen Veränderlichen sind, hat man das zweite Integral in der Form:

$$z=\int_{a_1}^{\alpha_1}\beta_1\varphi(\alpha)d\alpha+\int_{a_2}^{\alpha_2}\beta_2\psi(\alpha)d\alpha,$$

worin β_1 und β_2 bestimmte Funktionen von y und x und einer willkührlichen Beständigen α sind, welche beide der vorliegenden Differentialgleichung an der Stelle von z Genüge leisten, wo ferner α_1 und α_2 bestimmte Funktionen der beiden Veränderlichen y und x sind, während die andern Integrationsgrenzen a_1 und a_2 von den Veränderlichen unabhängig gedacht werden.

Es scheint aber nicht, dass man mit ähnlichem Erfolge noch andere Klassen partieller Differentialgleichungen der zweiten Ordnung bezeichnen kann, deren zweites Integral in Bezug auf die willkührlichen Funktionen feststeht. Desshalb werden wir uns in

den folgenden Untersuchungen darauf beschränken, das zweite Integral in der allgemeinen Form $\alpha = 0$ vorauszusetzen, wo α eben eine noch unbekannte Funktion der Veränderlichen ist, so dass also das Vorkommen der beiden willkührlichen Funktionen vorerst wenigstens ausser Acht bleibt. Die Bestimmung von α lässt sich dann, wie sich bald zeigen wird, auf die Integration einer anderen nach bestimmten Regeln aus der vorliegenden abzuleitenden partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung zurückführen, so dass also der Erfolg der Rechnung jedesmal davon abhängt, ob es gelingt, die neue partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung durch die schon bekannten Hilfsmittel zu integriren.

Wenn die Werthe der beiden Differentialquotienten erster Ordnung z_y und z_x so gegeben sind, wie sie auch aus dem allgemeinen Integral durch Differentiation abgeleitet werden könnten, so findet man das allgemeine Integral durch die Integration der vollständigen Differentialgleichung:

$$dz = z_y dy + z_x dx.$$

Es soll zunächst gezeigt werden, wie die Bestimmung der Differentialquotienten z_y und z_x, welche der partiellen Differentialgleichung der zweiten Stufe:

$$U\left(\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2\right) + X\frac{d^2z}{dx^2} + 2V\frac{d^2z}{dxdy} + Y\frac{d^2z}{dy^2} = Z$$

entsprechen, wenn $U, X \ldots . Z$ bestimmte Funktionen von $z_y\, z_x\, z\, y\, x$ sind, auf die Integration einer anderen partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung zurückkommt. Dabei wird sich dann auch herausstellen, dass die neue Differentialgleichung oftmals die bisherigen Integrationsmethoden zulässt, während doch die ursprüngliche Differentialgleichung für dieselben unzugänglich ist.

Man bezeichne zwei partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung, welche aus dem allgemeinen Integral $\alpha = 0$ entspringen, durch die Gleichungen $\sigma = 0$ und $\tau = 0$. Durch Differentiiren bildet man daraus:

$$1.\ \frac{d\sigma}{dz_y}\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d\sigma}{dz_x}\frac{d^2z}{dxdy} + \left(\frac{d\sigma}{dy}\right) = 0, \quad 2.\ \frac{d\sigma}{dz_y}\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{d\sigma}{dz_x}\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{d\sigma}{dx}\right) = 0,$$

$$3.\ \frac{d\tau}{dz_y}\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d\tau}{dz_x}\frac{d^2z}{dxdy} + \left(\frac{d\tau}{dy}\right) = 0, \quad 4.\ \frac{d\tau}{dz_y}\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{d\tau}{dz_x}\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{d\tau}{dx}\right) = 0,$$

worin abkürzend $\frac{d\sigma}{dz}z_y + \frac{d\sigma}{dy} = \left(\frac{d\sigma}{dy}\right)$ u. s. w. gesetzt worden. Da die beiden Gleichungen $\sigma = 0$ und $\tau = 0$ auf ein und dieselbe endliche Gleichung $\alpha = 0$ hindeuten, da auch die partielle Differentialgleichung mit diesen einerlei Ursprung hat, so ergeben sich aus den vorliegenden fünf Gleichungen durch die Elimination der drei Differentialquotienten zweiter Ordnung zwei partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung, woraus die Grössen σ und τ als Funktionen von $z_y\, z_x\, z\, y\, x$ hervorgehen. Um diese Elimination auszuführen, bilde man zunächst aus den Gleichungen 1., 2., 3., 4. die folgenden:

$$5. \quad \left(\frac{d\sigma}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x} - \frac{d\sigma}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y}\right)\frac{d^2z}{dy^2} + \left(\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_x} - \frac{d\sigma}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dy}\right) = 0,$$

$$6. \quad \left(\frac{d\sigma}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y} - \frac{d\sigma}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x}\right)\frac{d^2z}{dxdy} + \left(\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_y} - \frac{d\sigma}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dy}\right) = 0,$$

$$7. \quad \left(\frac{d\sigma}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x} - \frac{d\sigma}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y}\right)\frac{d^2z}{dxdy} + \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_x} - \frac{d\sigma}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dx}\right) = 0,$$

$$8. \quad \left(\frac{d\sigma}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y} - \frac{d\sigma}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x}\right)\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_y} - \frac{d\sigma}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dx}\right) = 0.$$

Durch die Elimination von $\frac{d^2z}{dxdy}$ entsteht:

$$(a) \quad \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_x} - \frac{d\sigma}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dx}\right) + \left(\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_y} - \frac{d\sigma}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dy}\right) = 0,$$

und dies ist die eine von den beiden Gleichungen, woraus die Unbekannten σ und τ zu bestimmen sind. Um auch die andere Gleichung zu erhalten, setze man die Werthe der Differentialquotienten zweiter Ordnung aus den Gleichungen 5., 6., 7., 8. in die vorliegende partielle Differentialgleichung ein. Die hierzu erforderliche Rechnung erfährt eine ganz besondere Erleichterung, wenn man den Coeffizienten $2V$ gegen $V_1 + V_2$ vertauscht, wo V_1 und V_2 die Wurzeln V_1 der quadratischen Gleichung:

$$V_1{}^2 - 2VV_1 + XY + UZ = 0$$

bezeichnen, um dann den einen oder den andern der beiden Werthe $\frac{d^2z}{dxdy}$ zu gebrauchen, je nachdem dieser Differentialquotient mit V_1 oder mit V_2 multiplizirt ist. Wenn man dann zugleich bemerkt, dass

$$\left(\frac{d\sigma}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y}-\frac{d\sigma}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2\right)$$

$$=\left(\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_x}-\frac{d\sigma}{dz}\left(\frac{d\tau}{dx}\right)\right)\left(\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_y}-\frac{d\sigma}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dy}\right)\right)$$

$$-\left(\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_y}-\frac{d\sigma}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dx}\right)\right)\left(\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_x}-\frac{d\sigma}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dy}\right)\right)$$

$$=\left(\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\left(\frac{d\tau}{dy}\right)-\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)\left(\frac{d\tau}{dx}\right)\right)\left(\frac{d\sigma}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y}-\frac{d\sigma}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x}\right)$$

ist, so erhält man die zweite der verlangten Gleichungen in der Form:

$$U\left(\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\left(\frac{d\tau}{dy}\right)-\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)\left(\frac{d\tau}{dx}\right)\right)-X\left(\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_y}-\frac{d\sigma}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dx}\right)\right)$$

$$+V_1\left(\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_x}-\frac{d\sigma}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dx}\right)\right)+V_2\left(\frac{d\sigma}{dz_y}\left(\frac{d\tau}{dy}\right)-\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_y}\right.$$

$$\left.-Y\left(\frac{d\sigma}{dz_x}\left(\frac{d\tau}{dy}\right)-\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_x}\right)+Z\left(\frac{d\sigma}{dz_y}\frac{d\tau}{dz_x}-\frac{d\sigma}{dz_x}\frac{d\tau}{dz_y}\right)=0.$$

Darin sind aber bemerkenswerthe Vereinfachungen zulässig. Man ordne nach den Differentialquotienten von τ, und es entsteht:

$$\left(U\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)-X\frac{d\sigma}{dz_y}+V_1\frac{d\sigma}{dz_x}\right)\left(\frac{d\tau}{dx}\right)-\left(U\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)+V_2\frac{d\sigma}{dz_y}-Y\frac{d\sigma}{dz_x}\right)\left(\frac{d\tau}{dy}\right)$$

$$+\left(X\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)+V_2\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)+Z\frac{d\sigma}{dz_x}\right)\frac{d\tau}{dz_y}$$

$$-\left(V_1\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)+Y\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)+Z\frac{d\sigma}{dz_y}\right)\frac{d\tau}{dz_x}=0.$$

Gebraucht man die abkürzenden Bezeichnungen:

$$U\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)-X\frac{d\sigma}{dz_y}+V_1\frac{d\sigma}{dz_x}=S_1,$$

$$U\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)+V_2\frac{d\sigma}{dz_y}-Y\frac{d\sigma}{dz_x}=S_2,$$

$$X\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)+V_2\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)+Z\frac{d\sigma}{dz_x}=S_3,$$

$$V_1\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)+Y\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)+Z\frac{d\sigma}{dz_y}=S_4;$$

so hat man, weil $V_1 V_2 = XY + UZ$ ist, die beiden Beziehungen:

$$9. \qquad US_3 = XS_2 + V_2 S_1,$$

$$10. \qquad US_4 = V_1 S_2 + YS_1.$$

Man setze diese Werthe S_3 und S_4 in die obige Gleichung ein. Dadurch geht dieselbe über in:

$$S_2\left(U\left(\frac{d\tau}{dy}\right) - X\frac{d\tau}{dz_y} + V_1\frac{d\tau}{dz_x}\right) = S_1\left(U\left(\frac{d\tau}{dx}\right) + V_2\frac{d\tau}{dz_y} - Y\frac{d\tau}{dz_x}\right),$$

oder auch, mit Rücksicht auf die obigen Werthe S_1 und S_2, in:

(b)

$$\frac{U\left(\frac{d\sigma}{dx}\right) + V_2\frac{d\sigma}{dz_y} - Y\frac{d\sigma}{dz_x}}{U\left(\frac{d\sigma}{dy}\right) - X\frac{d\sigma}{dz_y} + V_1\frac{d\sigma}{dz_x}} = \frac{U\left(\frac{d\tau}{dx}\right) + V_2\frac{d\tau}{dz_y} - Y\frac{d\tau}{dz_x}}{U\left(\frac{d\tau}{dy}\right) - X\frac{d\tau}{dz_y} + V_1\frac{d\tau}{dz_x}}.$$

Die Gleichungen (a) und (b) dienen zur Bestimmung der Funktionen σ und τ. Ganz ebenso wie man die Gleichung (b) entwickelt hat, gelangt man zu einer anderen Gleichung, welche auch aus der Gleichung (b) abgeleitet werden kann, indem man darin die Grössen V_1 und V_2 gegen einander vertauscht. Man hat nämlich

(c)

$$\frac{U\left(\frac{d\sigma}{dx}\right) + V_1\frac{d\sigma}{dz_y} - Y\frac{d\sigma}{dz_x}}{U\left(\frac{d\sigma}{dy}\right) - X\frac{d\sigma}{dz_y} + V_2\frac{d\sigma}{dz_x}} = \frac{U\left(\frac{d\tau}{dx}\right) + V_1\frac{d\tau}{dz_y} - Y\frac{d\tau}{dz_x}}{U\left(\frac{d\tau}{dy}\right) - X\frac{d\tau}{dz_y} + V_2\frac{d\tau}{dx_x}},$$

und man könnte also auch diese Gleichung (c) gebrauchen anstatt der Gleichung (a). Für den Fall $V_1 = V_2$ sind übrigens die beiden Gleichungen (b) und (c) unter sich identisch, und es versteht sich, dass man dann die Gleichung (a) beibehalten muss.

Die obige Elimination von S_3 und S_4 ist unausführbar, wenn $U = 0$, und desshalb sind denn auch für diesen Fall die beiden Gleichungen (b) und (c) in der vorhin angegebenen Form unbrauchbar. Dieselben lassen sich aber durch andere Formen ersetzen, welche für $U = 0$ ihre Brauchbarkeit nicht verlieren, und wozu man gelangt, indem man mit Hilfe der beiden Beziehungen:

$$9. \qquad US_3 = XS_2 + V_2 S_1,$$

$$10. \qquad US_4 = V_1 S_2 + YS_1$$

ebenso wie vorhin S_3 und S_4 von den vier Grössen S_1, S_2, S_3, S_4 aus der ursprünglichen Gleichung irgend zwei andere eliminirt.

Es erhellet, dass sich im Ganzen so sechs verschiedene Formen ergeben. Bezeichnet man abkürzend durch T_1, T_2, T_3, T_4 diejenigen Ausdrücke, welche aus den obigen S_1, S_2, S_3, S_4 durch die Vertauschung von σ gegen τ entstehen, so erhält man die Gleichung (b) in den sechs verschiedenen Formen:

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{T_2}{T_1},\quad \frac{S_3}{S_1}=\frac{T_3}{T_1},\quad \frac{S_4}{S_1}=\frac{T_4}{T_1},$$

$$\frac{S_3}{S_2}=\frac{T_3}{T_2},\quad \frac{S_4}{S_2}=\frac{T_4}{T_2},\quad \frac{S_4}{S_3}=\frac{T_4}{T_3},$$

von denen irgend eine hinreichend ist, um die fünf übrigen mit Hilfe der Gleichungen 9. und 10. und der weiteren Gleichungen:

11. $$UT_3=XT_2+V_2T_1,$$

12. $$UT_4=V_1T_2+YT_1$$

daraus abzuleiten. Man vertausche die Grössen V_2 und V_1 gegen einander, und es ergeben sich ebenso viele Formen für die Gleichung (c). Man übersieht bald, dass von den sechs Coeffizienten U, X, V_1, V_2, Y, Z immer nur ein einziger sowohl in dem Zähler, als auch in dem Nenner dieser Gleichungen vorkommt, und, wenn irgend einer von diesen Coeffizienten verschwindet, dass dann jedesmal diejenige Form der Gleichungen (b) und (c) aus dem schon oben angegebenen Grunde unbrauchbar ist, in deren Zähler und Nenner jener Coeffizient gleichzeitig vorkommt.

Es kommt nun darauf an, die eine Unbekannte σ zu eliminiren, um die andere Unbekannte τ bestimmen zu können. Doch gelangt man dazu nicht immer durch die Integration einer partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung. Denn die Elimination von σ ist nicht immer schon nach der einmaligen Differentiation der vorliegenden partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung ausführbar. Man müsste, um diese Elimination allgemein durchzuführen, zu noch weiteren Differentiationen der Gleichungen (a) und (b) schreiten. Uebrigens lassen sich leicht diejenigen Fälle übersehen, in welchen sich τ aus einer partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung bestimmt. Dies ist immer dann der Fall, wenn die Coeffizienten der Gleichung (b) von den fünf Veränderlichen z_y z_x z y x nur irgend drei einschliessen. Denn nimmt man dann zwei von diesen drei Veränderlichen als die unabhängigen, die dritte aber, und ausserdem noch eine von den beiden in den Coeffizienten fehlenden Veränderlichen als zwei abhängige, so lässt sich eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung herstellen, worin nur noch die erstere von den

erwähnten abhängigen Veränderlichen vorkommt. Man differentiire die beiden Gleichungen (a) und (b) nach der einen und nach der anderen unabhängigen Veränderlichen, und man hat dann im Ganzen sechs verschiedene Gleichungen. Die Elimination der fünf Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung der zuletzt erwähnten abhängigen Veränderlichen liefert eine Gleichung von der genannten Eigenschaft, da die zu eliminirende Veränderliche nach der Voraussetzung in den Coeffizienten der vorliegenden sechs Gleichungen keine Stelle findet.

Wenn man durch die Elimination der Funktion σ auch in solchen Fällen zu einer partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung gelangt, wo die Coeffizienten der Gleichung (b) mehr als drei von den fünf Veränderlichen $z_y\, z_x\, z\, y\, x$ einschliessen, so kommt dies doch immer nur dadurch zu Stande, dass es gelingt, an die Stelle jener fünf Veränderlichen vier neue Veränderliche von solcher Beschaffenheit in die Gleichungen (a) und (b) einzuführen, dass die Coeffizienten der transformirten Gleichungen von den vier neuen Veränderlichen wieder nur irgend drei einschliessen.

Wenn es auch vielleicht schwer ist, nachzuweisen, dass man aus einer endlichen Gleichung, welche durch die Elimination zweier willkührlichen Funktionen in eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit drei Veränderlichen umgewandelt wird, nach den früher gegebenen Vorschriften alles dasjenige abzuleiten im Stande ist, was dieser Differentialgleichung überhaupt Genüge leistet, so lässt sich doch leicht übersehen, dass alle endlichen Gleichungen, welche irgend einer partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung und der zweiten Stufe genügen, zugleich jene neue partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung befriedigen werden, wozu man durch die vorhin angedeuteten Rechnungen gelangt. Wenn nämlich das zweite Integral $\alpha = 0$ der ursprünglichen Differentialgleichung vorläge, so würde man dasselbe vorerst nach z und y, sodann nach z und x differentiiren, um drei verschiedene Gleichungen zwischen den drei Veränderlichen $z\, y\, x$ und den Differentialquotienten erster Ordnung z_y und z_x zu erhalten. Wenn es nun darauf ankommt, irgend eine Gleichung $\tau = 0$ zwischen den fünf Veränderlichen $z\, y\, x\, z_y\, z_x$ aufzustellen, so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit verlangen, dass darin von diesen fünf Veränderlichen nur irgend drei eine Stelle finden, da man dann gerade diejenige Gleichung erhält, welche durch die Elimination der beiden andern Veränderlichen aus den vorhin erwähnten drei Gleichungen $\alpha = 0$, $\alpha_y = 0$, $\alpha_x = 0$ sich ergiebt. Es ist also jedenfalls ausreichend, das allgemeine Integral derjenigen Differentialgleichungen aufzu-

21*

stellen, welche zwischen irgend dreien von den fünf Veränderlichen $z\, y\, x\, z_y\, z_x$ bestehen.

1. Es sei nun

$$(1+z_y^2)\frac{d^2z}{dx^2}-2z_xz_y\frac{d^2z}{dxdy}+(1+z_x^2)\frac{d^2z}{dy^2}=0.$$

Betrachtet man hier z_y und z_x als die unabhängigen, y und x als die abhängigen Veränderlichen, nimmt man ferner an, dass die Funktion σ von den beiden abhängigen Veränderlichen nur y und die Funktion τ nur x enthalte, so hat man die Gleichungen:

$$\text{(b)}\qquad X\Big(X\frac{dy}{dz_y}-V_1\frac{dy}{dz_x}\Big)=V_2\Big(X\frac{dy}{dz_y}-V_1\frac{dx}{dz_x}\Big),$$

$$\text{(c)}\qquad X\Big(X\frac{dy}{dz_y}-V_2\frac{dy}{dz_x}\Big)=V_1\Big(X\frac{dx}{dz_y}-V_2\frac{dx}{dz_x}\Big).$$

Zur Bestimmung von V_1 und V_2 hat man die Gleichung:

$$V_1^2+2z_xz_yV_1+(1+z_y^2)(1+z_x^2)=0,$$

und daraus folgt:

$$V_1=-(z_xz_y+\sqrt{-1-z_x^2-z_y^2}).$$

Um die Gleichungen (b) und (c) zu vereinfachen, gebrauche man anstatt der unabhängigen Veränderlichen z_y und z_x diejenigen Funktionen, welche sich durch die Integration der beiden Gleichungen:

$$(1+z_y^2)\,dz_x-(z_xz_y\pm\sqrt{-1-z_x^2-z_y^2})\,dz_y=0$$

ergeben. Das allgemeine Integral dieser Gleichungen zeigt sich in der Form:

$$\frac{z_x\sqrt{-1}\pm\sqrt{-1-z_x^2-z_y^2}}{1-z_y\sqrt{-1}}=c,$$

wo c die willkührliche Beständige ist. Bezeichnet man nun die beiden Funktionen von z_y und z_x, welche hierdurch ausgedrückt sind, durch α und β, indem man das eine Mal $c=\alpha$, das andere Mal $c=\beta$ setzt, so findet man:

$$\tfrac{1}{2}\Big(\alpha-\frac{1}{\alpha}\Big)=\frac{V_2}{X}\quad\text{und}\quad\tfrac{1}{2}\Big(\beta-\frac{1}{\beta}\Big)=\frac{V_1}{X};$$

und die beiden Gleichungen (b) und (c) werden desshalb durch die Elimination von z_y und z_x umgewandelt in die einfacheren:

$$\text{(b)}\quad\frac{dy}{d\alpha}=\frac{\alpha^2-1}{2\alpha}\frac{dx}{d\alpha},\qquad\qquad\text{(c)}\quad\frac{dy}{d\beta}=\frac{\beta^2-1}{2\beta}\frac{dx}{d\beta}.$$

Man eliminire nun y, und es entsteht $\frac{d^2x}{d\alpha d\beta}=0$. Die Integration giebt:

1. $$x=\varphi(\alpha)+\psi(\beta),$$

wo φ und ψ willkührliche Funktionen sind. Dies also ist die Gleichung $\tau=0$. Um auch die Gleichung $\sigma=0$ darzustellen, bilde man aus den Gleichungen (b) und (c) die vollständige Differentialgleichung:

$$dy=\frac{\alpha^2-1}{2\alpha}\frac{dx}{d\alpha}d\alpha+\frac{\beta^2-1}{2\beta}\frac{dx}{d\beta}d\beta.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung 1. erhält man durch die Integration:

2. $$y=\int\frac{\alpha^2-1}{2\alpha}\varphi'(\alpha)d\alpha+\int\frac{\beta^2-1}{2\beta}\psi'(\beta)d\beta.$$

Nun ist es zwar unmöglich, noch vor der Bestimmung der Funktionen φ und ψ aus den beiden Gleichungen 1. und 2. die Werthe z_y und z_x zu entwickeln, um dann durch die Integration von

$$dz=z_ydy+z_xdx$$

das allgemeine Integral der vorliegenden partiellen Differentialgleichung als Funktion der drei Veränderlichen z, y und x darzustellen. Allein die Integration der vollständigen Differentialgleichung kann auch schon vor der erwähnten Elimination vorgenommen werden, indem man z als Funktion vou α und β bestimmt. Man hat dann:

$$dz=(z_x\frac{dx}{d\alpha}+z_y\frac{dy}{d\alpha})d\alpha+(z_x\frac{dx}{d\beta}+z_y\frac{dy}{d\beta})d\beta,$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen 1. und 2.:

$$dz=(z_x+\frac{\alpha^2-1}{2\alpha}z_y)\varphi'(\alpha)d\alpha+(z_x+\frac{\beta^2-1}{2\beta}z_y)\psi'(\beta)d\beta.$$

Wenn man z_y und z_x mittels α und β eliminirt und dann integrirt, so erhält man:

3. $$z\sqrt{-1}=\int\frac{\alpha^2+1}{2\alpha}\varphi'(\alpha)d\alpha+\int\frac{\beta^2+1}{2\beta}\psi'(\beta)d\beta.$$

Um das allgemeine Integral als Funktion der drei Veränderlichen z, y und x darzustellen, müsste man also die Grössen α und β aus den Gleichungen 1., 2., 3. eliminiren. Man kann sich übrigens auch der folgenden drei Gleichungen bedienen:

$$x = \varphi(\alpha) + \psi(\beta),$$

$$z\sqrt{-1} + y = \int \alpha\varphi(\alpha)\,d\alpha + \int \beta\psi(\beta)\,d\beta,$$

$$z\sqrt{-1} - y = \int \frac{1}{\alpha}\varphi(\alpha)\,d\alpha + \int \frac{1}{\beta}\psi(\beta)\,d\beta.$$

Die Aufgabe, deren Lösung die Integration der Differentialgleichungen bezweckt, verlangt nicht allein das allgemeine Integral einer beliebigen partiellen Differentialgleichung, sondern hat auch die Bestimmung derjenigen Funktion zum Gegenstand der Untersuchung, welche gleichzeitig verschiedenen partiellen Differentialgleichungen Genüge leistet. Um das letztere Ziel zu erreichen, hat man in dem Bisherigen vor Allem jedesmal das allgemeine Integral irgend einer der partiellen Differentialgleichungen hergestellt. Alsdann aber mussten die darin vorkommenden willkührlichen Grössen nach und nach so bestimmt werden, dass dadurch auch allen übrigen partiellen Differentialgleichungen Genüge geschah. Jetzt aber, wo partielle Differentialgleichungen der zweiten Ordnung vorliegen, welche kein erstes Integral besitzen, wird man einen andern Weg einschlagen. Denn die eigenthümlichen Schwierigkeiten, welche bei der Integration einer solchen partiellen Differentialgleichung entstehen, haben darin ihren Grund, dass diese Aufgabe nicht mehr unmittelbar auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung zurückgeführt werden kann. Wenn nun aber diejenige Funktion gesucht wird, welche gleichzeitig mehreren solcher partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung Genüge leistet, so lassen sich diese Schwierigkeiten dadurch beseitigen, dass man nicht mehr eine dieser Gleichungen unabhängig von den übrigen integrirt, sondern bei der Bestimmung der gesuchten Funktion sogleich auf die verschiedenen Differentialgleichungen Rücksicht nimmt, welche gleichzeitig bestehen sollen. Es wird sich zeigen, dass man so die vorliegende Aufgabe wieder auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades zurückführt.

Wenn zwei verschiedene partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung vorliegen, welche beide einer und derselben endlichen Gleichung zwischen den drei Veränderlichen z, y und x entsprechen, von denen z die abhängige sein mag, so bildet man daraus drei verschiedene partielle Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, wodurch die drei Differentialquotienten $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$ und $\frac{d^2z}{dx^2}$ einzeln genommen als Funktionen der Veränderlichen

und der Differentialquotienten z_y und z_x sich bestimmen. Man sieht ein, wenn gewisse Grössen in diesen Funktionen fehlen, welche in den Differentialgleichungen der ersten Ordnung eine Stelle finden, dass dies nur zwei willkührliche Beständige sein können, die man übrigens jederzeit mit Hilfe der beiden Differentialgleichungen der ersten Ordnung eliminiren kann. Wenn nun verlangt wird, dass man die endliche Gleichung zwischen den drei Veränderlichen aufstelle, welche gleichzeitig den drei Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2z}{dy^2}=Y,\ \frac{d^2z}{dxdy}=V,\ \frac{d^2z}{dx^2}=X$$

entspricht, worin Y, V, X bestimmte Funktionen von z_y, z_x, z, y, x sind, so suche man vor Allem jene beiden Differentialgleichungen der ersten Ordnung auf, woraus die vorliegenden Differentialgleichungen der zweiten Ordnung sich ableiten lassen. Stellt man dieselben durch $\alpha=a$ und $\beta=b$ vor, wo α und β bestimmte Funktionen von z_y, z_x, z, y, x; a und b aber willkührliche Beständige sind, so ergeben sich aus der ersteren die beiden Differentialgleichungen der zweiten Ordnung:

$$\frac{d\alpha}{dz_y}\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{d\alpha}{dz_x}\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d\alpha}{dz}z_y+\frac{d\alpha}{dy}=0,$$

$$\frac{d\alpha}{dz_y}\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d\alpha}{dz_x}\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d\alpha}{dz}z_x+\frac{d\alpha}{dx}=0.$$

Man setze die Werthe $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$ und $\frac{d^2z}{dx^2}$ ein, und man erhält:

$$\text{(a)}\qquad Y\frac{d\alpha}{dz_y}+V\frac{d\alpha}{dz_x}+\frac{d\alpha}{dz}z_y+\frac{d\alpha}{dy}=0,$$

$$\text{(b)}\qquad V\frac{d\alpha}{dz_y}+X\frac{d\alpha}{dz_x}+\frac{d\alpha}{dz}z_x+\frac{d\alpha}{dx}=0.$$

Man sieht ein, dass es zwei verschiedene Funktionen geben muss, welche diese beiden Differentialgleichungen gleichzeitig befriedigen, da dieselben ganz ebenso für die Funktion β gelten. Nur unter dieser Bedingung besteht eine endliche Gleichung zwischen den Veränderlichen z, y und x, woraus die vorliegenden drei Differentialgleichungen der zweiten Ordnung gleichzeitig sich ableiten lassen. Nachdem man aber die beiden Gleichungen $\alpha=a$ und $\beta=b$ hergestellt hat, entwickle man daraus die Werthe z_y und z_x. Diese zeigen sich als Funktionen der Veränderlichen z, y, x und der beiden willkührlichen Beständigen a und b. Die

gesuchte endliche Gleichung aber, welche durch die Integration der vollständigen Differentialgleichung

$$dz = z_y dy + z_x dx$$

gewonnen wird, schliesst drei willkührliche Beständige ein. Nun ist es aber einleuchtend, dass man aus dieser endlichen Gleichung und den beiden Differentialgleichungen der ersten Ordnung $\alpha = a$ und $\beta = b$ von den drei willkührlichen Beständigen je zwei eliminiren kann, so dass man zu drei verschiedenen partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung gelangt, in denen jedesmal nur eine einzige willkührliche Beständige auftritt. Daraus schliesst man, dass die beiden Gleichungen (a) und (b), woraus die Gleichungen $\alpha = a$ und $\beta = b$ hervorgehen, noch eine dritte Gleichung $\gamma = c$ liefern werden; und dass man die endliche Gleichung mit ihren drei willkührlichen Beständigen, welche aus der oben angegebenen vollständigen Differentialgleichung gewonnen wird, auch aus diesen drei Gleichungen:

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma = c$$

ableitet, indem man die beiden Differentialquotienten z_y und z_x eliminirt.

Wenn diejenige Funktion zu bestimmen ist, welche den drei Differentialgleichungen

$$\frac{d^2z}{dy^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = V, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = X$$

gleichzeitig genügt, so findet diese Aufgabe ihren analytischen Ausdruck auch in der einzigen Differentialgleichung:

$$d^2z = Ydy^2 + 2Vdydx + Xdx^2.$$

Denn wenn man die vollständige Differentialgleichung der ersten Ordnung

$$dz = z_y dy + z_x dx,$$

worin man sich an der Stelle von z_y und z_x die aus den beiden Gleichungen $\alpha = a$ und $\beta = b$ berechneten Werthe zu denken hat, gleichzeitig nach den drei Veränderlichen z, y, x differentiirt, so entsteht die vollständige Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$d^2z = \frac{d^2z}{dy^2} dy^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy} dydx + \frac{d^2z}{dx^2} dx^2.$$

Wenn man aber die für die Differentialquotienten der zweiten Ordnung gegebenen Werthe einsetzt, so hat man in der That die Gleichung:

$$d^2z = Ydy^2 + 2Vdydx + Xdx^2.$$

2. Es sei nun

$$(z-c)d^2z + (1+z_y^2)dy^2 + 2z_xz_ydydx + (1+z_x^2)dx^2 = 0.$$

Dies führt auf die drei Gleichungen:

$$(z-c)\frac{d^2z}{dy^2} + 1 + z_y^2 = 0, \quad (z-c)\frac{d^2z}{dxdy} + z_xz_y = 0,$$

$$(z-c)\frac{d^2z}{dx^2} + 1 + z_x^2 = 0.$$

Zur Bestimmung der drei Funktionen α, β, γ aber hat man:

$$\text{(a)} \qquad (1+z_y^2)\frac{d\alpha}{dz_y} + z_xz_y\frac{d\alpha}{dz_x} - (z-c)\left(\frac{d\alpha}{dz}z_y + \frac{d\alpha}{dy}\right) = 0,$$

$$\text{(b)} \qquad z_xz_y\frac{d\alpha}{dz_y} + (1+z_x^2)\frac{d\alpha}{dz_x} - (z-c)\left(\frac{d\alpha}{dz}z_x + \frac{d\alpha}{dx}\right) = 0.$$

Man genügt der ersteren durch die beiden Gleichungen:

$$z_xdz + (z-c)dz_x = 0, \quad (1+z_y^2)dz + (z-c)z_ydz_y = 0.$$

Daraus findet man durch die Integration:

$$(z-c)z_x = \alpha_1 \quad \text{und} \quad (z-c)^2(1+z_y^2) = \beta_1.$$

Man eliminire damit die Veränderlichen z und z_x, und die Gleichung (a) geht über in die einfachere:

$$(1+z_y^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d\alpha}{dz_y} - \sqrt{\beta_1}\frac{d\alpha}{dy} = 0.$$

Die Integration liefert:

$$\frac{z_y\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{1+z_y^2}} + y = (z-c)z_y + y = \gamma_1.$$

Da nun α Funktion von α_1, β_1, γ_1 und x ist, so geht die Gleichung (b) über in:

$$\frac{d\alpha}{d\alpha_1} - 2\alpha_1\frac{d\alpha}{d\beta_1} - \frac{d\alpha}{dx} = 0.$$

Daraus folgt aber, dass man den Gleichungen (a) und (b) genügt durch:

$$\alpha_1 + x = a, \quad \gamma_1 = b, \quad \beta_1 + \alpha_1^2 = e,$$

oder auch durch die drei Gleichungen:

$$(z-c)z_x + x = a, \quad (z-c)z_y + y = b, \quad (z-c)^2(1+z_y^2+z_x^2) = e.$$

Die Elimination von z_y und z_x aber liefert die endliche Gleichung:

$$(z-c)^2+(y-b)^2+(x-c)^2=e.$$

Es hat keinen Anstand, nun auch die vollständige Differentialgleichung

$$d^2z=Ydy^2+2Vdydx+Xdx^2+2Tdydw+2Sdxdw+Wdw^2+\ldots.$$

mit $n+1$ Veränderlichen zu integriren. Denn wenn diese in der That auf eine endliche Gleichung zwischen $n+1$ Veränderlichen hinweist, so lassen sich n partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades anschreiben, denen man gleichzeitig durch ein und dieselbe Funktion genügt. Es werden sich aber $n+1$ solcher Funktionen vorfinden, und man erhält dadurch eben so viele partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung:

$$\alpha=a,\quad \beta=b,\quad \gamma=c,\quad \delta=d \text{ u. s. w.}$$

Irgend eine davon ist entbehrlich, da man mit Hilfe der n übrigen die vollständige Differentialgleichung der ersten Ordnung:

$$dz=z_ydy+z_xdx+z_wdw+\ldots.$$

zu bestimmen im Stande ist, woraus die gesuchte endliche Gleichung mit ihren $n+1$ willkührlichen Beständigen durch die Integration erzielt wird. Doch gelangt man dazu vortheilhafter, indem man die n Differentialquotienten der ersten Ordnung $z_y\, z_x\, z_w \ldots.$ aus jenen $n+1$ partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung eliminirt.

Wenn nur zwei partielle Differentialgleichungen der zweiten Ordnung mit drei Veränderlichen gegeben sind, so führen dieselben möglicher Weise auf eine einzige Differentialgleichung der ersten Ordnung. Wie man dazu gelangt, dies ist eben gezeigt worden. Diejenige Grösse, welche in dieser Differentialgleichung der ersten Ordnung eine Stelle findet, während sie den beiden Differentialgleichungen der zweiten Ordnung fehlt, kann nichts anders sein als eine willkührliche Beständige. Indem man das erste Integral der Integration unterwirft, gelangt man zu der allgemeinsten endlichen Gleichung, welche den beiden vorliegenden Differentialgleichungen Genüge leistet; und es ist offenbar, dass dieselbe ausser jener willkührlichen Beständigen noch eine willkührliche Funktion einschliesst. Anders beschaffen ist die endliche Gleichung, welche den partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung entspricht, wenn diese nicht mehr von einer einzigen Differentialgleichung der ersten Ordnung ihren Ursprung ableiten. Wie man in diesem Falle die endliche Glei-

chung zu bestimmen hat, dies sei der Gegenstand der folgenden Untersuchung.

Wir nehmen, um diese Aufgabe sogleich in ihrer Allgemeinheit aufzufassen, die beiden Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ an, wo φ und ψ bestimmte Funktionen von $z_{yy}\, z_{xy}\, z_{xx}\, z_y\, z_x\, z\, y\, x$ sind; und gelangen dann zu deren Lösung, indem wir eine dritte Gleichung $\tau = 0$ aufstellen zwischen den genannten acht veränderlichen Grössen. Denn wenn drei Gleichungen bekannt sind, woraus die Werthe der Differentialquotienten zweiter Ordnung als Funktionen von $z_y\, z_x\, z\, y\, x$ sich entwickeln lassen, so ist die Aufgabe auf die vorhin gelöste zurückgeführt. Um aber die Gleichung $\tau = 0$ zu erhalten, so bilde man die beiden Differentialgleichungen:

$$1.\quad \frac{d\psi}{dz_{yy}}\frac{d^3z}{dy^3} + \frac{d\psi}{dz_{xy}}\frac{d^3z}{dxdy^2} + \frac{d\psi}{dz_{xx}}\frac{d^3z}{dx^2dy} + \left(\frac{d\psi}{dy}\right) = 0,$$

$$2.\quad \frac{d\psi}{dz_{yy}}\frac{d^3z}{dxdy^2} + \frac{d\psi}{dz_{xy}}\frac{d^3z}{dx^2dy} + \frac{d\psi}{dz_{xx}}\frac{d^3z}{dx^3} + \left(\frac{d\psi}{dx}\right) = 0,$$

indem man die Abkürzungen:

$$\frac{d\psi}{dz_y}z_{yy} + \frac{d\psi}{dz_x}z_{xy} + \frac{d\psi}{dz}z_y + \frac{d\psi}{dy} = \left(\frac{d\psi}{dy}\right) \text{ u. s. w.}$$

gebraucht. Zwei andere Differentialgleichungen 3. und 4. ergeben sich ebenso aus der Gleichung $\varphi = 0$. Geht man nun von der Voraussetzung aus, dass in der fraglichen Gleichung $\tau = 0$ von den drei Differentialquotienten der zweiten Ordnung nur einer vorkomme, so hat man, wenn dieser mit s bezeichnet wird, ausser den obigen vier Differentialgleichungen noch die beiden:

$$\text{(a)}\quad \frac{d\tau}{ds}\frac{ds}{dy} + \frac{d\tau}{dz_y}z_{yy} + \frac{d\tau}{dz_x}z_{xy} + \frac{d\tau}{dz}z_y + \frac{d\tau}{dy} = 0,$$

$$\text{(b)}\quad \frac{d\tau}{ds}\frac{ds}{dx} + \frac{d\tau}{dz_y}z_{xy} + \frac{d\tau}{dz_x}z_{xx} + \frac{d\tau}{dz}z_x + \frac{d\tau}{dx} = 0.$$

Da diese sechs Differentialgleichungen der dritten Ordnung aus einer einzigen endlichen Gleichung entspringen, so können dies im Ganzen nur vier unter sch verschiedene Gleichungen sein, und die Elimination der vier Differentialquotienten dritter Ordnung wird desshalb auf zwei identische Gleichungen führen. Aus den Gleichungen 1., 2., 3., 4. berechnet man diese vier Differentialquotienten als bestimmte Funktionen von $z_{yy}\, z_{xy}\, z_{xx}\, z_y\, z_x\, z\, y\, x$. Man setze die Werthe $\frac{ds}{dy}$ und $\frac{ds}{dx}$ in die Gleichungen (a) und (b) ein, und man hat dann zwei partielle Differentialgleichungen

der ersten Ordnung und des ersten Grades, woraus die Grösse τ als Funktion von $s\, z_y\, z_x\, z\, y\, x$ hervorgeht, nachdem man die beiden andern Differentialquotienten zweiter Ordnung mittels $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ eliminirt hat.

Nachdem man eine Funktion α aufgefunden hat, worin die Grösse s vorkommt, und welche zugleich die beiden Gleichungen (a) und (b) an der Stelle von τ befriedigt, ersetze man die Grösse s durch die neue Veränderliche α, und man behält die einfacheren Gleichungen:

$$(a)' \qquad \frac{d\tau}{dz_y} z_{yy} + \frac{d\tau}{dz_x} z_{xy} + \frac{d\tau}{dz} z_y + \frac{d\tau}{dy} = 0,$$

$$(b)' \qquad \frac{d\tau}{dz_y} z_{xy} + \frac{d\tau}{dz_x} z_{xx} + \frac{d\tau}{dz} z_x + \frac{d\tau}{dx} = 0,$$

deren Coeffizienten als Funktionen von $z_y\, z_x\, z\, y\, x$ und der Beständigen α zu betrachten sind. Wenn φ eine willkührliche Funktion aller übrigen Grössen bezeichnet, welche einzeln an der Stelle von τ die Gleichungen (a)' und (b)' befriedigen, so zeigt sich die allgemeine Gleichung zur Bestimmung von s in der Form $\alpha = \varphi$. Nun muss man sich aber erinnern, dass jene beiden partiellen Differentialgleichungen, woraus man die endliche Gleichung abzuleiten hat, welche den vorliegenden Werthen z_{yy}, z_{xy} und z_{xx} entspricht, nur dadurch von den Gleichungen (a)' und (b)' sich unterscheiden, dass überall φ die Stelle von α einnimmt. Man weiss auch, dass sich aus jenen Differentialgleichungen jedesmal drei verschiedene Funktionen β, γ, δ ergeben, und dass die endliche Gleichung durch die Elimination von z_y und z_x aus den drei Gleichungen $\beta = b$, $\gamma = c$ und $\delta = d$ erzielt wird, worin b, c und d willkührliche Beständige sind. Da nun $\varphi = \alpha$ gesetzt werden darf, so folgt hieraus zunächst, dass die Grössen β, γ und δ identisch sind mit denjenigen, welche auch in der willkührlichen Funktion φ vorkommen. Man schliesst aber weiter, dass die Gleichung $\alpha = \varphi(\beta\gamma\delta)$ auch durch die einfachere $\alpha = a$ ersetzt werden kann, worin a eine vierte willkührliche Beständige ist. Es unterliegt demnach keinem Zweifel, dass man zu der gesuchten endlichen Gleichung gelangt, indem man die Differentialquotienten s, z_y und z_x aus den vier Gleichungen:

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma = c, \quad \delta = d$$

eliminirt. Wenn also die partiellen Differentialgleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ zwar kein gemeinsames erstes Integral besitzen, aber doch von derselben endlichen Gleichung ihren Ursprung ableiten, so ist diese endliche Gleichung nichts anders als eine bestimmte

Funktion der drei Veränderlichen z, y und x mit vier willkührlichen Beständigen.

3. Es sei $z_x z_y . z_{yy} = (1 + z_y^2) z_{xy}$ und $z_x z_y . z_{xx} = (1 + z_x^2) z_{xy}$.

Man bestimme hier den Differentialquotienten z_{xy} als Funktion von $z_y\, z_x\, z\, y\, x$, da man dann zur Darstellung der Gleichungen (a) und (b) nur zwei von den Gleichungen 1., 2., 3., 4. bedarf. Diese zeigen sich in der Form:

$$z_x z_y \frac{dz_{xy}}{dx} - (1 + z_x^2) \frac{dz_{xy}}{dy} + \frac{1 + z_x^2 + 2z_y^2}{z_x z_y^2} z_{xy}^2 = 0,$$

$$z_x z_y \frac{dz_{xy}}{dy} - (1 + z_y^2) \frac{dz_{xy}}{dx} + \frac{1 + z_y^2 + 2z_x^2}{z_x^2 z_y} z_{xy}^2 = 0.$$

Man berechnet daraus die beiden Werthe:

$$\frac{dz_{xy}}{dy} = \frac{1 + 3z_y^2}{z_x z_y^2} z_{xy}^2, \quad \text{und} \quad \frac{dz_{xy}}{dx} = \frac{1 + 3z_x^2}{z_y z_x^2} z_{xy}^2,$$

und so gelangt man zu den Gleichungen:

$$\text{(a)} \quad \frac{1 + 3z_y^2}{z_x z_y^2} z_{xy}^2 \frac{d\tau}{dz_{xy}} + \frac{1 + z_y^2}{z_x z_y} z_{xy} \frac{d\tau}{dz_y} + \frac{d\tau}{dz_x} z_{xy} + \frac{d\tau}{dz} z_y + \frac{d\tau}{dy} = 0,$$

$$\text{(b)} \quad \frac{1 + 3z_x^2}{z_y z_x^2} z_{xy}^2 \frac{d\tau}{dz_{xy}} + \frac{d\tau}{dz_y} z_{xy} + \frac{1 + z_x^2}{z_x z_y} z_{xy} \frac{d\tau}{dz_x} + \frac{d\tau}{dz} z_x + \frac{d\tau}{dx} = 0.$$

Man genügt durch $\tau = \frac{z_x z_y}{z_{xy}} + z$, und behält, nachdem man überall $z_{xy} = \frac{z_x z_y}{c - z}$ gesetzt hat, die einfacheren Gleichungen:

$$\text{(a)}' \quad (1 + z_y^2) \frac{d\tau}{dz_y} + z_x z_y \frac{d\tau}{dz_x} + (c - z) \left(\frac{d\tau}{dz} z_y + \frac{d\tau}{dy} \right) = 0,$$

$$\text{(b)}' \quad z_x z_y \frac{d\tau}{dz_y} + (1 + z_x^2) \frac{d\tau}{dz_x} + (c - z) \left(\frac{d\tau}{dz} z_x + \frac{d\tau}{dx} \right) = 0.$$

Daraus ergeben sich die drei Gleichungen:

$$(z - c) z_x + x = a, \quad (z - c) z_y + y = b, \quad (z - c)^2 (1 + z_x^2 + z_y^2) = e;$$

und durch die Elimination von z_y und z_x entsteht das allgemeine Integral:

$$(z - c)^2 + (y - b)^2 + (x - a)^2 = e.$$

Schliesslich soll noch gezeigt werden, wie man die allgemeine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit drei Veränderlichen $\psi(z_{yy}\, z_{xy}\, z_{yx}\, z_y\, z_x\, z\, y\, x) = 0$ integriren kann, wenn dieselbe kein erstes Integral besitzt.

Man bestimme hier noch zwei andere partielle Differentialgleichungen der zweiten Ordnung $\sigma = 0$ und $\tau = 0$, welche einerlei Ursprung haben mit der vorliegenden Gleichung $\psi = 0$. Denn wenn drei derartige Gleichungen vorliegen, so kann man die drei Differentialquotienten der zweiten Ordnung einzeln als Funktionen von $z_y\, z_x\, z\, y\, x$ daraus entwickeln, und die weitere Lösung der Aufgabe hängt ab von der Integration der vollständigen Differentialgleichung:

$$d^2 z = z_{yy} dy^2 + 2 z_{xy} dy\, dx + z_{xx} dx^2.$$

Man darf annehmen, dass die Gleichungen $\sigma = 0$ und $\tau = 0$ von den Differentialquotienten der zweiten Ordnung nur die beiden z_{yy} und z_{xy} einschliessen, und man erhält so durch Differentiation:

$$1. \quad \frac{d\sigma}{dz_{yy}} \frac{d^3 z}{dy^3} + \frac{d\sigma}{dz_{xy}} \frac{d^3 z}{dx\, dy^2} + \left(\frac{d\sigma}{dy}\right) = 0,$$

$$2. \quad \frac{d\sigma}{dz_{yy}} \frac{d^3 z}{dx\, dy^2} + \frac{d\sigma}{dz_{xy}} \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + \left(\frac{d\sigma}{dx}\right) = 0,$$

$$3. \quad \frac{d\tau}{dz_{yy}} \frac{d^3 z}{dy^3} + \frac{d\tau}{dz_{xy}} \frac{d^3 z}{dx\, dy^2} + \left(\frac{d\tau}{dy}\right) = 0,$$

$$4. \quad \frac{d\tau}{dz_{yy}} \frac{d^3 z}{dx\, dy^2} + \frac{d\tau}{dz_{xy}} \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + \left(\frac{d\tau}{dx}\right) = 0,$$

indem man abkürzend:

$$\frac{d\sigma}{dz_y} z_{yy} + \frac{d\sigma}{dz_x} z_{xy} + \frac{d\sigma}{dz} z_y + \frac{d\sigma}{dy} = \left(\frac{d\sigma}{dy}\right) \quad \text{u. s. w.}$$

schreibt. Aus der partiellen Differentialgleichung $\psi = 0$ erhält man noch:

$$5. \quad \frac{d\psi}{dz_{xx}} \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + \frac{d\psi}{dz_{xy}} \frac{d^3 z}{dx\, dy^2} + \frac{d\psi}{dz_{yy}} \frac{d^3 z}{dy^3} + \left(\frac{d\psi}{dy}\right) = 0.$$

Wenn man zwischen den vorliegenden fünf Gleichungen die drei Differentialquotienten der dritten Ordnung $\frac{d^3 z}{dy^3}$, $\frac{d^3 z}{dx\, dy^2}$ und $\frac{d^3 z}{dx^2 dy}$ eliminirt, so ergeben sich zwei partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung zur Bestimmung der Funktionen σ und τ. Aus den Gleichungen 1. und 3., 2. und 4. bilde man zunächst die folgenden:

$$6.\quad \left(\frac{d\sigma}{dz_{yy}}\frac{d\tau}{dz_{xy}}-\frac{d\sigma}{dz_{xy}}\frac{d\tau}{dz_{yy}}\right)\frac{d^3z}{dy^3}+\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_{xy}}-\frac{d\sigma}{dz_{xy}}\left(\frac{d\tau}{dy}\right)=0,$$

$$7.\quad \left(\frac{d\sigma}{dz_{xy}}\frac{d\tau}{dz_{yy}}-\frac{d\sigma}{dz_{yy}}\frac{d\tau}{dz_{xy}}\right)\frac{d^3z}{dxdy^2}+\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_{yy}}-\frac{d\sigma}{dz_{yy}}\left(\frac{d\tau}{dy}\right)=0,$$

$$8.\quad \left(\frac{d\sigma}{dz_{yy}}\frac{d\tau}{dz_{xy}}-\frac{d\sigma}{dz_{xy}}\frac{d\tau}{dz_{xy}}\right)\frac{d^3z}{dxdy^2}+\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_{xy}}-\frac{d\sigma}{dz_{xy}}\left(\frac{d\tau}{dx}\right)=0,$$

$$9.\quad \left(\frac{d\sigma}{dz_{xy}}\frac{d\tau}{dz_{yy}}-\frac{d\sigma}{dz_{yy}}\frac{d\tau}{dz_{xy}}\right)\frac{d^3z}{dx^2dy}+\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_{yy}}-\frac{d\sigma}{dz_{yy}}\left(\frac{d\tau}{dx}\right)=0.$$

Durch die Addition der Gleichungen 7. und 8. entsteht:

$$(a)\quad \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_{xy}}-\frac{d\sigma}{dz_{xy}}\left(\frac{d\tau}{dx}\right)+\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_{yy}}-\frac{d\sigma}{dz_{yy}}\left(\frac{d\tau}{dy}\right)=0,$$

und dies ist die eine von den beiden Gleichungen, welche zur Bestimmung der Funktionen σ und τ dienen. Um die andere Gleichung zu erhalten, setze man die aus den Gleichungen 6., 7., 8., 9. sich ergebenden Werthe an die Stelle der Differentialquotienten dritter Ordnung in die Gleichung 5. ein. Dabei wird man mit Vortheil den Coefficienten $\frac{d\psi}{dz_{xy}}$ durch die Summe V_1+V_2 ersetzen, wo V_1 und V_2 die Wurzeln V_1 der quadratischen Gleichung:

$$V_1^2-\frac{d\psi}{dz_{xy}}V_1+\frac{d\psi}{dz_{xx}}\cdot\frac{d\psi}{dz_{yy}}=0$$

vorstellen, um dann bei der Elimination von $\frac{d^3z}{dxdy^2}$ entweder die Gleichung 7. oder die Gleichung 8. zu gebrauchen, je nachdem dieser Differentialquotient mit dem Faktor V_1 oder V_2 verbunden ist. Man gelangt so zu der Gleichung:

$$\frac{d\psi}{dz_{xx}}\left(\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_{yy}}-\frac{d\sigma}{dz_{yy}}\left(\frac{d\tau}{dx}\right)\right)-V_1\left(\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\frac{d\tau}{dz_{xy}}-\frac{d\sigma}{dz_{xy}}\left(\frac{d\tau}{dx}\right)\right)$$
$$-V_2\left(\frac{d\sigma}{dz_{yy}}\left(\frac{d\tau}{dy}\right)-\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_{yy}}\right)+\frac{d\psi}{dz_{yy}}\left(\frac{d\sigma}{dz_{xy}}\left(\frac{d\tau}{dy}\right)-\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{d\tau}{dz_{xy}}\right)$$
$$+\left(\frac{d\psi}{dy}\right)\left(\frac{d\sigma}{dz_{yy}}\frac{d\tau}{dz_{xy}}-\frac{d\sigma}{dz_{xy}}\frac{d\tau}{dz_{yy}}\right)=0.$$

Man ordne nach Differentialquotienten von τ, und man hat:

den andern Strahlen xm und xM gebildeten Winkel mxM und es findet aus letzterem Grunde die Proportion statt:

$$xM : xm = MJ : mJ.$$

Es ist aber auch $\quad R : r = MJ : mJ,$

und daher $\quad xM : xm = R : r.$

§. 2.

Verhalten sich die Abstände irgend eines Punktes von den Mittelpunkten zweier Kreise wie deren Radien, so liegt dieser Punkt auf der Peripherie des Kreises, der durch die Aehnlichkeitspunkte jener Kreise bestimmt ist.

Ist x (Taf. I. Fig. 11.) der Punkt, welcher der Proportion genügt:

$$xM : xm = R : r,$$

so ist, wenn xJ die Halbirungslinie des Winkels mxM, und xA die seines Nebenwinkels bezeichnen:

$$MJ : mJ = xM : xm = R : r$$

$$MA : mA = xM : xm = R : r$$

mithin $\quad MJ : mJ = MA : mA = R : r.$

Deshalb sind J und A die Aehnlichkeitspunkte beider Kreise und xM, xm, xJ und xA harmonische Strahlen, von denen die letzteren normal auf einander stehen, weil, wie leicht erhellt, jeder derselben den einen der Winkel halbirt, den die beiden andern mit einander einschliessen. Und weil xJ und xA normal auf einander stehen, liegt x auf dem Kreise, der durch die Punkte J und A bestimmt ist.

§. 3.

α) Legt man von irgend einem Punkte der Peripherie des Kreises, der durch die Aehnlichkeitspunkte zweier anderer Kreise bestimmt ist, und nicht innerhalb derselben liegt, Tangenten an diese Kreise, so sind die Winkel gleich, welche je zwei zusammengehörige Tangenten mit einander einschliessen.

Bezeichnet (Taf. I. Fig. 12.) x den Punkt, von dem aus die Tangenten xt, $xt_{,}$ und xT, $xT_{,}$ an die Kreise gelegt werden, deren Mitten m und M sind, so ist

$$\Delta\, xtm \sim \Delta\, xTM,$$

weil dieselben rechtwinklig sind und nach §. 1. die Proportion

$$xm : xM = mt : MT$$

stattfindet. Deshalb ist $\angle mxt = \angle MxT$ und also auch $\angle txt_{,} = \angle TxT_{,}$.

β) Schliessen die Tangenten, welche von einem Punkte an zwei Kreise gelegt werden, der ausserhalb dieser Kreise liegt, beziehlich gleiche Winkel mit einander ein, so liegt dieser Punkt auf dem Kreise, der durch die Aehnlichkeitspunkte jener Kreise bestimmt ist.

Bezeichnet (Taf. I. Fig. 12.) x diesen Punkt, so ist

$$\Delta xtm \sim \Delta xTM,$$

weil, wie sogleich erhellt, beide zwei Winkel beziehlich gleich haben. Hieraus folgt:

$$xm : xM = mt : MT$$
$$= r : R,$$

und deshalb liegt nach §. 2. x auf dem durch die Aehnlichkeitspunkte bestimmten Kreise.

§. 4.

α) Zieht man von irgend einem Punkte der Peripherie des Kreises, der durch die Aehnlichkeitspunkte zweier anderer Kreise bestimmt ist und innerhalb dieser letztern liegt, die kleinsten Sehnen dieser Kreise, so sind die Mittelpunktswinkel gleich, welche zu diesen Sehnen gehören.

Ist (Taf. I. Fig. 13.) x der Punkt, durch den die kleinsten Sehnen $ss_{,}$ und $SS_{,}$ der Kreise m und M gezogen sind, so ist

$$\Delta xsm \sim \Delta xSM,$$

weil dieselben rechtwinklig sind und nach §. 1. die Proportion

$$xm : xM = ms : MS$$

stattfindet. Deshalb ist $\angle smx = \angle SMx$ und daher auch $\angle sms_{,} = \angle SMS_{,}$.

β) Sind die Mittelpunktswinkel der kleinsten Sehnen zweier sich schneidender Kreise für einen Punkt, welcher innerhalb beider liegt, einander gleich, so liegt dieser Punkt auf der Peripherie des Kreises, der durch die Aehnlichkeitspunkte jener Kreise bestimmt ist.

Bezeichnet (Taf. I. Fig. 13.) x den Punkt, durch welchen die kleinsten Sehnen $ss_{,}$ und $SS_{,}$ für die Kreise m und M gezogen sind, so ist

$$\Delta xsm \backsim \Delta xSM,$$

da dieselben rechtwinklig sind und $\angle smx = \angle SMx$ ist. Alsdann folgt

$$xm : xM = ms : MS$$
$$= r : R$$

und es liegt deshalb nach §. 2. x auf der Peripherie des Kreises, welcher durch die Aehnlichkeitspunkte der Kreise m und M bestimmt ist.

§. 5.

Der durch die Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise bestimmte Kreis werde nunmehr der in §. 3. und §. 4. nachgewiesenen Eigenschaften wegen, und der kürzeren Bezeichnung halber, der Isogonalkreis jener Kreise genannt.

§. 6.

α) Hat der Isogonalkreis zweier Kreise mit einem derselben einen Punkt gemein, so hat er denselben Punkt auch mit dem andern gemein.

Denn ist x der Punkt, den der Isogonalkreis mit dem Kreise vom Mittelpunkt M gemein hat, so ist, wenn man den Mittelpunkt m des andern Kreises mit x verbindet,

$$xm : xM = r : R,$$

und da $xM = R$, so muss auch $xm = r$ sein, d. h. der Punkt x muss auch auf der Peripherie des Kreises vom Mittelpunkt m liegen.

β) Haben zwei Kreise keinen Punkt gemein, so hat auch ihr Isogonalkreis mit keinem derselben einen Punkt gemein.

γ) Schneiden sich zwei Kreise, so schneidet ihr Isogonalkreis beide in den gemeinsamen Durchschnittspunkten.

δ) Berühren sich zwei Kreise, so berührt ihr Isogonalkreis beide in dem gemeinsamen Berührungspunkt.

§. 7.

α) Der Radius des Isogonalkreises zweier Kreise ist die mittlere Proportionale des Abstandes seiner Mitte von der Mitte jener Kreise.

Ist (Taf. I. Fig. 11.) O die Mitte des Isogonalkreises zweier Kreise von den Mittelpunkten m und M, so sind diese ein Paar und die Aehnlichkeitspunkte A und J das andere Paar zugeordneter harmonischer Punkte. Deshalb ist, wenn $\varrho = \frac{AJ}{2}$ den Radius des Isogonalkreises bezeichnet,

$$\left(\frac{AJ}{2}\right)^2 = Om.OM,$$

$$\varrho^2 = Om.OM.$$

β) Die Abstände der Mittelpunkte zweier Kreise von dem Mittelpunkte ihres Isogonalkreises verhalten sich wie die Quadrate der Radien jener Kreise. Es ist nach vorigem Satze:

$$AO^2 = Om.OM,$$

oder

$$Om : AO = AO : OM.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{Om + AO}{Om} = \frac{AO + OM}{AO},$$

$$\frac{mA}{Om} = \frac{MA}{AO},$$

daher

$$Om = AO.\frac{mA}{MA},$$

und, weil

$$\frac{mA}{MA} = \frac{r}{R},$$

auch

$$\text{I.} \quad Om = AO.\frac{r}{R}.$$

Ferner folgt aus jener Proportion:

$$\frac{Om + AO}{AO} = \frac{AO + OM}{OM},$$

$$\frac{mA}{AO} = \frac{MA}{OM},$$

daher

$$OM = AO.\frac{MA}{mA},$$

oder

$$\text{II.}\quad OM = AO.\frac{R}{r}.$$

Durch Division von I. und II. ergibt sich dann:

$$Om : OM = r^2 : R^2.$$

γ) Bezeichnet a die Centrale der Kreise von den Radien r und R und ϱ den Radius ihres Isogonalkreises, so ist

$$\varrho = \frac{arR}{R^2 - r^2}.$$

Es ist (Taf. I. Fig. 11.) $AO = \varrho$, $Mm = a$ und daher

$$a = MO - mO$$
$$= \frac{R}{r} \cdot AO - \frac{r}{R} \cdot AO$$
$$= \frac{R^2 - r^2}{rR} \cdot \varrho;$$

also

$$\varrho = \frac{arR}{R^2 - r^2}.$$

§. 8.

α) Die Mittelpunkte zweier Kreise sind Pole ihres Isogonalkreises. (§. 7., α).)

β) Der Isogonalkreis schneidet jeden Kreis, der durch die Mitten seiner Kreise geht, rechtwinklig. (§. 7., α).)

§. 9.

α) Hat die Chordale zweier Kreise einen Punkt mit dem Isogonalkreise derselben gemein, so hat sie denselben Punkt mit deren Kreisen gemein.

Ist x der Punkt, den die Chordale und der Isogonalkreis gemein haben, so ist, weil derselbe auf der Chordale liegt,

$$Mx^2 - mx^2 = R^2 - r^2,$$

und weil derselbe auf dem Isogonalkreise liegt:

$$Mx : mx = R : r,$$

und hieraus:

$$\frac{Mx^2 - mx^2}{mx^2} = \frac{R^2 - r^2}{r^2}.$$

Deshalb ist $mx = r$ und der Punkt liegt auf dem Kreise vom Radius r. Derselbe liegt auch auf dem Kreise vom Radius R, weil er auf der Chordale beider Kreise und einem derselben liegt.

β) Hat die Chordale zweier Kreise keinen Punkt mit denselben gemein, so hat sie auch keinen Punkt mit dem Isogonalkreise dieser Kreise gemein. (Aus α).)

γ) Hat die Chordale zweier Kreise keinen Punkt mit dem Isogonalkreise dieser Kreise gemein, so haben die Kreise keinen Punkt mit einander gemein. (Aus α).)

§. 10.

α) Drei Kreise haben drei Isogonalkreise.

β) Haben zwei der drei Isogonalkreise dreier Kreise einen Punkt gemein, so hat der dritte denselben Punkt mit ihnen gemein.

Die drei Kreise seien durch ihre Mitten M, M', M'', ihre Radien beziehlich durch r, $r_{,}$, $r_{,,}$ bezeichnet. Der Isogonalkreis für M und M' sei MM', der für M und M'' sei MM'' und der für M' und M'' sei $M'M''$. Haben die Isogonalkreise MM' und MM'' einen Punkt x gemein, so finden die Proportionen statt:

$$Mx : M'x = r : r_{,}$$

$$M''x : Mx = r_{,,} : r$$

und daher

$$M''x : M'x = r_{,,} : r_{,}.$$

Wegen der letztern Proportion liegt alsdann nach §. 2. der Punkt x auf dem Isogonalkreise $M'M''$.

γ) Die Isogonalkreise dreier Kreise können nicht zusammenfallen.

Fielen zwei der Isogonalkreise zusammen, so müsste wegen des vorigen Satzes auch der dritte mit ihnen zusammenfallen. Dann fielen aber die drei äussern Aehnlichkeitspunkte in einen

Punkt und die drei innern Aehnlichkeitspunkte in einen andern Punkt. Die drei Kreise hätten alsdann nur zwei Aehnlichkeitspunkte und es müssten deshalb zwei derselben zusammenfallen. Dann würden aber nicht drei, sondern zwei Kreise vorliegen.

§. 11.

Die Isogonalkreise dreier Kreise schneiden sich entweder in zwei Punkten oder berühren sich in einem Punkt, oder haben keinen Punkt gemein.

Schneiden sich zwei der Isogonalkreise, so hat der dritte die Schnittpunkte nach §. 10., β) mit ihnen gemein und er kann nicht mit einem derselben zusammenfallen, da sonst alle drei zusammenfallen müssten, was nicht möglich ist.

Berühren sich zwei der Isogonalkreise, so hat der dritte den Berührungspunkt mit ihnen gemein, und er kann keinen derselben schneiden, oder mit einem derselben zusammenfallen, da sonst die ersten sich schneiden oder in einander fallen müssten, was nicht möglich ist.

Haben endlich zwei der Isogonalkreise keinen Punkt mit ein ander gemein, so kann auch der dritte mit keinem derselben einen Punkt gemein haben. Denn wäre dies der Fall, so müssten die beiden ersten dieselben Punkte mit dem dritten, also auch mit einander gemein haben.

§. 12.

α) Schneiden sich drei Kreise in zwei Punkten, so schneiden sich ihre Isogonalkreise in denselben Punkten. (§. 6., γ).)

β) Berühren sich drei Kreise in einem Punkte, so berühren sich ihre Isogonalkreise in demselben Punkte. (§. 6., δ).)

γ) Schneidet von drei Kreisen jeder den andern, so schneiden sich ihre Isogonalkreise.

Denn es schneiden sich alsdann zwei der Isogonalkreise und deshalb nach §. 11. alle drei.

§. 13.

α) Werden zu den drei Isogonalkreisen dreier Kreise die Isogonalkreise gedacht, so mögen diese die Isogonalkreise

zweiter Ordnung in Bezug auf die ursprünglich angenommenen drei Kreise heissen. Die Isogonalkreise dreier Isogonalkreise zweiter Ordnung heissen alsdann die Isogonalkreise dritter Ordnung u. s. f.

β) Schneiden sich die drei Isogonalkreise irgend einer Ordnung in zwei Punkten, oder berühren sich dieselben in einem Punkte, so schneiden sich beziehlich die Isogonalkreise aller folgenden Ordnungen in denselben Punkten oder berühren sich in demselben Punkte (§. 12. α) und β)).

§. 14.

Die Mittelpunkte der Isogonalkreise dreier Kreise liegen in gerader Linie.

Die Mittelpunkte der Kreise (Taf. I. Fig. 14.) seien M, M' und M'', ihre Radien beziehlich r, $r_{\prime}$ und $r_{\prime\prime}$; ferner sei P der Mittelpunkt des Isogonalkreises zu M und M', P' der Mittelpunkt des Isogonalkreises zu M und M'' und P'' der Mittelpunkt des Isogonalkreises zu M' und M''. Legt man durch die Mittelpunkte zweier Isogonalkreise, etwa durch P und P'', eine gerade Linie und zieht von den Mittelpunkten der Kreise drei parallele Linien Mm, $M'm'$, $M''m''$, deren Schnittpunkte mit dieser Geraden m, m' und m'' sind, so ist, wie leicht erhellet:

$$PM : PM' = r^2 : r_{\prime}^2,$$

mithin

$$Mm : M'm' = r^2 : r_{\prime}^2$$

und

$$M'm' : M''m'' = r_{\prime}^2 : r_{\prime\prime}^2,$$

also

$$Mm : M''m'' = r^2 : r_{\prime\prime}^2.$$

Es ist aber auch

$$r^2 : r_{\prime\prime}^2 = P'M : P'M'',$$

mithin

$$Mm : M''m'' = P'M : P'M'',$$

woraus folgt, dass P' auf der Geraden PP'' liegt.

XVI.

Ueber einige goniometrische Formeln.

Von

Herrn Doctor *Wiegers*

zu Berlin.

1.

Man hat

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$$
$$-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

oder, indem man zur Abkürzung

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma=\lambda,$$
$$\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma=\lambda_1,$$
$$\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma=\lambda_2,$$
$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\mu$$

setzt:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\lambda+\lambda_1+\lambda_2-\mu.$$

Daraus folgt:

$$\sin(\alpha+\beta-\gamma)=\lambda+\lambda_1-\lambda_2+\mu,$$
$$\sin(\alpha-\beta+\gamma)=\lambda-\lambda_1+\lambda_2+\mu,$$
$$\sin(-\alpha+\beta+\gamma)=-\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\mu,$$
$$-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=-\lambda-\lambda_1-\lambda_2+\mu;$$

mithin:

$$\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(-\alpha+\beta+\gamma)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\mu,$$

(q)

$$\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(-\alpha+\beta+\gamma)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Setzt man

$$\alpha+\beta-\gamma=p,$$
$$\alpha-\beta+\gamma=q,$$
$$-\alpha+\beta+\gamma=r;$$

so erhält man:

$$\alpha+\beta+\gamma=p+q+r,$$

$$\alpha=\frac{p+q}{2},\quad \beta=\frac{p+r}{2},\quad \gamma=\frac{q+r}{2},$$

und die Gleichung (q) geht über in die folgende:

$$\sin p+\sin q+\sin r$$
$$=4\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p+r}{2}\sin\frac{q+r}{2}+\sin(p+q+r),$$

oder, wenn man $p+q+r=\sigma$ setzt, in:

(I) $$\sin p+\sin q+\sin r$$
$$=4\sin\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{r}{2}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{q}{2}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{p}{2}\right)+\sin\sigma.$$

2.

Es ist:

$$\operatorname{tg}p+\operatorname{tg}q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}$$
$$=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q},$$

folglich:

$$\operatorname{tg}p+\operatorname{tg}q+\operatorname{tg}r=\frac{\sin(p+q)\cos r+\cos p\cos q\sin r}{\cos p\cos q\cos r}$$

$$=\frac{\sin(p+q)\cos r+\cos(p+q)\sin r+\cos p\cos q\sin r-\cos(p+q)\sin r}{\cos p\cos q\cos r},$$

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q + \operatorname{tg} r = \frac{\sin(p+q+r) + \sin p \sin q \sin r}{\cos p \cos q \cos r},$$

oder, wenn man $p+q+r=\sigma$ setzt:

$$\text{(II)} \quad \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q + \operatorname{tg} r = \operatorname{tg} p \operatorname{tg} q \operatorname{tg} r + \frac{\sin\sigma}{\cos p \cos q \cos r}.$$

3.

Aus (I) folgt, indem man statt r setzt $(2R+r)$:

$$\text{(III)} \quad \sin p + \sin q - \sin r$$
$$= 4 \sin\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{q}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{p}{2}\right) - \sin\sigma,$$

und, indem man in (I), (II) und (III) statt der Winkel p, q, r ihre Complemente einführt, erhält man der Reihe nach:

$$\text{(IV)} \quad \cos p + \cos q + \cos r$$
$$= 4 \cos\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{q}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{p}{2}\right) - \cos\sigma,$$

$$\text{(V)} \quad \cot p + \cot q + \cot r = \cot p \cot q \cot r - \frac{\cos\sigma}{\sin p \sin q \sin r},$$

$$\text{(VI)} \quad \cos p + \cos q - \cos r$$
$$= 4 \cos\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{2}\right) \sin\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{q}{2}\right) \sin\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{p}{2}\right) + \cos\sigma.$$

4.

Die Gleichungen (I) bis (VI) lassen erkennen, wann ein Aggregat von drei gleichartigen trigonometrischen Functionen sich als ein Product darstellen lässt. Es hängt dies lediglich von der zweiten Grösse rechts vom Gleichheitszeichen ab, welche in den Gleichungen (I), (II), (III) verschwindet, wenn σ ein gerades Vielfaches von einem R; in den Gleichungen (IV), (V), (VI) dagegen, wenn σ ein ungerades Vielfaches von einem R ist. So ergeben sich z. B. für die Annahme $\alpha+\beta+\gamma=2R$ die bekannten Formeln:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,$$

$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} = 4\cos\left(\frac{R}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{R}{2}-\frac{\beta}{4}\right)\cos\left(\frac{R}{2}-\frac{\gamma}{4}\right),$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\gamma}{2} = 4\sin\left(\frac{R}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{R}{2}-\frac{\beta}{4}\right)\cos\left(\frac{R}{2}-\frac{\gamma}{4}\right).$$

5.

Es ist

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \begin{cases} \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\delta \\ + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos\delta - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\sin\delta \\ + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\cos\delta - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma\sin\delta \\ + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\delta - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta, \end{cases}$$

oder, indem man zur Abkürzung:

$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta = \lambda,$	$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\delta = \mu,$
$\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos\delta = \lambda_1,$	$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\sin\delta = \mu_1,$
$\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\cos\delta = \lambda_2,$	$\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma\sin\delta = \mu_2,$
$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\delta = \lambda_3,$	$\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta = \mu_3$

setzt:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \mu - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3.$$

Daraus folgt:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma-\delta) = \lambda + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \mu + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3,$$

$$\sin(\alpha+\beta-\gamma+\delta) = \lambda + \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \mu - \mu_1 + \mu_2 + \mu_3,$$

$$\sin(\alpha-\beta+\gamma+\delta) = \lambda - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \mu + \mu_1 - \mu_2 + \mu_3,$$

$$\sin(\alpha-\beta-\gamma-\delta) = \lambda - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \mu - \mu_1 - \mu_2 + \mu_3,$$

mithin:

(q′)

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma-\delta)+\sin(\alpha+\beta-\gamma+\delta)+\sin(\alpha-\beta+\gamma+\delta)+\sin(\alpha-\beta-\gamma-\delta)$$

$$=4\lambda+4\mu_3$$

$$=4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta+4\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta.$$

Es sei nun:

$$\alpha+\beta+\gamma-\delta=p,$$

$$\alpha+\beta-\gamma+\delta=q,$$

$$\alpha-\beta+\gamma+\delta=r,$$

$$\alpha-\beta-\gamma-\delta=t;$$

so findet man:

$$\alpha=\frac{p+q+r+t}{4},$$

$$\beta=\frac{p+q-r-t}{4},$$

$$\gamma=\frac{p-q+r-t}{4},$$

$$\delta=\frac{-p+q+r-t}{4},$$

und, wenn man jetzt $p+q+r+t=\sigma$ setzt, so giebt die Gleichung (q′):

(VII) $$\sin p+\sin q+\sin r+\sin t$$

$$=\begin{cases}4\sin\frac{\sigma}{4}\cos\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{r+t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{q+t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{p+t}{2}\right)\\+4\cos\frac{\sigma}{4}\sin\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{r+t}{2}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{q+t}{2}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{p+t}{2}\right).\end{cases}$$

6.

Aus der Gleichung

$$\sin(p+q+r+t)=\left\{\begin{array}{l}\sin p\cos q\cos r\cos t-\sin p\sin q\sin r\cos t\\ +\cos p\sin q\cos r\cos t-\sin p\sin q\cos r\sin t\\ +\cos p\cos q\sin r\cos t-\sin p\cos q\sin r\sin t\\ +\cos p\cos q\cos r\sin t-\cos p\sin q\sin r\sin t\end{array}\right.$$

folgt, indem man dieselbe durch $\cos p\cos q\cos r\cos t$ dividirt:

$$(q'')\qquad \operatorname{tg}p+\operatorname{tg}q+\operatorname{tg}r+\operatorname{tg}t=\frac{\sin(p+q+r+t)}{\cos p\cos q\cos r\cos t}$$
$$+\operatorname{tg}p\operatorname{tg}q\operatorname{tg}r+\operatorname{tg}p\operatorname{tg}q\operatorname{tg}t+\operatorname{tg}p\operatorname{tg}r\operatorname{tg}t+\operatorname{tg}q\operatorname{tg}r\operatorname{tg}t.$$

Die Gleichung (II) giebt nun:

$$\operatorname{tg}p+\operatorname{tg}q+\operatorname{tg}r=\frac{\sin(p+q+r)}{\cos p\cos q\cos r}+\operatorname{tg}p\operatorname{tg}q\operatorname{tg}r,$$

$$\operatorname{tg}p+\operatorname{tg}q+\operatorname{tg}t=\frac{\sin(p+q+t)}{\cos p\cos q\cos t}+\operatorname{tg}p\operatorname{tg}q\operatorname{tg}t,$$

$$\operatorname{tg}p+\operatorname{tg}r+\operatorname{tg}t=\frac{\sin(p+r+t)}{\cos p\cos r\cos t}+\operatorname{tg}p\operatorname{tg}r\operatorname{tg}t,$$

$$\operatorname{tg}q+\operatorname{tg}r+\operatorname{tg}t=\frac{\sin(q+r+t)}{\cos q\cos r\cos t}+\operatorname{tg}q\operatorname{tg}r\operatorname{tg}t;$$

mithin ist:

$$3\operatorname{tg}p+3\operatorname{tg}q+3\operatorname{tg}r+3\operatorname{tg}t$$
$$=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left\{\begin{array}{l}\sin(p+q+r)\cos t+\sin(p+q+t)\cos r\\ +\sin(p+r+t)\cos q+\sin(q+r+t)\cos p\end{array}\right\}}{\cos p\cos q\cos r\cos t}\\ +\operatorname{tg}p\operatorname{tg}q\operatorname{tg}r+\operatorname{tg}p\operatorname{tg}q\operatorname{tg}t+\operatorname{tg}p\operatorname{tg}r\operatorname{tg}t+\operatorname{tg}q\operatorname{tg}r\operatorname{tg}t.\end{array}\right.$$

Subtrahirt man von der vorstehenden Gleichung die Gleichung (q''), so erhält man:

$$2\operatorname{tg}p+2\operatorname{tg}q+2\operatorname{tg}r+2\operatorname{tg}t$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left\{\begin{array}{l}\sin(p+q+r)\cos t+\sin(p+q+t)\cos r\\+\sin(p+r+t)\cos q+\sin(q+r+t)\cos p\end{array}\right\}}{\cos p\cos q\cos r\cos t}\\-\dfrac{\sin(p+q+r+t)}{\cos p\cos q\cos r\cos t},\end{array}\right.$$

oder, indem man wieder $p+q+r+t=\sigma$ setzt:

$$2\operatorname{tg}p+2\operatorname{tg}q+2\operatorname{tg}r+2\operatorname{tg}t$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin(\sigma-t)\cos t+\sin(\sigma-r)\cos r+\sin(\sigma-q)\cos q+\sin(\sigma-p)\cos p}{\cos p\cos q\cos r\cos t}\\-\dfrac{\sin\sigma}{\cos p\cos q\cos r\cos t}\end{array}\right.$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin\sigma(\cos t^2+\cos r^2+\cos q^2+\cos p^2)}{\cos p\cos q\cos r\cos t}\\-\dfrac{\cos\sigma(\sin t\cos t+\sin r\cos r+\sin q\cos q+\sin p\cos p)}{\cos p\cos q\cos r\cos t}\\-\dfrac{\sin\sigma}{\cos p\cos q\cos r\cos t}\end{array}\right.$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin\sigma(\cos 2t+\cos 2r+\cos 2q+\cos 2p)}{2\cos p\cos q\cos r\cos t}\\-\dfrac{\cos\sigma(\sin 2t+\sin 2r+\sin 2q+\sin 2p)}{2\cos p\cos q\cos r\cos t}\\+\dfrac{\sin\sigma}{\cos p\cos q\cos r\cos t}\end{array}\right.$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin(\sigma-2t)+\sin(\sigma-2r)+\sin(\sigma-2q)+\sin(\sigma-2p)}{2\cos p\cos q\cos r\cos t}\\+\dfrac{\sin\sigma}{\cos p\cos q\cos r\cos t},\end{array}\right.$$

und durch Anwendung der Formel (VII):

(VIII) $$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q + \operatorname{tg} r + \operatorname{tg} t$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sin\frac{\sigma}{2}\cos\left(\frac{\sigma}{2}-\overline{r+t}\right)\cos\left(\frac{\sigma}{2}-\overline{q+t}\right)\cos\left(\frac{\sigma}{2}-\overline{p+t}\right)}{\cos p\cos q\cos r\cos t} \\ -\dfrac{\cos\frac{\sigma}{2}\sin\left(\frac{\sigma}{2}-\overline{r+t}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{2}-\overline{q+t}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{2}-\overline{p+t}\right)}{\cos p\cos q\cos r\cos t} \\ +\dfrac{\sin\sigma}{2\cos p\cos q\cos r\cos t}. \end{array} \right.$$

7.

Führt man in (VII) und (VIII) statt der Winkel p, q, r, t ihre Complemente ein, so erhält man:

(IX) $$\cos p + \cos q + \cos r + \cos t$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 4\cos\frac{\sigma}{4}\cos\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{r+t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{q+t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{p+t}{2}\right) \\ -4\sin\frac{\sigma}{4}\sin\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{r+t}{2}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{q+t}{2}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{p+t}{2}\right), \end{array} \right.$$

(X) $$\cot p + \cot q + \cot r + \cot t$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sin\frac{\sigma}{2}\cos\left(\frac{\sigma}{2}-\overline{r+t}\right)\cos\left(\frac{\sigma}{2}-\overline{q+t}\right)\cos\left(\frac{\sigma}{2}-\overline{p+t}\right)}{\sin p\sin q\sin r\sin t} \\ -\dfrac{\cos\frac{\sigma}{2}\sin\left(\frac{\sigma}{2}-\overline{r+t}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{2}-\overline{q+t}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{2}-\overline{p+t}\right)}{\sin p\sin q\sin r\sin t} \\ -\dfrac{\sin\sigma}{2\sin p\sin q\sin r\sin t}. \end{array} \right.$$

Indem man in (VII) und (IX) statt t setzt $(2R+t)$, folgt:

(XI) $\sin p + \sin q + \sin r - \sin t$

$$= \left\{ \begin{aligned} & 4\sin\frac{\sigma+2R}{4}\cos\left(\frac{\sigma-2R}{4}-\frac{r+t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sigma-2R}{4}-\frac{q+t}{2}\right) \\ & \qquad \times\cos\left(\frac{\sigma-2R}{4}-\frac{p+t}{2}\right) \\ & + 4\cos\frac{\sigma+2R}{4}\sin\left(\frac{\sigma-2R}{4}-\frac{r+t}{2}\right)\sin\left(\frac{\sigma-2R}{4}-\frac{q+t}{2}\right) \\ & \qquad \times\sin\left(\frac{\sigma-2R}{4}-\frac{p+t}{2}\right), \end{aligned} \right.$$

(XII) $\cos p + \cos q + \cos r - \cos t$

$$= \left\{ \begin{aligned} & 4\cos\frac{\sigma+2R}{4}\cos\left(\frac{\sigma-2R}{4}-\frac{r+t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sigma-2R}{4}-\frac{q+t}{2}\right) \\ & \qquad \times\cos\left(\frac{\sigma-2R}{4}-\frac{p+t}{2}\right) \\ & - 4\sin\frac{\sigma+2R}{4}\sin\left(\frac{\sigma-2R}{4}-\frac{r+t}{2}\right)\sin\left(\frac{\sigma-2R}{4}-\frac{q+t}{2}\right) \\ & \qquad \times\sin\left(\frac{\sigma-2R}{4}-\frac{p+t}{2}\right). \end{aligned} \right.$$

Wenn man ausserdem statt r setzt $(2R + r)$, folgt:

(XIII) $\sin p + \sin q - \sin r - \sin t$

$$= \left\{ \begin{aligned} & 4\cos\frac{\sigma}{4}\sin\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{r+t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{q+t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{p+t}{2}\right) \\ & + 4\sin\frac{\sigma}{4}\cos\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{r+t}{2}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{q+t}{2}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{p+t}{2}\right), \end{aligned} \right.$$

(XIV) $\cos p + \cos q - \cos r - \cos t$

$$= \left\{ \begin{aligned} & - 4\sin\frac{\sigma}{4}\sin\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{r+t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{q+t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{p+t}{2}\right) \\ & + \cos\frac{\sigma}{4}\cos\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{r+t}{2}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{q+t}{2}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{4}-\frac{p+t}{2}\right). \end{aligned} \right.$$

8.

Für die Annahme $\sigma = p + q + r + t = 4R$ giebt

die Gl. (VII): $\sin p + \sin q + \sin r + \sin t = 4 \sin\frac{r+t}{2} \sin\frac{q+t}{2} \sin\frac{p+t}{2}$, (g)

„ „ (VIII): $\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q + \operatorname{tg} r + \operatorname{tg} t = \frac{\sin(r+t)\sin(q+t)\sin(p+t)}{\cos p \cos q \cos r \cos t}$,

„ „ (IX): $\cos p + \cos q + \cos r + \cos t = -4\cos\frac{r+t}{2} \cos\frac{q+t}{2} \cos\frac{p+t}{2}$,

„ „ (X): $\cot p + \cot q + \cot r + \cot t = \frac{\sin(r+t)\sin(q+t)\sin(p+t)}{\sin p \sin q \sin r \sin t}$,

„ „ (XIII): $\sin p + \sin q - \sin r - \sin t = 4 \sin\frac{r+t}{2} \cos\frac{q+t}{2} \cos\frac{p+t}{2}$,

„ „ (XIV): $\cos p + \cos q - \cos r - \cos t = -4\cos\frac{r+t}{2} \sin\frac{q+t}{2} \sin\frac{p+t}{2}$,

„ „ (VIII)': $\operatorname{tg}\frac{p}{2} + \operatorname{tg}\frac{q}{2} + \operatorname{tg}\frac{r}{2} + \operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{\sin\frac{r+t}{2} \sin\frac{q+t}{2} \sin\frac{p+t}{2}}{\cos p \cos q \cos r \cos t}$,

„ „ (X): $\cot\frac{p}{2} + \cot\frac{q}{2} + \cot\frac{r}{2} + \cot\frac{t}{2} = \frac{\sin\frac{r+t}{2} \sin\frac{q+t}{2} \sin\frac{p+t}{2}}{\sin p \sin q \sin r \sin t}$, (g')

„ „ (XI): $\sin\frac{p}{2} + \sin\frac{q}{2} + \sin\frac{r}{2} - \sin\frac{t}{2} = 4\cos\frac{r+t}{4} \cos\frac{q+t}{4} \cos\frac{p+t}{4}$, (g'')

„ „ (XII): $\cos\frac{p}{2} + \cos\frac{q}{2} + \cos\frac{r}{2} - \cos\frac{t}{2} = 4 \sin\frac{r+t}{4} \sin\frac{q+t}{4} \sin\frac{p+t}{4}$.

9.

Aufgabe. Der Umfang u und die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eines um einen Kreis beschriebenen Vierecks seien gegeben. Man sucht den Radius ϱ des Kreises, den Inhalt J und die Seiten des Vierecks.

Der eingeschriebene Kreis bestimmt durch seine Berührungspunkte auf je zwei gegenüberliegenden Seiten des Vierecks vier Abschnitte a, b, c, d, welche beziehungsweise den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ anliegen. Man hat nun:

$$(\varrho) \qquad \varrho = \frac{a}{\cot\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{\cot\frac{\beta}{2}} = \frac{c}{\cot\frac{\gamma}{2}} = \frac{d}{\cot\frac{\delta}{2}},$$

woraus folgt:

$$\varrho=\frac{a+b+c+d}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\delta}{2}},$$

oder, mit Anwendung der Formel (g'),

$$\varrho=\frac{u}{2}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\delta}{2}},$$

$$J=\frac{u^2}{4}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\delta}{2}}.$$

Zur Bestimmung der Seite $(a+b)$ hat man aus (ϱ):

$$\frac{a+b}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}}=\varrho,$$

mithin

$$a+b=\varrho.\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{u}{2}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\delta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}},$$

$$a+b=2u.\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\gamma\sin\delta}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}.$$

Man folgert hieraus sogleich:

$$b+c=2u.\frac{\sin\alpha\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\delta}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}},$$

$$c+d=2u.\frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\delta}{2}},$$

$$d+a=2u.\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin\gamma\cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\delta}{2}}.$$

10.

Aufgabe. Für ein in einen Kreis beschriebenes Viereck, dessen Seiten a, b, c, d genannt werden mögen, ist gegeben $a+b+c-d=m$; die zu den Sehnen a, b, c, d gehörigen bekannten Centriwinkel seien der Reihe nach $\alpha, \beta, \gamma, \delta$: man sucht den Radius r des Kreises, den Inhalt J und die Seiten a, b, c, d des Vierecks.

Es ist

$$2r=\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{b}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{d}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

folglich

$$2r=\frac{a+b+c-d}{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\delta}{2}},$$

und nach Formel (g''):

$$r=\frac{m}{8\cos\frac{\alpha+\delta}{4}\cos\frac{\beta+\delta}{4}\cos\frac{\gamma+\delta}{4}},$$

$$J=\frac{r^2}{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta),$$

d. h., wenn man die Gleichung (g) beachtet,

$$J=2r^2\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\sin\frac{\beta+\delta}{2}\sin\frac{\gamma+\delta}{2},$$

$$J=\frac{m^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\delta}{4}\operatorname{tg}\frac{\beta+\delta}{4}\operatorname{tg}\frac{\gamma+\delta}{4}.$$

Endlich ist:

$$a=2r\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{m\sin\frac{\alpha}{2}}{4\cos\frac{\alpha+\delta}{4}\cos\frac{\beta+\delta}{4}\cos\frac{\gamma+\delta}{4}},$$

$$b=2r\sin\frac{\beta}{2}=\frac{m\sin\frac{\beta}{2}}{4\cos\frac{\alpha+\delta}{4}\cos\frac{\beta+\delta}{4}\cos\frac{\gamma+\delta}{4}},$$

$$c=2r\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{m\sin\frac{\gamma}{2}}{4\cos\frac{\alpha+\delta}{4}\cos\frac{\beta+\delta}{4}\cos\frac{\gamma+\delta}{4}},$$

$$d=2r\sin\frac{\delta}{2}=\frac{m\sin\frac{\delta}{2}}{4\cos\frac{\alpha+\delta}{4}\cos\frac{\beta+\delta}{4}\cos\frac{\gamma+\delta}{4}}.$$

XVII.

Zusätze zu den in Theil XXXI. Heft 4. und in Theil XXXII. Heft 2. gegebenen Gränzverhältnissen und Ableitung der Formel für den Krümmungsradius.

Von

Herrn Doctor *Völler*,

Lehrer an der Realschule zu Saalfeld.

Das merkwürdige Gränzverhältniss bei ebenen Curven, welches — wie in Thl. XXXI. des Archivs bewiesen — zwischen dem von der Sehne abgeschnittenen Flächensegment und dem aus der Sehne und den Tangenten gebildeten Dreiecke besteht, ist neuerdings auch von Herrn Professor Dr. Schlömilch auf so einfache Weise abgeleitet worden, dass weder analytische Geometrie, noch Differential- und Integralrechnung, noch endlich der Taylor'sche Satz dabei in Anwendung gekommen.

Ich glaubte an diesem Orte aus zwei Gründen auf die Schlömilch'schen Deductionen zurückkommen zu müssen. Einerseits findet man daselbst mathematische Beweise für einige von mir nur a priori hingestellte Behauptungen, und andererseits lässt sich auch nach Schlömilch's eigenem Vorgange, mit Rücksicht auf die von ihm selbst gefundenen Gränzwerthe, eine Ableitung der Formel für den Krümmungsradius gewinnen, die jedenfalls der von Herrn Professor Schlömilch gegebenen in keiner Weise an Einfachheit nachsteht.

Was zunächst den ersten Punkt anbetrifft, so ist es nöthig, sich zu dessen Erörterung den Gang der Schlömilch'schen Herleitung *) zu vergegenwärtigen, wobei Taf. II. Fig. 1. zu vergleichen.

Mit Bezugnahme auf die beiden bekannten Theoreme, dass nehmlich — wenn $\varphi(x)$ die Fläche zwischen der Abscissenachse, der Curve, der festen Ordinate AB und der beweglichen, zur Abscisse $OM=x$ gehörenden Ordinate MP bedeutet **) — der Differentialquotient

$$\varphi'(x) = \lim. \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}, \quad (h = MM_1 = \Delta x)$$

einerlei ist mit der Ordinate $MP=y=f(x)$, und dass ferner der Differentialquotient

$$f'(x) = \lim. \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

die trigonometrische Tangente des Winkels $MTP=\tau$ darstellt, welchen die Berührende am Punkte P mit der Abscissenachse einschliesst, wird nun zuvörderst der Gränzwerth des von der Sehne abgeschnittenen Segments bestimmt, und es ergiebt sich aus der Formel

$$S = \tfrac{1}{2}\{f(x)+f(x+h)\}h - \{\varphi(x+h)-\varphi(x)\}$$

leicht:

$$\lim. \frac{S}{h^3} = \tfrac{1}{12}\varphi'''(x) = \tfrac{1}{12}f''(x) = \tfrac{1}{12}y''.$$

Hierauf leitet Herr Professor Schlömilch — um den Flächeninhalt des von der Sehne und den beiden Tangenten eingeschlos-

---

*) Zeitschrift für Mathematik und Physik. 4. Jahrgang.

**) Wir haben absichtlich die Schlömilch'schen Bezeichnungen beibehalten.

sehen Dreiecks bestimmen zu können — die Gränzwerthe der Winkel

$$\angle SPT = \sigma - \tau,\quad \angle SP_1T_1 = \tau_1 - \sigma \text{ und } \angle TQT_1 = \tau_1 - \tau$$

ab, wo σ der Winkel, den die Sehne PP_1, und τ_1 derjenige, den die Tangente am Punkte P_1 mit der X-Achse bildet.

Es findet sich, dass

$$\lim.\frac{\operatorname{tg}(\sigma-\tau)}{h} = \tfrac{1}{2}.\frac{y''}{1+y'^2} \text{ und } \lim.\frac{\operatorname{tg}(\tau_1-\sigma)}{h} = \tfrac{1}{2}.\frac{y''}{1+y'^2},$$

oder

$$\lim.\frac{\sin(\sigma-\tau)}{h} = \lim.\frac{\sin(\tau_1-\sigma)}{h} = \tfrac{1}{2}.\frac{y''}{1+y'^2}.$$

Ebenso:

$$\lim.\frac{\operatorname{tg}(\tau_1-\tau)}{h} = \frac{y''}{1+y'^2},$$

oder:

$$\lim.\frac{\sin(\tau_1-\tau)}{h} = \frac{y''}{1+y'^2}.$$

Die vorstehenden Gränzwerthe beweisen nun, da sich verhält

$$\lim.\frac{\sin(\sigma-\tau)}{h} : \lim.\frac{(\tau_1-\sigma)}{h} = 1:1,$$

dass das $\Delta\, PP_1Q$ bei verschwindender Sehne wirklich gleichschenklig ist, was ich bei Erörterung des Gränzverhältnisses zwischen den beiden Perpendikeln QM und qm — wovon das eine von dem Durchschnittspunkte der beiden Tangenten, das andere von dem Berührungspunkt der zur Sehne PP_1 parallel gezogenen Tangente auf die Sehne gefällt wurde — nur a priori dargethan habe.

Aus den obigen Formeln für die betreffenden Gränzwerthe leitet nun Herr Professor Schlömilch mittelst des Sinussatzes auch die Formel für den Krümmungsradius ab, indem er die Normalen in den Punkten P und P_1, welche senkrecht auf den Tangenten PQ und P_1Q stehen, sich bei verschwindender Sehne einem gemeinschaftlichen Gränzwerthe ϱ nähern lässt.

Es ergiebt sich aber auch die Formel für den Krümmungsradius einfach aus nachstehender identischer Gleichung.

Wenn nehmlich p die Höhe des von der Sehne und den Normalen gebildeten Dreiecks bedeutet, so ist, wie leicht erhellt,

$$\frac{PP_1 . p}{2} = \frac{PP_1^2 . \sin RPP_1 . \sin RP_1P}{2 \sin PRP_1},$$

d. i. mit Rücksicht auf die Voraussetzungen:

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} . p}{2} = \tfrac{1}{2} . \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2) \cos P_1PQ . \cos PP_1Q}{\sin PQP_1},$$

oder endlich:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} . p = \left\{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\} \frac{\cos(\sigma - \tau) . \cos(\tau_1 - \sigma)}{\frac{\sin(\tau_1 - \tau)}{\Delta x}}.$$

Lässt man nun die Sehne verschwindend klein werden, so wird sich die Höhe des Dreiecks immer mehr dem Krümmungsradius nähern; es wird also

$$\lim . p = \varrho$$

werden.

Mithin ergiebt sich bei'm Uebergange zu verschwindenden Dimensionen, wo $\Delta x = h$ und $\tau = \sigma = \tau_1$ wird:

$$\{1 + y'^2\}^{\frac{1}{2}} . \varrho = \frac{1 + y'^2}{\frac{y''}{1 + y'^2}},$$

d. i.

$$\varrho^2 = \frac{\{1 + y'^2\}^3}{y''^2}.$$

Es ist allerdings auf diese Weise eine Ableitung der Formel für den Krümmungshalbmesser gewonnen, die sich bei'm Unterricht, da sie nur die einfachsten trigonometrischen Relationen in Anspruch nimmt, sehr empfiehlt, und es wäre gewiss wünschenswerth, dass in ähnlicher Weise auch andere Partien der Mathematik behandelt werden möchten, namentlich solche, die sich dem elementaren Verfahren nur noch zu sehr entfremden.

XVIII.

Sur la transformation des fonctions elliptiques de la première espèce.

Par

Monsieur Dr. *G. F. W. Baehr*

à Groningue.

---

1. Si l'on fait

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c},$$

et que l'on détermine φ' d'après l'équation

$$\mathrm{Sin}(2\varphi' - \varphi) = c\,\mathrm{Sin}\,\varphi,$$

on aura

$$F(c', \varphi') = \frac{1+c}{2} F(c, \varphi),$$

où F désigne, suivant la notation de Legendre, la fonction elliptique de la première espèce.

Par ces formules la fonction $F(c, \varphi)$, c'est-à-dire celle dont l'amplitude et le module sont donnés, est réduite à une autre de la même espèce, de sorte qu'en répétant sur cette dernière indéfiniment la même opération, on obtient une suite de fonctions équivalentes, tandisque l'on forme en même temps une série ascendante de modules, qui ont l'unité pour limite; cette série, avec son prolongement dans le sens contraire, où elle sera descendante et aura zéro pour limite, est l'échelle des modules que Lagrange a découverte en 1784, et que Legendre appelle l'ancienne échelle, pour la distinguer de celle qu'il découvrit plus tard en 1825. Peu de temps après, Jacobi à fait voir, qu'on peut former une

infinité d'échelles de modules, et que par conséquent on peut d'une infinité de manières différentes transformer la fonction $F(c, \varphi)$ en une autre de la même espèce, dont le module et l'amplitude se déterminent par des opérations algébriques du module et de l'amplitude de la fonction donnée. Dans le rapport de Poisson sur l'ouvrage où Jacobi a exposé ses découvertes (Mémoires de l'Institut, Tome X. p. 79.) on lit: „l'échelle des modules que Legendre a trouvée, et qui n'était pas encore connuë de M. Jacobi, est renfermée dans la solution générale et répond au nombre trois. L'ancienne échelle n'y est pas comprise explicitement, mais elle a avec l'échelle indéterminée de M. Jacobi une très-grande analogie et peut être censée appartenir au nombre deux." Dans son Traité élémentaire des fonctions elliptiques, chap. XII., coroll. VII., p. 223., Verhulst prouve l'impossibilité de déduire l'échelle de modules de Lagrange du théorême de Jacobi, et, après avoir remarqué que par la formule qui se rapporte à ce théorême, le sinus de l'amplitude cherchée s'exprime toujours d'une manière rationnelle en fonction du sinus de l'amplitude donnée, c'est-à-dire que l'on déduit rationnellement Sin ψ de Sin φ, il ajoute: „cette proprieté a son analogue dans l'échelle de Lagrange, mais dans un sens inverse, c'est-à-dire que c'est Sin φ qui se déduit rationnellement de Sin ψ. Cette dernière remarque se trouve aussi dans le traité de Legendre, Ier supplément, §. IV., Remarques sur l'ancienne échelle des modules, n⁰. 45., p. 38."

Une transformation assez simple de l'équation entre φ' et φ fait voir la raison pourquoi l'échelle de Lagrange n'est pas comprise dans la solution générale de Jacobi, et montre en même temps qu'aussi dans l'ancienne échelle le sinus de l'amplitude cherchée (Sin ψ) se déduit rationnellement du sinus de l'amplitude donnée (Sin φ).

A cet effet on pose

$$F(c', \psi) = 2F(c', \varphi'),$$

où c' et φ' sont les mêmes que précédemment.

Alors on a, par les formules pour la duplication,

$$\operatorname{Sin}\psi = \frac{2 \operatorname{Sin}\varphi' \operatorname{Cos}\varphi' \varDelta\varphi'}{1 - c'^2 \operatorname{Sin}^4\varphi'},$$

tandisque des rélations entre φ' et φ, et c' et c, on déduit (Verhulst, Chap. IX.):

$$2\operatorname{Sin}\varphi'\operatorname{Cos}\varphi'\Delta\varphi'=\frac{\operatorname{Sin}\varphi(c\operatorname{Cos}\varphi+\Delta\varphi)^2}{1+c},$$

$$1-c'^2\operatorname{Sin}^4\varphi'=1-\frac{4c\operatorname{Sin}^4\varphi'}{(1+c)^2}=\frac{(1+c)^2-4c\operatorname{Sin}^4\varphi'}{(1+c)^2};$$

du second membre de la dernière formule on élimine φ' au moyen de

$$2\operatorname{Sin}\varphi'\operatorname{Cos}\varphi'=(c\operatorname{Cos}\varphi+\Delta\varphi)\operatorname{Sin}\varphi,$$

qui, après qu'on a pris le carré des deux membres, donne:

$$4\operatorname{Sin}^2\varphi'-4\operatorname{Sin}^4\varphi'=(c\operatorname{Cos}\varphi+\Delta\varphi)^2\operatorname{Sin}^2\varphi,$$

et, multipliant les deux membres par c,

$$4c\operatorname{Sin}^4\varphi'=4c\operatorname{Sin}^2\varphi'-c(c\operatorname{Cos}\varphi+\Delta\varphi)^2\operatorname{Sin}^2\varphi,$$

ou, en mettant pour $\operatorname{Sin}^2\varphi'$ sa valeur en φ,

$$4c\operatorname{Sin}^4\varphi'=2c(1+c\operatorname{Sin}^2\varphi-\Delta\varphi\operatorname{Cos}\varphi)-c(c\operatorname{Cos}\varphi+\Delta\varphi)^2\operatorname{Sin}^2\varphi,$$

donc

$$\begin{aligned}&(1+c)^2-4c\operatorname{Sin}^4\varphi'\\&=(1-c^2\operatorname{Sin}^2\varphi)+c^2\operatorname{Cos}^2\varphi+2c\operatorname{Cos}\varphi.\Delta\varphi+c(c\operatorname{Cos}\varphi+\Delta\varphi)^2\operatorname{Sin}^2\varphi\\&=\Delta^2\varphi+2c\operatorname{Cos}\Delta\varphi+c^2\operatorname{Cos}^2\varphi+c(c\operatorname{Cos}\varphi+\Delta\varphi)^2\operatorname{Sin}^2\varphi\\&=(c\operatorname{Cos}\varphi+\Delta\varphi)^2(1+c\operatorname{Sin}^2\varphi),\end{aligned}$$

et par suite, en substituant ceci dans $s-c'^2\operatorname{Sin}^4\varphi'$,

$$1-c'^2\operatorname{Sin}^4\varphi'=\frac{(c\operatorname{Cos}\varphi+\Delta\varphi)^2(1+c\operatorname{Sin}^2\varphi)}{(1+c)^2}.$$

Portant ces valeurs dans $\operatorname{Sin}\psi$, on obtient:

$$\operatorname{Sin}\psi=\frac{(1+c)\operatorname{Sin}\varphi}{1+c\operatorname{Sin}^2\varphi},$$

tandisque des relations entre $F(c,\varphi)$, $F(c',\varphi')$ et $F(c',\psi')$ on déduit en éliminant la deuxième,

$$F(c',\psi)=(1+c)F(c,\varphi),\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(\alpha)$$

où la rélation entre c' et c n'est pas changée, de sorte que l'échelle des modules reste la même.

Ainsi l'on voit premièrement que $\operatorname{Sin}\psi$ s'exprime rationnellement en $\operatorname{Sin}\varphi$. Posant maintenant $\operatorname{Sin}\psi=y$, $\operatorname{Sin}\varphi=x$, l'équation (α) donne par la différentiation:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}}=\frac{(1+c)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

et $\sin\psi$ devient

$$y = \frac{(1+c)x}{1+cx^2};$$

donc la transformation de Lagrange appartient à cette classe que Jacobi (Fundamenta Nova theoriae functionum ellipticarum, n°. 10., pag. 17.) a appelée paris ordinis, et où le dégré du dénominateur de la fraction rationnelle, au moyen de laquelle se fait la transformation, doit surpasser d'une unité celui du numérateur. Elle en est le cas le plus simple, et ne peut par conséquent être comprise dans la formule générale, qu'il dérive de la seconde classe de transformations, appellée par lui imparis ordinis, où c'est le numérateur dont le dégré surpasse d'une unité celui du dénominateur.

On obtient directement la transformation précédente par les formules A. de la table I., Fundamenta Nova, pag. 12. A cet effet on considère la différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(y-\frac{1}{c'})(y-1)(y+1)(y+\frac{1}{c'})}} \quad \ldots \quad (\eta)$$

de sorte que l'on a, en la comparant à celle de la table,

$$\alpha = \frac{1}{c'}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1, \quad \delta = -\frac{1}{c'},$$

lesquelles valeurs satisfont à la condition $\alpha > \beta > \gamma > \delta$; c' devant être supposé < 1. Ainsi l'on trouve:

$$L = \frac{\sqrt{(1+c')} + \sqrt{(1-c')}}{2\sqrt{c'}}, \quad N = \frac{\sqrt{(1+c')} - \sqrt{(1-c')}}{2\sqrt{c'}},$$

$$\frac{N}{L} = \frac{1-\sqrt{(1-c')}}{2c'}.$$

Les limites de $y = \sin\psi$ étant -1 et $+1$, c'est-à-dire γ et β, on devra employer la formule II., qui donne:

$$\frac{L-Nx}{L+Nx} = \sqrt{\frac{1-c'y}{1+c'y}},$$

d'où

$$y = \frac{2\frac{N}{L}x}{c'(1+\frac{N^2}{L^2}x^2)},$$

et conséquemment par la substitution de cette valeur dans (η) elle deviendra:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(L^4-N^4x^2)}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\xi)$$

donc, si l'on multiplie (η) et (ξ) par $\frac{1}{c'}$, la valeur de y satisfera aussi à

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}}=\frac{dx}{c'L^2\sqrt{(1-x^2)(1-\frac{N^4}{L^4}x^2)}}. \quad . \quad . \quad . \quad (\zeta)$$

Si maintenant on doit avoir

$$\frac{N^4}{L^4}=c^2, \quad \text{ou} \quad \frac{N}{L}=\sqrt{c},$$

on aura pour déterminer c', $\frac{1-\sqrt{(1-c')}}{c'}=\sqrt{c}$, d'où $c'=\frac{2\sqrt{c}}{1+c}$ et par suite:

$$L=\frac{1}{\sqrt[4]{4c}}, \quad c'L^2=\frac{1}{1+c};$$

substituant ces valeurs dans y et (ζ) on obtiendra les mêmes formules que précédemment.

Les valeurs de c' et $\text{Sin}\,\psi$ satisfont identiquement à l'équation

$$\frac{d\psi}{\sqrt{(1-c'^2\text{Sin}^2\psi)}}=\frac{(1+c)\,d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\text{Sin}^2\varphi)}},$$

donc si l'on pose: $\text{Sin}\,\psi=\sqrt{-1}\,.\,\text{Tang}\,\tau$, $\text{Sin}\,\varphi=\sqrt{-1}\,.\,\text{Tang}\,\sigma$, on trouve que

$$\text{Tang}\,\tau=\frac{(1+c)\,\text{Tang}\,\sigma}{1-c\,\text{Tang}^2\sigma}$$

doit satisfaire identiquement à

$$\frac{d\tau}{\sqrt{\{1-(1-c'^2)\text{Sin}^2\tau\}}}=\frac{(1+c)\,d\sigma}{\sqrt{\{1-(1-c^2)\text{Sin}^2\sigma\}}}$$

ou, si b et b' sont les compléments des modules c et c', à

$$\frac{d\tau}{\sqrt{(1-b'^2\text{Sin}^2\tau)}}=\frac{(1+c)\,d\sigma}{\sqrt{(1-b^2\text{Sin}^2\sigma)}},$$

c'est-à-dire, parceque $\text{Tang}\,\tau$ donne $\tau=0$ pour $\sigma=0$, à

$$F(b',\tau)=(1+c)\,F(b,\sigma); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

il s'en suit, parceque $\text{Tang}\,\tau$ montre que l'on a $\tau=\pi$ pour $\sigma=\frac{1}{2}\pi$,

$$F(b', \pi) = (1+c)\,F(b, \tfrac{1}{2}\pi),$$

ou

$$2F(b', \tfrac{1}{2}\pi) = (1+c)\,F(b, \tfrac{1}{2}\pi); \quad \ldots\ldots \quad (\gamma)$$

mais (α) donne, ψ et φ prenant simultanément la valeur $\tfrac{1}{2}\pi$,

$$F(c', \tfrac{1}{2}\pi) = (1+c)\,F(c, \tfrac{1}{2}\pi),$$

donc, écrivant pour les fonctions complètes $F(c, \tfrac{1}{2}\pi)\ldots$ simplement $F(c)\ldots$:

$$\frac{F(c)}{F(b)} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{F(c')}{F(b')}.$$

L'équation qui donne $\mathrm{Tang}\,\tau$ en $\mathrm{Tang}\,\sigma$ montre encore que l'on a $\tau = \tfrac{1}{2}\pi$, si σ a pris la valeur donnée par l'équation

$$\mathrm{Tang}\,\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{c}};$$

substituant ces valeurs dans (β) on a:

$$F(b') = (1+c)\,F(b, \sigma_1),$$

ce qui, combiné avec (γ), donne:

$$F(b, \sigma_1) = \tfrac{1}{2}F(b).$$

On parvient ainsi, indépendamment du théorème pour l'addition, à la bissection de la fonction complète; changeant b en c, et réciproquement, on aura pour l'amplitude de la moitié de la fonction complète $F(c)$,

$$\mathrm{Tang}\,\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(1-c^2)}},$$

et par suite:

$$\mathrm{Sin}\,\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{(1+b)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\sqrt{(1-c^2)})}}, \quad \mathrm{Cos}\,\sigma_1 = \frac{\sqrt[4]{(1-c^2)}}{\sqrt{\{1+\sqrt{(1-c^2)}\}}}.$$

Si dans l'équation (β) on prend b pour donnée, et remarquant que l'on a

$$b' = \sqrt{(1-c'^2)} = \sqrt{\left\{1-\frac{4c}{(1+c)^2}\right\}} = \frac{1-c}{1+c} = \frac{1-\sqrt{(1-b^2)}}{1+\sqrt{(1-b^2)}},$$

elle peut s'écrire:

$$F\left\{\frac{1-\sqrt{(1-b^2)}}{1+\sqrt{(1-b^2)}}, \tau\right\} = (1+\sqrt{(1-b^2)})\,F(b, \sigma),$$

et $\mathrm{Tang}\,\tau$ devient:

$$\operatorname{Tang}\tau = \frac{\{1+\sqrt{(1-b^2)}\}\operatorname{Tang}\sigma}{1-\sqrt{(1-b^2)}\operatorname{Tang}^2\sigma};$$

si maintenant on prend pour b la valeur c',

$1-\sqrt{(1-b^2)}$ deviendra $1-\sqrt{(1-c'^2)} = 1-b' = 1-\frac{1-c}{1+c} = \frac{2c}{1+c}$,

$1+\sqrt{(1-b^2)}$ „ $1+\sqrt{(1-c'^2)} = \frac{2}{1+c}$;

ce qui donne, en vertu des deux dernières équations,

$$F(c,\tau) = \frac{2}{1+c}F(c',\sigma) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\delta)$$

et

$$\operatorname{Tang}\tau = \frac{2\operatorname{Tang}\sigma}{(1+c)-(1-c)\operatorname{Tang}^2\sigma} \quad . \; . \; . \; . \quad (\varepsilon)$$

ou τ et σ ne sont pas les mêmes amplitudes que dans les précédentes. En prenant dans (δ) $\sigma=\psi$ dans (α), le produit de ces équations donne:

$$F(c,\tau) = 2F(c,\varphi),$$

de sorte qu'en mettant dans (ε) pour σ la valeur de ψ, donnée par $\operatorname{Sin}\psi$, on doit obtenir la formule pour la duplication. En effet $\operatorname{Sin}\psi$ donne

$$\operatorname{Cos}\psi = \frac{\operatorname{Cos}\varphi\sqrt{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\varphi)}}{1+c\operatorname{Sin}^2\varphi} = \frac{\operatorname{Cos}\varphi.\Delta\varphi}{1+c\operatorname{Sin}^2\varphi},$$

et (ε) pouvant s'écrire, si l'on change σ en ψ,

$$\operatorname{Tang}\tau = \frac{2\operatorname{Sin}\psi\operatorname{Cos}\psi}{(1+c)\operatorname{Cos}^2\psi-(1-c)\operatorname{Sin}^2\psi},$$

on trouve, après quelques réductions,

$$\operatorname{Tang}\tau = \frac{2\operatorname{Tang}\varphi.\Delta\varphi}{1-\operatorname{Tang}^2\varphi+c^2\operatorname{Sin}^2\varphi\operatorname{Tang}^2\varphi}.$$

(Voyez Verhulst etc. pag. 42).

2. Soit l'équation différentielle

$$\frac{\mu dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

et proposons nous d'y satisfaire par la transformation paris ordinis, où le dénominateur de la fraction rationnelle s'ellève au quatrième dégré, ce qui après la précédente est la plus simple. μ et c' sont des inconnues à déterminer, avec la condition $c'<1$.

Alors on posera pour y la fraction irréductible

$$y = M\frac{x(1+Bx^2)}{1+Ax^2+Dx^4}.$$

Mais si l'on écrit dans l'équation différentielle $\frac{1}{cx}$ à la place de x, elle devient

$$\frac{\mu dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \frac{d\frac{1}{cx}}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{1}{cx}\right)^2\right\}\left\{1-c^2\left(\frac{1}{cx}\right)^2\right\}}};$$

donc si une fonction $y=f(x)$ satisfait à la première, la fonction $y=f\left(\frac{1}{cx}\right)$, où f désigne la même composition de la fonction, satisfera à la seconde; et, comme on voit, après la réduction, que les deux équations différentielles ne diffèrent pas, il faut aussi que les deux fonctions $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{cx}\right)$ soient identiquement égales, s'ils prennent simultanément la même valeur pour une valeur de x, qui est indépendante de c. Substituant dans y à la place de x la valeur $\frac{1}{cx}$, on obtient

$$y = M\frac{cBx(1+\frac{c^2}{B}x^2)}{D(1+\frac{Ac^2}{D}x^2+\frac{c^4}{D}x^4)};$$

les deux fonctions $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{cx}\right)$ s'évanouissant pour $x=0$ il faut qu'elles soient identiquement égales, ce qui exige que l'on ait:

$$\frac{c^2}{B}=B,\quad \frac{c^2}{D}=1,\quad \frac{c^4}{D}=D;$$

donc $B=c$, $D=c^2$ et A reste indéterminé, tandis que le facteur M ne change pas, car $\frac{cB}{D}=1$. On a donc

$$y = M\frac{x(1+cx^2)}{1+Ax^2+c^2x^4},$$

où il ne reste que les inconnues M et A.

Pour que la transformation reussisse il faut premièrement que le produit $(1-y^2)(1-c'^2y^2)$ devienne divisible par $(1-x^2)(1-c^2x^2)$, si on y porte pour y sa valeur en x. Ainsi un de ses quatres

facteurs devra s'évanouir pour $x=1$; mais y ne changeant pas, si on met $\frac{1}{cx}$ à la place de x, le même facteur s'évanouira aussi pour $x=\frac{1}{c}$. Supposons que ce soit le facteur $1-y$, alors on aura $y=1$, pour $x=1$, ce qui donne

$$1=M\frac{1+c}{1+A+c^2},\quad \text{parconséquent}\quad M=\frac{1+A+c^2}{1+c},$$

et ainsi

$$y=\frac{1+A+c^2}{1+c}\cdot\frac{x(1+cx^2)}{1+Ax^2+c^2x^4}.$$

Avec cette valeur on trouve:

$$1\mp y=(1\mp x)(1\mp cx)\frac{(1+c)\mp(A-2c)x+c(1+c)x^2}{(1+c)(1+Ax^2+c^2x^4)}$$

et

$$1\mp cy$$
$$=\frac{(1+c)\mp c'(1+c^2+A)x+(1+c)Ax^2-cc'(1+c^2+A)x^3+c^2(1+c)x^4}{(1+c)(1+Ax^2+c^2x^4)}.$$

Secondement il faut que le produit des fonctions dans le produit $(1-y^2)(1-c'^2y^2)$ soit un carré; ce qui exigera que le numérateur de chacune des fractions en particulier soit un carré, car on verra facilement que, y étant une fraction irréductible, les numérateurs des fractions qui sont dans le produit $(1-y^2)(1-c'^2y^2)$ n'auront pas de diviseur commun où entre x.

Pour que le numérateur de la fraction dans $1\mp y$ soit un carré, on a la seule condition

$$(A-2c)^2=4c(1+c)^2,\ \text{d'où}\ A-2c=\pm 2(1+c)\sqrt{c};$$

on voit que si le numérateur de $1\mp c'y$ est un carré, ce carré sera de la forme $(\alpha\mp\beta x+\alpha cx^2)^2$, ce qui donne

$$\alpha^2=(1+c),\quad 2\alpha\beta=c'(1+c^2+A),\quad \beta^2+2\alpha^2c=A(1+c);$$

portant la valeur de α^2 dans β^2, on obtient

$$\beta^2=(A-2c)(1+c),$$

ce qui fait voir que l'on doit avoir

$$A-2c=+2(1+c)\sqrt{c}\ \text{ et }\ A=2c+2(1+c)\sqrt{c},$$

et par conséquent

$$\beta^2=2(1+c)^2\sqrt{c};$$

ensuite $2\alpha\beta$ devient

$$2\alpha\beta = c'(1+c)(1+\sqrt{c})^2,$$

et enfin l'on obtient, par l'elimination de α et β:

$$8(1+c)^2\sqrt{c} = c'^2(1+c)(1+\sqrt{c})^4,$$

d'où

$$c'^2 = \frac{8(1+c)\sqrt{c}}{(1+\sqrt{c})^4} \quad \text{et} \quad c' = \frac{2\sqrt{2}(1+c)\sqrt[4]{c}}{(1+\sqrt{c})^2}.$$

On voit aisément que cette valeur de c' est moindre que l'unité, car on a

$$1-c'^2 = \frac{(1+\sqrt{c})^4 - 8(1+c)\sqrt{c}}{(1+\sqrt{c})^4} = \frac{(1-\sqrt{c})^4}{(1+\sqrt{c})^4}$$

donc $c'^2 < 1$ et $c' < 1$.

Si on avait supposé que le facteur $1-c'y$ s'evanouissait pour $x=1$, on aurait trouvé de la même manière:

$$c'^2 = \frac{(1+\sqrt{c})^4}{8(1+c)\sqrt{c}},$$

donc c' serait plus grand que l'unité; et la différentielle transformée ne serait pas immédiatement reductible aux fonctions elliptiques. Enfin on verra aisement qu'il est indifférent de supposer $y=\pm 1$ pour $x=1$, car si l'un a lieu pour certaine valeur de μ, l'autre aura lieu pour une valeur égale mais de signe contraire. Ainsi on aura

$$\alpha \mp \beta x + \alpha c x^2 = (1 \mp x\sqrt{2(1+c)}\sqrt[4]{c} + cx^2)\sqrt{(1+c)}$$

et

$$1\mp y = \frac{(1\mp x)(1\mp cx)(1\mp x\sqrt{c})^2}{1+Ax^2+c^2x^4}, \quad 1\mp c'y = \frac{(1\mp x\sqrt{2(1+c)}\sqrt[4]{c}+cx^2)^2}{1+Ax^2+c^2x^4},$$

ce qui donne:

$$\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}$$
$$= \frac{(1-cx^2)\{1+2x^2(c-(1+c)\sqrt{c})+c^2x^4\}}{(1+Ax^2+c^2x^4)^2}\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}.$$

Maintenant il faut encore que le facteur devant le radical $\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}$ disparaisse par la substitution de dy dans la différentielle à transformer. La valeur y donne:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+c^2+A}{1+c}\,\frac{1-(A-3c)x^2+c(A-3c)x^4-c^3x^6}{(1+Ax^2+c^2x^4)^2},$$

ou

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+c^2+A}{1+c}\frac{(1-cx^2)(1-(A-4c)x^2+c^2x^4)}{(1+Ax^2+c^2x^4)^2}.$$

Si l'on substitue ici la valeur de A, on trouvera finalement:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}}=\frac{(1+\sqrt{c})^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},\text{ donc }\mu=\frac{1}{(1+\sqrt{c})^2}$$

et

$$y=(1+\sqrt{c})^2.\frac{x(1+cx^2)}{1+2(c+(1+c)\sqrt{c})x^2+c^2x^4}.$$

3. Evidemment on obtiendra la dernière équation en appliquant deux fois de suite la transformation la plus simple; et, en répétant indéfiniment la même opération, on formera toutes les transformations paris ordinis, qui mènent à la division des fonctions F par une puissance de 2.

En général si l'on pose, en désignant par c_0, c_1, c_2, ... c_n la suite des modules croissants,

$$c_n=\frac{2\sqrt{c_{n-1}}}{1+c_{n-1}},$$

on aura:

$$F(c_n,\psi_n)=(1+c_{n-1})F(c_{n-1},\psi_{n-1})\quad\text{et}\quad\text{Sin}\,\psi_n=\frac{(1+c_{n-1})\text{Sin}\,\psi_{n-1}}{1+c_{n-1}.\text{Sin}^2\psi_{n-1}};$$

ainsi en posant:

$$\text{Sin}\,\psi_{n-1}=\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\quad\text{Sin}\,\psi_n=\frac{P_n}{Q_n},$$

$\text{Sin}\,\psi_n$ donnera:

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{(1+c_{n-1})P_{n-1}Q_{n-1}}{Q_{n-1}^2+c_{n-1}P_{n-1}^2},$$

d'où, en rémarquant que P_n et Q_n n'ont point de facteur commun,

$$P_n=(1+c_{n-1})P_{n-1}Q_{n-1},\quad.\;.\;.\;.\;.\quad(1)$$
$$Q_n=Q_{n-1}^2+c_{n-1}P_{n-1}^2;$$

prenant $P_0=\text{Sin}\,\psi_0$, $Q_0=1$, ces formules donneront successivement $\text{Sin}\,\psi_1$, $\text{Sin}\,\psi_2$ .... $\text{Sin}\,\psi_n$ en fonction de $\text{Sin}\,\psi_0$.

Si dans l'équation entre ψ_n et ψ_{n-1} on fait successivement $n=1, 2, 3, \ldots n$, le produit de ces équations particulières donnera:

$$F(c_n,\psi_n)=(1+c)(1+c_1)(1+c_2)\ldots(1+c_{n-1}).F(c,\psi_0).\quad(\theta)$$

L'équation (β) et celle qui donne $\text{Tang}\,\tau$ en $\text{Tang}\,\sigma$ donnent généralement, si l'on désigne par b_m le complément d'un module quelconque c_m de la suite des modules,

$$F(b_m, \tau_m) = (1+c_{m-1}) F(b_{m-1}, \tau_{m-1}),$$

$$\text{Tang}\,\tau_m = \frac{(1+c_{m-1})\,\text{Tang}\,\tau_{m-1}}{1-c_{m-1}\,\text{Tang}^2\tau_{m-1}}; \quad . \; . \; . \; . \quad (c)$$

si on prend maintenant dans ces équations pour b_0 la valeur de c_n,

$c_0 = \sqrt{(1-b_0^2)}$ deviendra $\sqrt{(1-c_n^2)} = \sqrt{\left(1-\frac{4c_{n-1}}{(1+c_{n-1})^2}\right)} = \frac{1-c_{n-1}}{1+c_{n-1}}$;

$c_1 = \frac{2\sqrt{c_0}}{1+c_0}$ „ $\frac{1+c_{n-1}}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{1-c_{n-1}}{1+c_{n-1}}} = \sqrt{(1-c_{n-1}^2)} = \frac{1-c_{n-2}}{1+c_{n-2}}$;

$c_2 = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1}$ „ $\sqrt{(1-c_{n-2}^2)} = \frac{1-c_{n-3}}{1+c_{n-3}}$;

et généralement

$$c_{m-1} = \sqrt{(1-c_{n-m+1}^2)} = \frac{1-c_{n-m}}{1+c_{n+m}},$$

$$b_{m-1} = \sqrt{(1-c_{m-1}^2)} = c_{n-m+1};$$

$$b_m \;\; = c_{n-m};$$

substituant donc ces valeurs dans les deux dernières équations, on aura les suivantes, où les amplitudes τ_m et τ_{m-1} ne sont pas les mêmes que précédemment:

$$F(c_{n-m}, \tau_m) = \frac{2}{1+c_{n-m}} F(c_{n-m+1}, \tau_{m-1}), \quad . \; . \quad (\varkappa)$$

$$\text{Tang}\,\tau_m = \frac{2\,\text{Tang}\,\tau_{m-1}}{(1+c_{n-m}) - (1-c_{n-m})\,\text{Tang}^2\tau_{m-1}}; \; . \; . \; . \quad (\lambda)$$

donc si l'on pose

$$\text{Tang}\,\tau_m = \frac{R_m}{S_m}, \quad \text{Tang}\,\tau_{m-1} = \frac{R_{m-1}}{S_{m-1}},$$

on trouvera

$$R_m = 2R_{m-1}\,S_{m-1}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$S_m = (1+c_{n-m})\,S_{m-1}^2 - (1-c_{n-m})\,R_{m-1}^2;$$

et si l'on prend $R_0 = 2\,\text{Tang}\,\tau_0$, $S_0 = (1+c_{n-1}) - (1-c_{n-1})\,\text{Tang}^2\tau_0$, on déterminera successivement $\text{Tang}\,\tau_1$, $\text{Tang}\,\tau_2$ .... $\text{Tang}\,\tau_n$ en fonction de $\text{Tang}\,\tau_0$.

Faisant dans l'équation ($\varkappa$) successivement $m = 1, 2, \ldots. n$, le produit des équations particulières donnera:

$$F(c_0, \tau_m) = \frac{2}{1+c_{n-1}} \cdot \frac{2}{1+c_{n-2}} \cdots \frac{2}{1+c_0} F(c_n, \tau_0), \; . \; . \quad (\mu)$$

donc, en prenant $\tau_0 = \psi_n$, le produit de (θ) et (μ) donnera

$$F(c_0, \tau_n) = 2^n F(c_0, \psi_0),$$

qui contient la multiplication par une puissance quelconque de 2. Etant donnée l'amplitude ψ_0, il faudra calculer ψ_n ou τ_0 par les formules (1), puis τ_n, qui est l'amplitude de 2^n fois la fonction donnée par les formules (2).

De l'équation (1) il suit encore que l'on a $\tau_m = 2\pi$, pour $\tau_{m-1} = \frac{1}{2}\pi$, donc, en vertu de la relation, entre $F(b_m, \tau_m)$ et $F(b_{m-1}, \tau_{m-1})$,

$$2F(b_m) = (1 + c_{m-1}) F(b_{m-1});$$

faisant successivement $m = 1, 2, 3 \ldots . n$, le produit des résultats particuliers donne: $2^n F(b_n) = (1+c_0)(1+c_1)(1+c_2) \ldots . (1+c_{n-1}) F(b_0)$, d'où, en supposant $n = \infty$, et par conséquent $c_n = 1$, $b_n = 0$, $F(b_n) = F(0) = \frac{1}{2}\pi$, on trouve pour le produit d'un nombre infini de facteurs $\frac{2}{1+c_0} \cdot \frac{2}{1+c_1} \cdot \frac{2}{1+c_2} \ldots . = \frac{F(b)}{\frac{1}{2}\pi}$.

4. On obtiendra les transformations d'ordre pair, qui mènent à la multiplication de la fonction $F(c, \varphi)$ par un nombre pair de la forme $2^n . p$, où p est impair, en combinant la transformation pair de l'ordre 2^n avec celle de l'ordre p, qui est donnée par la formule générale de Jacobi.

Pour démontrer la formule de Jacobi dans le cas particulier de $p = 3$, qui est la plus simple, on pose généralement $y = M \frac{x(1 + Ax^2)}{A + c^2x^2}$. On est conduit à cette supposition parceque l'équation différentielle ne change pas quand on y met simultanement $\frac{1}{c'y}$ à la place de y et $\frac{1}{cx}$ à la place de x; faisant cette substitution dans la valeur supposée pour y, on retrouve $y = \frac{c^3}{Mc'} \frac{x(1 + Ax^2)}{A + c^2x^2}$, et comme ces deux valeurs de y s'évanouissent avec x, il faut qu'elles soient identiquement égales, ce qui aura lieu si l'on prend

$$M = \frac{c^3}{Mc'}, \text{ d'où } c_1 = \frac{c_3}{M^2}.$$

En raisonnant comme précédemment, on trouvera qu'ici encore l'on peut supposer que le facteur $1-y$ du produit $(1-y^2)(1-c'^2y^2)$ soit divisible par $1-x$, alors on a $y = 1$, pour $x = 1$, ce qui donne:

$$1 = M \frac{1 + A}{A + c^2}, \text{ d'où } M = \frac{A + c^2}{1 + A} \text{ et } c_1 = \frac{(1 + A)^2}{(A + c^2)^2} c^3.$$

Ainsi l'on a

$$y=\frac{A+c^2}{1+A}\,\frac{x(1+Ax^2)}{A+c^2x^2};$$

cette valeur et celle de c' donnent:

$$1\mp y=(1\mp x)\frac{(1+A)A\mp(c^2-A^2)x+A(A+c^2)x^2}{(1+A)(A+c^2x^2)},$$

$$1\mp c'y=(1\mp cx)\frac{(A+c^2)A\mp c(c^2-A^2)x+Ac^2(1+A)x^2}{(A+c^2)(A+c^2x^2)}.$$

On voit qu'ici il n'y a qu'une seule condition pour que les numérateurs des fractions qui multiplient $1\mp x$ et $1\mp cx$ soient des carrés, savoir: $(c^2-A^2)^2=4A^2(1+A)(A+c^2)$, ce qui se réduit à:

$$3A^4+4(1+c^2)A^3+6c^2A^2-c^4=0. \quad . \quad . \quad (A)$$

Déterminant A par cette équation on aura:

$$1\mp y=(1\mp x)\frac{A\{\sqrt{(1+A)}\mp x\sqrt{(A+c^2)}\}^2}{(1+A)(A+c^2x^2)},$$

$$1\mp c'y=(1\mp cx)\frac{A\{\sqrt{(A+c^2)}\mp cx\sqrt{(1+A)}\}^2}{(A+c^2)(A+c^2x^2)};$$

et par conséquent:

$$\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}$$

$$=\frac{A^2\{(1+A)-(A+c^2)x^2\}\{(A+c^2)-(1+A)c^2x^2\}}{(1+A)(A+c^2)(A+c^2x^2)}\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}.$$

La valeur de y donne: $\frac{dy}{dx}=\frac{A+c^2}{1+A}\,\frac{A+(3A^2-c^2)x^2+Ac^2x^4}{(A+c^2x^2)^2}$, donc on aura:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}}$$

$$=\frac{(A+c^2)^2}{A^2}\cdot\frac{A+(3A^2-c^2)x^2+Ac^2x^4}{(1+A)(A+c^2)-\{c^2(1+A)^2+(A+c^2)^2\}x^2+c^2(1+A)(A+c^2)x^4}$$

$$\times\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

où le second facteur devant la différentielle au second membre se réduira à une constante, car en posant

$$A=C(1+A)(A+c^2),\quad 3A^2-c^2=-C\{c^2(1+A)^2+(A+c^2)^2\}$$

on a $\frac{3A^2-c^2}{A}=-\frac{c^2(1+A^2)+(A+c^2)^2}{(1+A)(A+c^2)}$, ce qui après la réduction devient la même équation que celle qui détermine A. La valeur du facteur sera donc C ou $\frac{A}{(1+A)(A+c^2)}$, et la dernière équation différentielle devient

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \frac{A+c^2}{A(1+A)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.$$

Si donc on prend $\mu = \pm \frac{A(1+A)}{A+c^2}$, la valeur $y = +\frac{A}{\mu} \frac{x(1+Ax^2)}{A+c^2x^2}$, où A est déterminé par (A), satisfera à

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \frac{+\mu dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

et l'on aura $y = \pm 1$ suivant qu'on prend dans μ le signe supérieur on inférieur. Pour faire voir que réellement ces formules s'accordent avec celles de Jacobi, nous remarquerons qu'en posant $F(c, \varphi_3) = 3F(c, \varphi_1)$ on a, par les formules pour la multiplication:

$$\text{Sin}\,\varphi_3 = \frac{3 - 4(1+c^2)\text{Sin}^2\varphi_1 + 6c^2\text{Sin}^4\varphi_1 - c^4\text{Sin}^8\varphi_1}{1 - 6c^2\text{Sin}^4\varphi_1 + 4c^2(1+c^2)\text{Sin}^6\varphi_1 - 3c^4\text{Sin}^8\varphi_1};$$

donc, si α_1 et α_2 représentent les amplitudes du tiers et de deux fois le tiers de la fonction complète $F(c)$, c'est-à-dire: si l'on a $F(c, \alpha_1) = \frac{1}{3}F(c)$, $F(c, \alpha_2) = 2F(c, \alpha_1) = \frac{2}{3}F(c) = \frac{1}{3}F(c, \pi)$, on déterminera α_2 en faisant dans la formule précédente $\varphi_3 = \pi$, $\varphi_1 = \alpha_2$, ce qui donne $0 = \{3 - 4(1+c^2)\text{Sin}^2\alpha_2 + 6c^2\text{Sin}^4\alpha_2 - c^4\text{Sin}^8\alpha_2\}\text{Sin}\,\alpha_2$, ou en laissant de côté la racine $\text{Sin}\,\alpha_2 = 0$,

$$3 - 4(1+c^2)\text{Sin}^2\alpha_2 + 6c^2\text{Sin}^4\alpha_2 - c^4\text{Sin}^8\alpha_2 = 0;$$

comparant cette équation à (A) on voit que l'on a

$$A = -\frac{1}{\text{Sin}^2\alpha_2} \text{ et par conséquent } \frac{1+A}{A+c^2} = \frac{\text{Cos}^2\alpha_2}{1 - c^2\text{Sin}^2\alpha_2};$$

mais si ψ et φ sont les amplitudes de deux fonctions complémentaires on a (Verhulst pag. 40.) $\text{Sin}^2\psi = \frac{\text{Cos}^2\psi}{\varDelta^2\varphi}$, donc, en remarquant que α_1 et α_2 sont dans ce cas, on aura $\frac{1+A}{A+c^2} = \text{Sin}^2\alpha_1$, et en suite:

$$c_1 = \frac{(1+A)^2}{(A+c^2)^2}c^3 = c^3\text{Sin}^4\alpha_1, \quad \mu = \mp\frac{\text{Sin}^2\alpha_1}{\text{Sin}^2\alpha_2},$$

$$y = \pm\frac{1}{\text{Sin}^2\alpha_2} \cdot \frac{\text{Sin}^2\alpha_2}{\text{Sin}^2\alpha_1} \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{\text{Sin}^2\alpha_2}\right)}{-\frac{1}{\text{Sin}^2\alpha_2} + c^2x^2} = \mp\frac{\text{Sin}^2\alpha_2}{\text{Sin}^2\alpha_1} \cdot \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{\text{Sin}^2\alpha_2}\right)}{1 - c^2x^2\text{Sin}^2\alpha_2},$$

où dans y et μ il faut prendre simultanément les signes supérieurs ou inférieurs. (Voyez le Traité de Legendre, Ie Supplément, §. XI. §. 67.)

XIX.

Einiges über Kettenbrüche.

Von

Herrn Dr. *J. F. König*,

Professor am Kneiphöf'schen Gymnasio zu Königsberg i. Pr.

Die folgenden Blätter enthalten die Ableitung einiger bekannten Sätze auf einem andern als dem gewöhnlichen Wege, so wie auch einige neue Formeln und Relationen zwischen einer Zahl und den Näherungswerthen ihrer Quadratwurzel, die mir der Mittheilung nicht unwerth scheinen. Der Kürze wegen habe ich die erste Periode des der Quadratwurzel einer Zahl entsprechenden Kettenbruchs gewöhnlich nicht ausgeschrieben, sondern, nach dem Vorgange Degen's in seinem Canon Pellianus, nur die Theilnenner bis zur Mitte der Periode und den mittelsten in eine Parenthese eingeschlossen, so dass z. B.

$$\sqrt{28}=5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\sqrt{28}}}}}=5;\,3,\,(2),$$

und

$$\sqrt{53}=7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\sqrt{53}}}}}}=7;\,3,\,(1,\,1)$$

gesetzt ist.

Die Buchstaben bedeuten, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt ist, durchweg ganze Zahlen.

§. 1.

Jeder von Anfang an periodisch-symmetrische Kettenbruch drückt die Quadratwurzel einer ganzen oder gebrochenen Zahl aus.

Heisst die grösste in dem Bruche enthaltene Zahl n (welches n auch $=0$ sein kann), der Näherungswerth bis ans Ende der ersten Periode (excl. $2n$) $\frac{x}{y}=\frac{ny+B}{y}$, also, da der Kettenbruch symmetrisch ist, der Nenner des vorhergehenden B, und der Näherungswerth selbst $\frac{nB+C}{B}$, so ist der Werth des Bruches:

$$X=\frac{(ny+B)(n+X)+(nB+C)}{y(n+X)+B},$$

woraus

$$X^2=\frac{n^2y+2nB+C}{y}=n^2+\frac{2nB+C}{y}=A.$$

Da die erste Potenz von X fortfällt, so hat man die allgemeine Form der ganzen oder gebrochenen Zahlen, deren Quadratwurzel dem gegebenen Kettenbruche zugehört.

Nimmt man noch den Theilnenner n hinzu und setzt den Zähler dieses Näherungswerthes bis $\frac{1}{n}=x'$, so ist:

$$x'=n^2y+2nB+C,$$

folglich

$$A=\frac{x'}{y}.$$

§. 2.

Berechnung der Kettenbrüche der Quadratwurzeln einiger Zahlen von allgemeiner Form.

1) $$\sqrt{n^2+1}=n;\ (2n).$$

Multiplicirt man mit m und setzt $n=mv$, so entsteht:

2) $$\sqrt{m^2(m^2v^2+1)}=m^2v;\ (2v)$$

und wenn man $v=m^{k-2}$ setzt:

3) $$\sqrt{m^{2k}+m^2} = m^k;\ (2m^{k-2}).$$

Für $m=2$ kann k auch $=1$ sein, sonst $k \geqq 2$

4) $$\sqrt{n^2+2} = n;\ (n).$$

Mit m multiplicirt und $n = mv$ gesetzt giebt:

5) $$\sqrt{m^2(m^2v^2+2)} = m^2v;\ (v)$$

und für $v = m^{k-2}$:

6) $$\sqrt{m^{2k}+2m^2} = m^k;\ (m^{k-2});\ (k)\ k \geqq 2$$

7) $$\sqrt{n^2-1} = n-1;\ (1).$$

Ist $n-1 = m^2v$, also $n^2-1 = m^2v(m^2v+2)$, dann wird:

8) $$\frac{\sqrt{n^2-1}}{m} = \sqrt{v(m^2v+2)} = mv;\ (m)$$

und für $v = m^{k-2}$:

9) $$\sqrt{m^{2k-2}+2m^{k-2}} = m^{k-1};\ (m)$$

k wie bei 3).

10) $$\sqrt{n^2-2} = n-1;\ 1,\ (n-2).$$

Die Wurzeln aus $n^2 \pm 3$ lassen sich nicht mehr auf ähnliche Weise in allgemeiner Form darstellen.

11) $$\sqrt{n^2+n} = n;\ (2),$$

also auch, da $n^2-n = (n-1)^2+(n-1)$,

12) $$\sqrt{n^2-n} = n-1;\ (2),$$

13) $$\sqrt{n^{2m}+n} = n^m;\ (2n^{m-1}),$$

14) $$\sqrt{n^{2m}-n} = n^m-1;\ 1,\ (2n^{m-1}-2).$$

Ist hier $m=1$, so wird $\sqrt{n^2-n} = n-1;\ 1,\ (0)$.

Dieser Kettenbruch giebt ausser den Näherungswerthen des Nr. 12) immer noch zwei; nämlich der Quotient 1 vor der Null giebt einen zu grossen und der 0 wiederholt den vorhergehenden zu kleinen.

§. 3.

Der Berechnung der allgemeinen Formen einiger Zahlen, deren Wurzeln durch allgemeine Formen von Kettenbrüchen ausgedrückt werden, möge folgende Betrachtung vorausgehen.

Nach der Bezeichnung des §. 1. ist:

$$A = n^2 + \frac{2nB + C}{y} = n^2 + m,$$

wo $m \overset{=}{<} 2n$ sein muss. Heissen nun die Quotienten des Kettenbruches ohne die Ganzen: $a, b \ldots . b, a$, so war §. 1.:

$$\frac{B}{y} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \ldots + \frac{1}{b + \frac{1}{a}}}} = 0;\ a,\ b, \ldots .\ b,\ a,$$

also ist

$$\frac{y}{B} = a;\ b, \ldots .\ b,\ a;$$

folglich, wenn man $m = 2p$ setzt:

$$n = \frac{yp - \frac{C}{2}}{B} = ap + q.$$

Eben so ist $p = bq + r$, $q = cr + s \ldots .$, $u = at \pm \frac{C}{2}$. Substituirt man immer die Werthe der folgenden Buchstaben in p, so erhält man ganz die Bildung der Näherungswerthe, mithin ist, wenn $\frac{E}{F}$ den drittletzten Näherungswerth bedeutet, das letzte

$$p = C(at \pm \frac{C}{2}) + Et = (aC + E)t \pm \frac{C^2}{2} = Bt \pm \frac{C^2}{2}$$

und

$$m = 2Bt \pm C^2.$$

Da $n = ap + q$, so wird nach demselben Bildungsgesetze das letzte

$$n = B(at \pm \frac{C}{2}) + Ft = (aB + F)t \pm \frac{BC}{2}$$

$$= yt \pm \frac{BC}{2}.$$

Die zweiten Glieder sind ($\pm$) zu nehmen, je nachdem die Anzahl der Theilnenner von a bis a $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ ist, d. h. je nachdem die Periode $\left\{\begin{matrix}\text{kein}\\ \text{ein}\end{matrix}\right\}$ mittelstes Glied hat. Wird y eine gerade Zahl, so hat man bei m und n, um keine Zahl zu überspringen, $\frac{t}{2}$ für t und dann für t jede ganze Zahl zu setzen; $t=0$ ist nur statthaft, wenn die zweiten Glieder positiv sind und $C^2 > 2B$, $\frac{BC}{2} > y$, so lange n und m positiv werden.

§. 4.

Einige nach §. 3. berechnete Werthe für n und m aus gegebenen Theilnennern.

1. Gegeben: (a)

$$n = at,\ m = 2t.$$

Für ein ungerades a ist $\frac{t}{2}$ für t zu setzen.

2. Gegeben: (a, a)

$$n = (a^2 + 1)t + \frac{a}{2},\ m = 2at + 1.$$

a darf also keine ungerade Zahl sein, wenn, wie hier immer vorausgesetzt wird, n ganz werden soll.

3. Gegeben: $a, (b)$

$$n = a(ab + 2)t - \frac{b(ab+1)}{2},\ m = 2(ab + 1)t - b^2$$

für a und b ungerade, sonst ist $\frac{t}{2}$ für t zu setzen. a gerade, b ungerade ist unzulässig.

4. Gegeben: $a, (b, b)$

$$n = ((ab+1)^2 + a^2)t + ((ab+1)b + a)\frac{b^2+1}{2},$$

$$m = 2((ab+1)b + a)t + (b^2+1)^2.$$

Es darf nicht zugleich a ungerade, b gerade sein.

5. Gegeben a, b, (c).

$$y = (ab+1)\{(ab+1)c + 2a\},$$

$$B = (ab+1)(bc+1) + ab, \quad C = b(bc+2),$$

a, b, c dürfen nicht zugleich ungerade sein, und für ein gerades c ist $\frac{t}{2}$ für t zu setzen.

6. Gegeben: a, b, (c, c)

$$y = \{(ab+1)c + a\}^2 + (ab+1)^2, \quad C = b^2 + (bc+1)^2,$$

$$B = c(ab+1)(bc+1) + a(bc+1) + b(ab+1).$$

Die Verbindungen:

a	b	c
gerade	gerade	ungerade
gerade	ungerade	ungerade
ungerade	gerade	gerade

sind unstatthaft.

7. Gegeben: a, b, c, (d)

$$y = \{(ab+1)(cd+2) + ad\}\{(ab+1)c + a\},$$

$$B = (ab+1)(bc+1)(cd+1) + ab(cd+1) + bc(ab+1) + ad,$$

$$C = (bc+1)\{2b + d(bc+1)\},$$

$\frac{t}{2}$ ist für t zu setzen, wenn 1) d gerade, oder 2) a und c ungerade, oder 3) b gerade, a und c ungerade.

n wird keine ganze Zahl für

a	b	c	d
gerade	ungerade	gerade	ungerade
ungerade	gerade	ungerade	ungerade

8. Gegeben: a, b, c, (d, d)

$$y = \{(ab+1)(cd+1)+ad\}^2 + \{(ab+1)c+a\}^2,$$
$$B = \{ab+1)(cd+1)+ad\}\{(bc+1)d+b\} + (bc+1)\{(ab+1)c+a\},$$
$$C = (bc+1)^2 + \{b+d(bc+1)\}^2.$$

Unstatthaft sind die Verbindungen:

a	b	c	d
gerade	gerade	ungerade	gerade
gerade	ungerade	gerade	gerade
ungerade	gerade	gerade	gerade
ungerade	ungerade	gerade	ungerade
ungerade	ungerade	ungerade	ungerade

$\frac{t}{2}$ ist für t zu setzen, wenn:

a	b	c	d
gerade	gerade	gerade	ungerade
gerade	ungerade	ungerade	gerade

§. 5.

Die Brüche $\frac{C}{B}$, $\frac{B}{y}$ des §. 3. lassen sich auch bloss mit Benutzung der ersten Hälfte der Periode finden. Heisst nämlich der echte Bruch $0;\ \alpha,\ \beta, \ldots. (\varkappa,\ \varkappa)$ und der letzte Näherungswerth der ersten Hälfte (bis zum ersten $\frac{1}{\varkappa}$ incl.) $\frac{m'}{N'}$, der vorletzte $\frac{m}{N}$, also in der zweiten Hälfte der Werth von $\frac{1}{\varkappa}$ bis $\frac{1}{\beta}$ incl. $\frac{m}{m'}$, und der von $\frac{1}{\varkappa}$ bis $\frac{1}{\alpha}$ incl. $\frac{N}{N'}$, so ist:

$$\frac{B}{y} = \frac{\frac{N'}{N}m' + m}{\frac{N'}{N}N' + N} = \frac{m'N' + mN}{N'^2 + N^2}$$

und

$$\frac{C}{B}=\frac{\frac{m'}{m}.m'+m}{\frac{m'}{m}N'+N}=\frac{m'^2+m^2}{m'N'+mN}.$$

Für n; α, β, ... $(2\varkappa)$ wird §. 11. der Näherungswerth bis zum zweiten $\frac{1}{\alpha}$ gefunden: $\frac{M'(N+Q)\pm 1}{N'(N+Q)}$, wenn die drei letzten bis $\frac{1}{2\varkappa}$: $\frac{M}{N}$, $\frac{M'}{N'}$, $\frac{P}{Q}$ heissen. Unser echte Bruch wird also erhalten, wenn man n abzieht und m' für $M'-nN'$ setzt, also:

$$\frac{B}{y}=\frac{m'(N+Q)\pm 1}{N'(N+Q)},$$

$\{\pm\}$ je nachdem die Anzahl der Quotienten, ohne die Ganzen, also von α bis $2\varkappa$ incl. $\left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right\}$ ist.

Setzt man 0; α, β, ... $\varkappa=\frac{S'}{T'}$, seinen Vorgänger $\frac{S}{T}$, so ist $\varkappa$ bis $\frac{1}{\beta}$ incl. $=\frac{S'}{S}$ und

$$\frac{C}{B}=\frac{(\varkappa+\frac{S'}{S})m'+m}{(\varkappa+\frac{S'}{S})N'+N}=\frac{(\varkappa S+S')m'+mS}{(\varkappa S+S')N'+NS},$$

womit in beiden Fällen y, B, C bestimmt sind.

§. 6.

Hat ein Kettenbruch, der die Quadratwurzel einer ganzen Zahl A ausdrückt, in der Mitte der Periode nur einen Theilnenner $2\varkappa$, so kann man sich die ersten Quotienten bis zum ersten $\varkappa$ incl. nicht in der Periode enthalten vorstellen und diese mit dem zweiten $\varkappa$ beginnen lassen. Offenbar ist von hier ab der Kettenbruch dann auch periodisch-symmetrisch, also nach §. 1. einer Quadratwurzel gleich. Heisst diese $\sqrt{B}$, so muss 1) $B>1$, allgemein aber $<A$ sein, da $\varkappa$, die grösste gerade Zahl in $\sqrt{B}$, $<n$ ist, und 2) B allgemein keine ganze Zahl, da das mittelste Glied der zugehörigen Periode $=2n$, welches $>2\varkappa$ ist, was für B gleich einer ganzen Zahl nicht der Fall sein könnte. Es ist also:

$$\sqrt{A} = n + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \vdots + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\varkappa + \sqrt{B}}.$$

Wir suchen wieder A durch die Theilnenner, ferner B, welches auf irgend eine Weise von A abhängig sein muss.

Setzt man den Näherungswerth bis zum ersten $\frac{1}{\mu}$ incl. $\frac{M'}{N'}$, den vorhergehenden $\frac{M}{N}$, den bis $\frac{1}{\varkappa}$ incl. $\frac{M''}{N''}$, dann ist:

$$\sqrt{A} = \frac{\varkappa M' + M + M'\sqrt{B}}{\varkappa N' + N + N'\sqrt{B}} = \frac{M'' + M'\sqrt{B}}{N'' + N'\sqrt{B}},$$

und wenn man $B = \frac{A}{x^2}$ setzt, mit dem Nenner multiplicirt und die rationalen und ebenso die irrationalen Theile einander gleich stellt:

$$1)\quad AN' = M''x,$$

$$2)\quad M' = N''x;$$

folglich

$$A = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{M''}{N''}.$$

Betrachtet man also den halben mittelsten Theilnenner als letzten der ersten Hälfte der ersten Periode, dann ist das Produkt der beiden letzten Näherungswerthe gleich der Zahl A.

Setzt man aber in die erste Gleichung $x\sqrt{B}$ für $\sqrt{A}$, so erhält man auf dieselbe Weise:

$$B = \frac{M''.N''}{M'.N'} = \frac{N''^2}{M'^2}A,$$

also

$$x = \frac{M'}{N''}.$$

Dasselbe x giebt die Elimination von $\varkappa$ aus 1) und 2), nämlich $x = \pm(M'^2 - AN'^2)$, also x eine ganze Zahl, und durch Substitution der Werthe von A in diese Gleichung: $x = \frac{M'}{N''}$.

Dass x eine ganze Zahl werden muss, folgt schon aus $A = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{M''}{N''}$. Da nämlich M' und N' und ebenso M'' und N'' relative Primzahlen sind, so müssen $\frac{M'}{N''}$ und $\frac{M''}{N'}$ ganze Zahlen werden.

§. 7.

Das Produkt der beiden ganzen Zahlen $\frac{M'}{N''} \cdot \frac{M''}{N'}$ soll die ganze Zahl A geben, d. h. A ist keine Primzahl, es sei denn, dass der kleinere dieser Faktoren $\frac{M'}{N''} = 1$, und der grössere eine Primzahl ist. Da aber $\frac{M''}{N''} = n$; $\alpha, \beta, \ldots \varkappa$ und desshalb $\frac{M''}{M'} = \varkappa$; $\alpha, \beta, \ldots n$, so muss, wenn $M' = N''$ sein soll, $\varkappa = n$ sein, d. h. der mittelste Quotient gleich dem letzten, also auch gleich dem ersten, oder die Periode beginnt für A gleich einer Primzahl, deren Quadratwurzel in der Mitte einen geraden Quotienten hat, mit dem Quotienten $2n$. Dann ist

$$\frac{M'}{N'} = \frac{n}{1}, \quad \frac{M''}{N''} = \frac{n^2+1}{n}, \quad \text{also} \quad M' = N'', \quad \frac{M''}{N'} = n^2 + 1 = A.$$

In der That ist

$$\sqrt{n^2+1} = n; \ (2n).$$

Wir haben also auf diesem Wege den bekannten Satz abgeleitet, dass die Quadratwurzel aus einer Primzahl, mit Ausnahme derer von der Form n^2+1, die gleich mit $2n$ beginnen, keinen Kettenbruch mit einem geraden Theilnenner in der Mitte geben kann.

Dass A keine Primzahl sein kann, folgt auch schon aus den Werthen für A und x (§. 6.) auf folgende Weise:

$$A = \frac{\varkappa M' + M}{N'} \cdot \frac{M'}{\varkappa N' + N} = \frac{\varkappa M' + M}{N'} x = \frac{\varkappa M' + M}{N'} (M'^2 - AN'^2).$$

Da nun N', wenn es nicht $= 1$ ist, mit M' keinen Faktor gemein haben, also auch in $M'^2 - AN'^2$ nicht aufgehen kann, so muss es ganz in $\varkappa M' + M$ enthalten sein, folglich besteht A aus zwei Faktoren, von denen keiner $= 1$ sein kann. Offenbar ist nämlich $\frac{\varkappa M' + M}{N'} > 1$ und $M'^2 - AN'^2$, d. i. $x > 1$, weil $B = \frac{A}{x^2}$ und $B < A$.

§. 8.

Ist $A = ab$ und zwar $a > b$, und setzt man $B = \frac{p}{q}$, wo $p > q$ sein muss, und q nicht $= 1$ sein kann, so erhält man

$$x^2 = \frac{A}{B} = \frac{a.b.q}{p}.$$

Da x eine ganze Zahl, und $B > 1$ sein muss (§. 6.), so ist $p = a$, $q = b = x$, $B = \frac{a}{b}$. Ist also

$$\sqrt{A} = \sqrt{a.b} = n;\ \alpha,\ \beta \ldots\ldots \mu,\ (2\varkappa),$$

dann ist

$$\sqrt{B} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \varkappa;\ \mu \ldots\ldots \alpha,\ (2n).$$

Aber für $a.b = n^2 + 1$ wird

$$\sqrt{a.b} = \sqrt{\frac{a}{b}} = n;\ (2n),$$

also $b = 1$ und $B = A$.

Besteht A aus mehr als zwei Faktoren, so erhält man $x = b$ aus $b = \frac{M'}{N''}$, oder aus der Gleichung $M'^2 - AN'^2 = b$. Ueberhaupt lösen M' und N' die Gleichung $M'^2 - abN'^2 = \pm b$ in ganzen Zahlen, wenn a und b so beschaffen sind, dass der zu $\sqrt{a.b}$ gehörige Kettenbruch in der Mitte der Periode einen geraden Theilnenner $2\varkappa$ hat, und dass $\sqrt{\frac{a}{b}}$ zwischen $\varkappa$ und $\varkappa + 1$ liegt. ($\pm$) je nachdem der mittelste Quotient, ohne die Ganzen, an $\left\{ \begin{matrix} \text{gerader} \\ \text{ungerader} \end{matrix} \right\}$ Stelle steht.

§. 9.

Die §. 6. gewonnenen Formeln für A, B, x behalten auch ihre Giltigkeit, wenn die Periode in der Mitte einen ungeraden Theilnenner $\varkappa$ hat, nur ist dann $\frac{\varkappa}{2}$ für $\varkappa$ zu setzen. In diesem Falle kann B auch eine ganze Zahl werden, aber das n für $\sqrt{B}$ ist immer ein Bruch, nämlich $\frac{\varkappa}{2}$.

Es ist zu beachten, dass, wenn man mit $\frac{M''}{N''}=\frac{\varkappa M'+2M}{\varkappa N'+2N'}$ rechnet, das nach der Formel $B=\frac{M''.N''}{M'.N'}$ erhaltene Resultat durch 4 zu dividiren ist.

Ist $\varkappa N'+2N=M'$ (was nothwendig der Fall sein muss, wenn A eine Primzahl), so ist:

$$A=\frac{\varkappa M'+2M}{N'}, \text{ und da } \varkappa=\frac{M'-2N}{N'},$$

$$=\frac{M'^2+2(MN'-NM')}{N'^2}=\frac{M'^2\pm 2}{N'}$$

oder

$$M'^2-AN'^2=\pm 2,$$

$\{\mp\}$, wenn $\frac{M'}{N'}$, ohne die Ganzen, an $\begin{Bmatrix}\text{gerader}\\ \text{ungerader}\end{Bmatrix}$ Stelle steht. Für solche Zahlen A wird also diese Gleichung durch M' und N' in ganzen Zahlen gelöst.

§. 10.

Der Ausdruck $A=\frac{M'}{N'}\cdot\frac{M''}{N''}$ (§. 6.) lässt sich auch ableiten ohne Einführung der $\sqrt{B}$. Bei derselben Bezeichnung des §. 9. ist nämlich in der zweiten Hälfte der Periode der Bruch von $\frac{1}{\mu}$ bis $\frac{1}{\alpha}=\frac{N}{N'}$, und der ihm vorangehende von $\frac{1}{\mu}$ bis $\frac{1}{\beta}=\frac{M-nN}{M'-nN'}$, d. i. gleich dem Quotienten zwischen den Zählern der echten Brüche in der ersten Hälfte von $\frac{1}{\alpha}$ bis $\frac{1}{\mu}$ und seinem Vorgänger. Dann ist der Werth vom zweiten $\frac{1}{\mu}$ an, d. i.

$$\frac{1}{\mu+\text{in inf.}}=\frac{(n+\sqrt{A})N+(M-nN)}{(n+\sqrt{A})N'+(M'-nN')}=L,$$

also

$$\sqrt{A}=\frac{(\varkappa+L)M'+M}{(\varkappa+L)N'+N},$$

und wenn man für L den Werth substituirt und mit dem Nenner

multiplicirt, so werden die irrationalen Theile identisch, die rationalen geben:

$$A=\frac{M'}{N'}\cdot\frac{\frac{\varkappa}{2}M'+M}{\frac{\varkappa}{2}N'+N}=\frac{M'}{N'}\cdot\frac{M''}{N''}.$$

Heisst der Näherungswerth bis $\frac{1}{\varkappa}$ incl. $\frac{P}{Q}$, dann $\varkappa M'+M=P$, $\varkappa N'+N=Q$, also

$$A=\frac{M'(M+P)}{N'(N+Q)}.$$

§. 11.

Die Gleichung $x^2-Ay^2=1$ wird bekanntlich durch den Näherungswerth $\frac{x}{y}$ bis zum zweiten $\frac{1}{\alpha}$ incl. gelöst. Es ist also durch die Theilnenner der ersten Hälfte der ersten Periode, wenn der mittelste Quotient wieder $\varkappa$ heisst:

$$\frac{x}{y}=\frac{(\varkappa+\frac{N}{N'})M'+M}{(\varkappa+\frac{N}{N'})N'+N}=\frac{PN'+M'N}{N'(N+Q)},$$

$$=\frac{N'(M+P)\pm 1}{N'(N+Q)},$$

wenn man $MN'\pm 1$ für $M'N$ setzt, und

$$=\frac{M'(N+Q)\mp 1}{N'(N+Q)},$$

wenn man für $N'M$ und $N'P$ die resp. Werthe $M'N\mp 1$ und $M'Q\mp 1$ schreibt.

Für die Gleichung ist also, wenn sie eine Auflösung in ganzen Zahlen gestattet:

$$x=N'(M+P)\pm 1=M'(N+Q)\mp 1,$$

$$y=N'(N+Q)$$

das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen, je nachdem die Anzahl der Quotienten, ohne die Ganzen, also von α bis $\varkappa$, $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ ist.

Da der mittelste Theilnenner eben so gut zu der einen, wie zu der andern Hälfte der Periode genommen werden kann, so steht zu erwarten, dass die Formeln noch mehr an Symmetrie gewinnen und einfacher gestaltet sein werden, wenn man ihn halbirt und die eine Hälfte zu der einen, die andere zu der zweiten Hälfte der Periode nimmt. Nun ist

$$P = \varkappa M' + M, \quad M = M'' - \frac{\varkappa}{2} M',$$

also $P = \frac{\varkappa}{2} M' + M''$ und $M + P = 2M''$, ebenso $N + Q = 2N''$, folglich:

$$\frac{x}{y} = \frac{2M''N' \pm 1}{2N'N''} = \frac{2M'N'' \mp 1}{2N'N''} \text{ *)}.$$

Setzt man, wenn $\varkappa$ ungerade, um bequemer mit ganzen Zahlen zu rechnen,

$$\frac{\varkappa M' + 2M}{\varkappa N' + 2N} = \frac{M''}{N''},$$

so wird:

$$\frac{x}{y} = \frac{M''N' \pm 1}{N'N''} = \frac{M'N'' \mp 1}{N'N''}.$$

Die Zeichen wie vorhin.

§. 12.

Da der Bruch von n bis $\frac{1}{\mu}$ mit $\frac{M'}{N'}$, sein Vorgänger mit $\frac{M}{N}$ bezeichnet ist, so ist der von $\frac{1}{\mu}$ bis $\frac{1}{n}$ gleich $\frac{M}{M'}$, und der Näherungswerth bis ans Ende der ersten Periode, d. h. bis $\frac{1}{n}$:

---

*) Es mag hier ein Druckfehler erwähnt werden, auf den ich in der Théorie des nombres von Legendre, dritte Ausgabe, die mir allein zur Hand ist, gestossen bin. Dort steht Tome I. Table X. bei $N = 94$, $x = 2543295$ statt 2143295, wie auch der Canon Pellianus richtig hat.

$$\frac{x'}{y'}=\frac{(\varkappa+\frac{M}{M'})M'+M}{(\varkappa+\frac{M}{M'})N'+N}=\frac{(M+P)M'}{PN'+NM'}=\frac{(N+Q)N'}{PN'+NM'}A\ (\S.\ 10.)$$

$$=\frac{y}{x}A,$$

also $x=y'$ und $A=\frac{x'}{y}$ (§. 1.)

Der Werth von n bis $\frac{1}{2n}$ ist offenbar:

$$\frac{x''}{y''}=\frac{nx+x'}{ny+y'}=\frac{n(PN'+M'N)+(M+P)M'}{n(N+Q)N'+PN'+NM'}.$$

Wohl mit Unrecht findet man gewöhnlich $2n$ als den Schluss der ersten Periode bezeichnet, da doch passender die zweite wieder mit $\sqrt{A}$, also mit n beginnt, so dass die erste von n bis n, die zweite wieder von n bis n geht u. s. f. Die beiden Ausdrücke $\frac{x'}{y'}$ und $\frac{x''}{y''}$ geben die erste Periode bis $\frac{1}{n}$ und bis $\frac{1}{2n}$ durch die drei letzten Näherungswerthe der ersten Hälfte; der erstere, als der einfachere, spricht auch für diese Ansicht. Der Unterschied in der Einfachheit beider Werthe tritt noch deutlicher hervor, wenn man die erste Hälfte der Periode bis zur Mitte des mittelsten Theilnenners incl. rechnet, d. h. wenn man P, Q, M, N eliminirt und dafür M' und N' einführt. Dann entsteht:

$$\frac{x'}{y'}=\frac{2M'M''}{2N'M''\pm1}=\frac{2M'M''}{2M'N''\mp1},$$

$$\frac{x''}{y''}=\frac{2M'(M''+nN'')\mp n}{2N'(M''+nN'')\pm1}=\frac{2M''(M'+nN')\pm n}{2N'(M'+nN')\mp1}.$$

§. 13.

Im §. 10. war $A=\frac{M'(M+P)}{N'(N+Q)}=\frac{M'}{N'}\cdot\frac{M''}{N''}$. Da M' und N' relative Primzahlen sind, ferner $M+P=n(N+Q)+m+p$, wenn man die Zähler der echten Brüche mit den entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnet, folglich $\frac{M+P}{N+Q}=n+\frac{m+p}{N+Q}$ keine ganze Zahl sein kann, so muss $\frac{M+P}{N'}$ ganz sein, $N+Q$ aber in $M'(M+P)$ oder in M' aufgehen. Ist nun:

I. $M' = N + Q = 2Q - \varkappa N' = nN' + m' = \varkappa N' + 2N$,

so kann $\varkappa$ nur $= n$ oder $= n - 1$ sein. Wäre nämlich $\varkappa = n + x$, so müsste $nN' + m' = nN' + xN' + 2N$ sein, was nur für $x = 0$ möglich ist, da schon $N' > m'$. Die Substitution von $n - x$ für $\varkappa$ giebt $nN' + m' = nN' - xN' + 2N$, oder $xN' + m' = 2N$, d. h. in diesem Falle ist das Maximum von $x = 1$, da $N' > N$. Ist folglich A eine Primzahl, deren Quadratwurzel in der Mitte nur einen Theilnenner hat, wo also $M' = N + Q$ sein muss, so ist $\varkappa = \begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix}$, je nachdem n $\begin{Bmatrix} \text{ungerade} \\ \text{gerade} \end{Bmatrix}$ ist.

Im §. 9 ist gefunden:

$$AN'^2 = M'^2 \pm 2,$$

also hier

$$AN'^2 = N^2 + Q^2 - 2NQ \pm 2$$

$$\varkappa^2 N'^2 = N^2 + Q^2 - 2NQ$$

mithin $$\frac{A + \varkappa^2}{2} N'^2 = N'^2 + Q^2 \pm 1$$

$$\frac{A - \varkappa^2}{2} N'^2 = 2NQ \pm 1.$$

Da N' ungerade ist, wegen $\varkappa = \frac{2Q - m'}{N'} - n$, so muss $A + \varkappa^2$ gerade sein, d. h. für ein ungerades A kann $\varkappa$ nur ungerade sein. Ferner ist $N^2 + Q^2 \pm 1$ eine gerade Zahl, da $N + Q$, wegen $A = \frac{(N+Q)^2 \pm 2}{N'^2}$, ungerade, also der eine der Nenner N und Q gerade, der andere ungerade sein muss, folglich muss $A + \varkappa^2$ ein Vierfaches sein, und da $\varkappa^2$ von der Form $4t + 1$, so ist A von der Form $4t + 3$.

Für ein gerades A können N und Q beide gerade, auch beide ungerade sein. Im ersten Falle ist $N^2 + Q^2 \pm 1$ von der Form $4t \pm 1$, also muss, da N'^2 dieselbe Form hat, $A + \varkappa^2$ von der Form $8t \pm 2$ sein, d. h. $A = 8t \pm 2$ und $\varkappa$ gerade.

Im zweiten Falle ist $N^2 + Q^2 \pm 1$ von der Form $\begin{Bmatrix} 4t+3 \\ 4t+1 \end{Bmatrix}$, daher $A + \varkappa^2$ von der Form $\begin{Bmatrix} 8t+6 \\ 8t+2 \end{Bmatrix}$, d. h. A und $\varkappa$ wie vorhin.

Ist also bei der $\sqrt{A}$ der mittelste Theilnenner $\varkappa = n$,

oder $= \varkappa - 1$, so kann, wenn $A \left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right\}$ ist, $\varkappa$ nur $\left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right\}$ und A von der Form $\left\{\begin{matrix}4t+3\\ 8t\pm 2\end{matrix}\right\}$ sein.

II. $N+Q$ geht in $M'(M+P)$ auf.

Ist $N+Q=a.b$ und $M'=nN'+m=a.L$, wenn a den grössten gemeinschaftlichen Faktor zwischen $N+Q$ und M' bedeutet, so entsteht, wenn man $n=\frac{aL-m}{N'}$ substituirt:

$$A=\frac{a^2bL^2\pm 2L}{bN'^2}.$$

Da b Faktor des ersten Summanden ist und in L nicht enthalten sein soll, denn sonst ginge $N+Q$ in M' auf, so kann b nur $=2$ sein, und dann wird $M'^2-AN'^2=\mp L$.

Diese Gleichung zeigt, dass L nicht $=1$ sein kann; es ist aber auch $L>2$, denn für $L=2$ wäre $N+Q=M'$, also ist $M'>N+Q$.

Da nun $N+Q=2a$ und $\varkappa N'=Q-N$, so entsteht:

$$\begin{aligned}N'^2(A-\varkappa^2)&=(M'^2-4a^2)+4NQ\pm L\\ &=a^2(L^2-4)+4NQ\pm L.\end{aligned}$$

III. Geht $N+Q$ in M' auf, dann ist:

$$\begin{aligned}b=1,\quad N+Q=a,\quad N'^2(A-\varkappa^2)&=(M^2-a^2)+4NQ\pm L\\ &=a^2(L^2-1)+4NQ\pm L.\end{aligned}$$

In allen Fällen ist also $A-\varkappa^2$ positiv, folglich

$$\varkappa \leqq n.$$

§. 14.

Aus $M'=N+Q$ (§. 13. I.) d. i. $nN'+m'=\varkappa N'+2N$, folgt $(n-\varkappa)N'=2N-m'$. Ist nun:

1) $\varkappa=n$, also $2N=m'$, so müsste, wenn der dem $\varkappa$ vorangehende Theilnenner $=1$ sein sollte, $N'=N+N^0$, und da $N'>m'$, auch $N+N^0>m'$, also um so mehr $2N>m'$ sein, was gegen $2N=m'$ streitet.

2) Für $\varkappa = n - 1$ folgt $N' = 2N - m'$. Wäre nun der dem $\varkappa$ vorangehende Theilnenner v, so müsste $N' = vN + N^0 = 2N - m'$ sein, was nur für $v = 1$ möglich ist.

Wir haben also folgenden Satz gewonnen:

Der dem $\varkappa$ vorangehende (also auch der unmittelbar folgende) Theilnenner kann für $k = n$ nicht $= 1$ sein, für $\varkappa = n - 1$ dagegen muss er $= 1$ sein.

§. 15.

Bezeichnet man in dem Kettenbruche: $\sqrt{A} = n; \alpha, \beta, ... \mu, (\varkappa, \varkappa)$ die drei letzten Näherungswerthe der ersten Hälfte der ersten Periode mit $\frac{M^0}{N^0}, \frac{M}{N}, \frac{M'}{N'}$ und behält sonst die Bezeichnung des §. 5. bei, so ist nach dem dort Bemerkten

$$\frac{1}{\varkappa + \text{in inf.}} = \frac{(n + \sqrt{A})N + m}{(n + \sqrt{A})N' + m'} = L,$$

folglich

$$\sqrt{A} = \frac{LM + M'}{LN + N'}.$$

Substituirt man für L den Werth und multiplicirt mit dem Nenner, so giebt die Gleichstellung der rationalen Theile:

$$A = \frac{M^2 + M'^2}{N^2 + N'^2}.$$

Da weder die Zähler noch die Nenner von zwei auf einander folgenden Näherungswerthen einen gemeinschaftlichen Faktor haben, so können weder M und M', noch N und N' zugleich gerade sein; auch können, da A eine ganze Zahl ist, N und N' nicht zugleich ungerade sein, wenn das eine M gerade, das andere ungerade ist. Es entsteht also nur noch die Frage, ob zugleich beide M und beide N ungerade sein können. In diesem Falle könnte $\varkappa$ nur gerade sein, denn ein ungerades müsste Zähler und Nenner des folgenden Näherungswerthes gerade machen. Das gerade $\varkappa$ aber giebt Zähler und Nenner des folgenden Bruches ungerade, und ebenso müsste, wenn M, M', N, N' ungerade werden sollten, der vorhergehende Theilnenner gerade, M^0 und N^0 aber ungerade, u. s. f., alle vorhergehenden Quotienten bis zum ersten gerade, Zähler und Nenner der Näherungswerthe ungerade sein. Der erste Quotient α müsste also als solcher gerade, als Nenner

N' ungerade sein. Die beiden M und die beiden N können also auch nicht zugleich ungerade sein. Von den Nennern N und N' ist also stets der eine gerade, der andere ungerade, folglich $N^2+N'^2$ immer ungerade, und für ein gerades A muss $M^2+M'^2$ gerade sein, d. h. beide M ungerade, für ein ungerades A das eine M gerade, das andere ungerade.

Daraus, dass das eine N gerade, das andere ungerade sein muss, folgt auch der schon §. 4. 2) angeführte Satz: Die beiden mittelsten Quotienten können, wenn die Periode gleich mit ihnen beginnt, nur gerade sein.

§. 16.

Setzt man in $A=\frac{M^2+M'^2}{N^2+N'^2}$ für M und M' die Werthe $nN+m$ und $nN'+m'$, so erhält man:

$$\frac{(A-n^2)(N^2+N'^2)-(m^2+m'^2)}{2}=n(mN+m'N').$$

Ist I. $A-n^2$ gerade, so muss $m^2+m'^2$ gerade sein, und da das eine N gerade, das andere ungerade ist, so müssen m und m' beide ungerade sein, oder $m^2+m'^2$ von der Form $4t+2$. Sind nun:

1) A und n gerade, so muss, damit auch links eine gerade Zahl herauskommt, $\frac{A-n^2}{2}$ ungerade sein, oder $A-n^2$ von der Form $4t+2$, d. h. $A=4t+2$, $n=2l$.

2) Sind A und n ungerade, dann muss $\frac{A-n^2}{2}$ gerade sein, also $A-n^2$ von der Form $4t$, d. h. $A=4t+1$, $n=2l+1$.

Ist II. $A-n^2$ ungerade, dann muss $m^2+m'^2$ ungerade sein, also das eine m gerade, das andere ungerade, $m^2+m'^2$ von der Form $4t+1$ und $mN+m'N'$ gerade. Ist nun:

1) A gerade, n ungerade, so muss der Zähler ein Vierfaches sein, mithin $A-n^2$ von der Form $4t+1$ und $A=4t+2$, $n=2l+1$.

2) Wenn A ungerade, n gerade ist, muss wieder $A-n^2$ von der Form $4t+1$ sein, $A=4t+1$, $n=2l$.

Die geraden A sind also immer von der Form $4t+2$, die ungeraden von der Form $4t+1$.

§. 17.

Heisst der vorletzte Näherungswerth der ersten Periode, also bis $\frac{1}{\alpha}$ incl., $\frac{x}{y}$, dann sind bekanntlich x und y die kleinsten Wurzeln der Gleichung $x^2-Ay^2=-1$ in ganzen Zahlen, wenn der der $\sqrt{A}$ entsprechende Kettenbruch in der Mitte zwei gleiche Theilnenner hat. Es ist dann nach voriger Bezeichnung:

$$\frac{x}{y}=\frac{(\varkappa+\frac{N}{N'})M+M^0}{(\varkappa+\frac{N}{N'})N+N^0}$$

und für M^0 und N^0 die Werthe $M'-\varkappa M$ und $N'-\varkappa N$ gesetzt:

$$\frac{x}{y}=\frac{MN+M'N'}{N^2+N'^2}.$$

§. 18.

Da $n;\ \alpha,\ \beta\ldots\ldots\mu=\frac{M}{N}$ und $n;\ \alpha,\ \beta\ldots\ldots\varkappa=\frac{M'}{N'}$, so ist $0;\ \varkappa,\ \mu\ldots\ldots n=\frac{M}{M'}$, folglich der Näherungswerth bis $\frac{1}{n}$:

$$\frac{x'}{y'}=\frac{(\varkappa+\frac{M}{M'})M+M^0}{(\varkappa+\frac{M}{M'})N+N^0}=\frac{M^2+M'^2}{MN+M'N'}=\frac{N^2+N'^2}{MN+M'N'}=A=\frac{y}{x}A,$$

also $x=y'$ und $A=\frac{x'}{y}$ (§. 1. und §. 12.).

Der Näherungswerth bis $\frac{1}{2n}$ ist:

$$\frac{x''}{y''}=\frac{nx+x'}{ny+y'}=\frac{n(MN+M'N')+(M^2+M'^2)}{n(N^2+N'^2)+(MN+M'N')}.$$

Es mögen noch von zwei Sätzen Beweise folgen, die mir kürzer und übersichtlicher scheinen, als die gewöhnlichen.

§. 19.

Die Differenz zwischen dem ganzen Werthe x eines Kettenbruchs und einem seiner Näherungswerthe $\frac{M}{N}$ ist, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, $<\frac{1}{N^2}$.

Heisst der auf $\frac{M}{N}$ folgende Näherungswerth $\frac{M'}{N'}$, dann ist:

$$\frac{M}{N}=x\pm d,$$

$$\frac{M'}{N'}=x\mp d';$$

also
$$\frac{M}{N}-\frac{M'}{N'}=\pm\frac{1}{NN'}=\pm(d+d'),$$

folglich d, d. i. $\frac{M}{N}-x<\frac{1}{NN'}$, und, da $N<N'$, um so mehr:

$$\frac{M}{N}-x<\frac{1}{N^2}.$$

§. 20.

Der Näherungswerth $\frac{M}{N}$ kommt dem ganzen Werth x eines Kettenbruchs näher als irgend ein anderer Bruch $\frac{m}{n}$, wenn $n<N$.

Nach §. 19. ist:

$$\frac{M}{N}-\frac{M'}{N'}=\pm\frac{1}{NN'}=\pm(d+d'),$$

und wenn $\frac{m}{n}=x\pm\delta$, oder $=x\mp\delta$:

$$\frac{m}{n}-\frac{M'}{N'}=\frac{mN'-nM'}{nN'}=\pm(\delta+d')$$

oder
$$=\mp(\delta-d').$$

Offenbar ist aber $mN'-nM'\overline{\gtrless}1$ und, wegen $n<N$, $nN'<NN'$,

also $\frac{mN'-nM'}{nN'} > \frac{1}{NN'}$, folglich, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, $\delta + d'$, so wie $\delta - d' > d + d'$, d. h. $\delta > d$, oder

$$\frac{m}{n} - x > \frac{M}{N} - x.$$

XX.

Einige Bemerkungen über die von den Krümmungslinien auf dem Ellipsoid gebildeten Vierecke.

Von

Herrn Doctor *W. Plagemann*

zu Wismar.

Beschreibt man auf einer Ebene um dieselben beiden Brennpunkte eine Ellipse und eine Hyperbel, so schneiden dieselben einander, wie bekannt, unter rechten Winkeln, und es hat daher das krummlinige Viereck, welches von zwei solchen Ellipsen und zwei solchen Hyperbeln begrenzt wird, die Eigenschaft, dass die Winkel desselben rechte sind. Ausser dieser Eigenschaft ist aber noch eine zweite zu erwähnen, welche, wie sich leicht zeigen lässt, jenem Vierecke zukömmt, nämlich die, dass die beiden Diagonalen desselben einander gleich sind.

Nimmt man nämlich die durch die beiden Brennpunkte gezogene Grade zur Axe der x, die Senkrechte auf dieser Linie in der Mitte zwischen den beiden Brennpunkten zur Axe der y,

und bezeichnet man die halbe Entfernung der beiden Brennpunkte mit e, die halben grossen Axen der beiden Ellipsen mit a_1 und a_2, die halben Hauptaxen der beiden Hyperbeln mit b_1 und b_2, so hat man für die beiden Ellipsen die Gleichungen:

$$(1^a) \qquad \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{a_1^2-e^2}=1,$$

$$(2^a) \qquad \frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{a_2^2-e^2}=1;$$

und für die beiden Hyperbeln hat man die Gleichungen:

$$(1^b) \qquad \frac{x^2}{b_1^2}-\frac{y^2}{e^2-b_1^2}=1,$$

$$(2^b) \qquad \frac{x^2}{b_2^2}-\frac{y^2}{e^2-b_2^2}=1.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten von dem Eckpunkte unseres Vierecks, in welchem sich die beiden Curven (1^a) und (1^b) schneiden, durch x_1', y_1'; die Coordinaten des Eckpunktes, in welchem sich die Curven (1^a) und (2^b) schneiden, durch x_1'', y_1''; ebenso die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Curven (2^a) und (1^b) durch x_2', y_2'; und die Coordinaten von dem Durchschnittspunkte der Curven (2^a) und (2^b) durch x_2'', y_2''; so erhalten wir für diese Coordinaten vermittelst der vier aufgestellten Gleichungen:

$$x_1'^2=\frac{a_1^2.b_1^2}{e^2}, \quad y_1'^2=\frac{(a_1^2-e^2)(e^2-b_1^2)}{e^2};$$

$$x_1''^2=\frac{a_1^2.b_2^2}{e^2}, \quad y_1''^2=\frac{(a_1^2-e^2)(e^2-b_2^2)}{e^2};$$

$$x_2'^2=\frac{a_2^2.b_1^2}{e^2}, \quad y_2'^2=\frac{(a_2^2-e^2)(e^2-b_1^2)}{e^2};$$

$$x_2''^2=\frac{a_2^2.b_2^2}{e^2}, \quad y_2''^2=\frac{(a_2^2-e^2)(e^2-b_2^2)}{e^2}.$$

Da nun die Quadrate von den beiden Diagonalen unseres Vierecks ausgedrückt werden durch:

$$(x_1'-x_2'')^2+(y_1'-y_2'')^2=x_1'^2+x_2''^2+y_1'^2+y_2''^2-2(x_1'.x_2''+y_1'\,y_2'')$$

und durch

$$(x_1''-x_2')^2+(y_1''-y_2')^2=x_1''^2+x_2'^2+y_1''^2+y_2'^2-2(x_1''.x_2'+y_1''.y_2');$$

so ergiebt sich leicht, dass die beiden Diagonalen einander gleich sind.

Nach den obigen Ausdrücken für x_1', y_1', x_1'', etc. ist nämlich:

$$x_1'^2 + x_2''^2 + y_1'^2 + y_2''^2$$

$$= \frac{a_1^2 . b_1^2 + a_2^2 . b_2^2 + (a_1^2 - e^2)(e^2 - b_1^2) + (a_2^2 - e^2)(e^2 - b_2^2)}{e^2}$$

$$= a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 - 2e^2,$$

und ebenso

$$x_1''^2 + x_2'^2 + y_1''^2 + y_2'^2$$

$$= \frac{a_1^2 . b_2^2 + a_2^2 . b_1^2 + (a_1^2 - e^2)(e^2 - b_2^2) + (a_2^2 - e^2)(e^2 - b_1^2)}{e^2}$$

$$= a_1^2 - b_2^2 + a_2^2 - b_1^2 - 2e^2,$$

und da ausserdem offenbar

$$x_1' . x_2'' = x_1'' . x_2', \quad y_1' . y_2'' = y_1'' . y_2'$$

ist, so folgt allerdings, dass die beiden Diagonalen einander gleich sind.

§. 1.

Dieser für die in der Ebene gebildeten Vierecke leicht nachweisbare Satz lässt nun eine interessante Verallgemeinerung zu, indem sich derselbe, ebenso wie der andere die Orthogonalität der Seiten betreffende, auch auf ähnlich gebildete Vierecke auf dem Ellipsoid ausdehnen lässt.

Beschreibt man nämlich um zwei Nabelpunkte des Ellipsoids, die einander nicht diametral gegenüberliegen, solche Curven, dass die Summe oder die Differenz der kürzesten Linien auf dem Ellipsoid zwischen den beiden Nabelpunkten und den einzelnen Punkten der Curve fortwährend constant bleibt, so erhält man die beiden Reihen der Krümmungslinien auf dem Ellipsoid, so dass also die eine Reihe der Krümmungslinien in Bezug auf die beiden Nabelpunkte den um zwei Brennpunkte beschriebenen Ellipsen, und die andere Reihe der Krümmungslinien den um dieselben beiden Brennpunkte beschriebenen Hyperbeln in der Ebene entspricht. Dass dies der Fall ist, wollen wir erst nachweisen.

§. 2.

Bezeichnen wir die drei Axen eines Ellipsoids mit a, b, c (wir wollen annehmen, dass $a > b > c$ ist), so ist die Gleichung des Ellipsoids, auf die drei Axen desselben bezogen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3}$$

Um aber die Gleichung für die kürzeste Linie auf dem Ellipsoid zu bestimmen, müssen wir ein anderes Coordinatensystem einführen, indem wir die Punkte auf dem Ellipsoid als die Durchschnittspunkte des Ellipsoids mit je zwei confocaten Flächen zweiten Grades ansehen. Es lassen sich nämlich, wie sich leicht nachweisen lässt, indem man die Werthe von u aus der Gleichung

$$\frac{x^2}{a_2-u}+\frac{y^2}{b^2-u}+\frac{z^2}{c^2-u}=1$$

für einen beliebigen Punkt (x, y, z) unseres Ellipsoids bestimmt, durch jeden Punkt desselben ausser dem Ellipsoid selbst zwei Flächen zweiten Grades legen, welche mit dem gegebenen Ellipsoid confocal sind, ein einmantliges und ein zweimantliges Hyperboloid, welche ausgedrückt werden durch die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}=1, \tag{3^a}$$

$$\frac{x^2}{a^2-\nu}+\frac{y^2}{b^2-\nu}+\frac{z^2}{c^2-\nu}=1, \tag{3^b}$$

worin die Grössen μ und ν so beschaffen sind, dass die eine von ihnen zwischen c^2 und b^2, die andere zwischen b^2 und a^2 liegt. Nehmen wir an, dass μ zwischen c^2 und b^2, ν zwischen b^2 und a^2 liege, so dass die Gleichung (3^a) das einmantlige, die Gleichung (3^b) das zweimantlige Hyperboloid ausdrückt: so erhalten wir für die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte auf dem Ellipsoid durch die Verbindung der drei Gleichungen (3), (3^a) und (3^b):

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} x^2&=\frac{a^2(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\\ y^2&=\frac{b^2(b^2-\mu)(\nu-b^2)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)},\\ z^2&=\frac{c^2(\mu-c^2)(\nu-c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.\end{aligned}\right.$$

§. 3.

Auf diese Weise haben wir nun die Punkte des Ellipsoids auf zwei Coordinaten μ und ν bezogen, welche die Argumente der beiden Reihen von confocalen Flächen zweiten Grades sind, der einmantligen und der zweimantligen Hyperboloide, oder auch, da die Durchschnitte dieser beiden Reihen von Flächen mit dem Ellipsoid, wie zuerst Dupin gezeigt hat, die beiden Reihen von Krümmungslinien auf dem Ellipsoid bilden, welche die Argumente der beiden Reihen von Krümmungslinien sind. Führen wir nun statt der Coordinaten μ und ν zwei Winkelcoordinaten φ und ψ ein, indem wir setzen:

$$\frac{b^2-\mu}{\mu-c^2}=\operatorname{tg}\psi^2, \quad \frac{\nu-b^2}{a^2-\nu}=\operatorname{cotg}\varphi^2,$$

so dass

$$\mu=b^2.\cos\psi^2+c^2.\sin\psi^2, \quad \nu=a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2$$

wird: so erhalten wir, indem wir diese Werthe von μ und ν in die Gleichung (4) substituiren:

$$(4^a)\quad\begin{cases} x=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-c^2}}\sin\varphi\sqrt{a^2-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}, \\ y=b.\sin\psi.\cos\varphi, \\ z=\dfrac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos\psi\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-c^2}, \end{cases}$$

wo φ und ψ wieder die Argumente der beiden Reihen von Krümmungslinien sind, so dass einem bestimmten Werthe von φ oder vielmehr von φ^2 eine Krümmungslinie der einen Reihe und einem bestimmten Werthe von ψ^2 eine Krümmungslinie der anderen Reihe entspricht. Es werden nach diesem Coordinatensystem alle auf dem Ellipsoid liegende Punkte umfasst werden, wenn man φ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, ψ von $-\pi$ bis $+\pi$ sich erstrecken lässt.

§. 4.

Für die kürzeste Linie auf dem Ellipsoid hat man nun (vgl. die Abhandlung von Joachimsthal über die kürzesten Linien und die Krümmungslinien auf den Flächen zweiten Grades in

Crelles Journal, XXVI. S. 158.) in Bezug auf die rechtwinkligen Coordinaten der x, y, z die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=C\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}}, \tag{5}$$

worin C die willkührliche Constante bezeichnet, welche durch die Richtung der gedachten Linie in einem beliebigen Punkte bestimmt wird.

Führen wir in dieser Gleichung statt der Coordinaten x, y, z die im vorigen Paragraphen aufgestellten Coordinaten φ und ψ ein, so erhalten wir erstlich vermittelst der Formeln (4^a):

$$a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)=(a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2)(b^2.\cos\psi^2+c^2.\sin\psi^2);$$

ferner ergiebt sich aus den Formeln (4^a) durch Differentiation:

$$dx=\frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}}\Big\{\cos\varphi\sqrt{a^2-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}.d\varphi$$
$$+\frac{(b^2-c^2)\sin\varphi.\sin\psi.\cos\psi}{\sqrt{a^2-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}}d\psi\Big\},$$

$$dy=-b(\sin\varphi.\sin\psi.d\varphi-\cos\varphi.\cos\psi.d\psi),$$

$$dz=-\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\Big\{\frac{(a^2-b^2)\cos\psi.\sin\varphi.\cos\varphi}{\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-c^2}}d\varphi$$
$$+\sin\psi\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-c^2}.d\psi\Big\};$$

und hieraus erhält man:

$$dx^2+dy^2+dz^2=\{(a^2-b^2)\cos\varphi^2+(b^2-c^2)\sin\varphi^2\}$$
$$\times\Big\{\frac{(a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2)d\varphi^2}{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-c^2}+\frac{(b^2.\cos\psi^2+c^2.\sin\psi^2)d\psi^2}{a^2-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}\Big\},$$

$$\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}=\{(a^2-b^2)\cos\varphi^2+(b^2-c^2)\sin\varphi^2\}$$
$$\times\Big\{\frac{d\varphi^2}{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-c^2}+\frac{d\psi^2}{a^2-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}\Big\},$$

so dass sich für die kürzeste Linie auf dem Ellipsoid aus der Gleichung (5) die Gleichung ergiebt:

(6)

$$(a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2)(b^2.\cos\psi^2+c^2.\sin\psi^2)$$
$$\times\left\{\frac{d\varphi^2}{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-c^2}+\frac{d\psi^2}{a^2-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}\right\}$$
$$=a^2b^2c^2C\left\{\frac{(a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2)d\varphi^2}{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-c^2}+\frac{(b^2.\cos\psi^2+c^2.\sin\psi^2)d\psi^2}{a^2-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}\right\}$$

oder auch die Gleichung:

(6*)

$$\frac{(a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2)(b^2.\cos\psi^2+c^2.\sin\psi^2-a^2b^2c^2C)d\varphi^2}{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-c^2}$$
$$+\frac{(b^2\cos\psi^2+c^2\sin\psi^2)(a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2-a^2b^2c^2C)d\psi^2}{a^2-b^2.\cos\psi^2-c^2\sin\psi^2}=0.$$

Durch Integration dieser Gleichung erhalten wir dann endlich, indem wir mit α eine willkürliche Constante bezeichnen, als Gleichung der kürzesten Linie auf dem Ellipsoid:

(7)

$$\alpha=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int\frac{\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2}.d\varphi}{\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-c^2}\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-a^2b^2c^2C}}\\ \displaystyle\mp\int\frac{\sqrt{b^2.\cos\psi^2+c^2.\sin\psi^2}.d\psi}{\sqrt{a^2-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}\sqrt{a^2b^2c^2C-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}},\end{array}\right.$$

in welcher Gleichung auf der rechten Seite zwischen den beiden Integralen offenbar das Zeichen — zu nehmen ist, wenn $d\varphi$ und $d\psi$ dieselben Vorzeichen haben, d. h. wenn die Werthe von φ und ψ für die in Rede stehende Curve zugleich zu- und abnehmen, das Zeichen + dagegen, wenn es sich mit den Werthen von φ und ψ umgekehrt verhält.

§. 5.

Was die Rectification der kürzesten Linie auf dem Ellipsoid betrifft, so erhalten wir, wenn wir die Länge des Bogens dieser Curve mit s bezeichnen, also $dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$ setzen, aus der Gleichung (5) mit Rücksicht auf die im vorigen Paragraphen für die in jener Gleichung vorkommenden Grössen aufgestellten Formeln:

$$ds^2 = \frac{1}{a^2b^2c^2C}\{(a^2-b^2)\cos\varphi^2 + (b^2-c^2)\sin\psi^2\}$$

$$\times(a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2)(b^2.\cos\psi^2+c^2.\sin\psi^2)$$

$$\times\left\{\frac{d\varphi^2}{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-c^2}+\frac{d\psi^2}{a^2-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}\right\},$$

woraus sich mit Hülfe der Gleichung (6) ergiebt:

$$ds^2 = \{(a^2-b^2)\cos\varphi^2+(b^2-c^2)\sin\psi^2\}$$

$$\times\left\{\frac{(a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2)d\varphi^2}{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-c^2}+\frac{(b^2.\cos\psi^2+c^2.\sin\psi^2)d\psi^2}{a^2-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}\right\};$$

hieraus erhalten wir dann leicht, indem wir vermittelst der Gleichung (6^a) $d\psi$ durch $d\varphi$ ausdrücken:

$$ds = \pm\{a^2-b^2)\cos\varphi^2+(b^2-c^2)\sin\psi^2\}$$

$$\times\frac{d\varphi\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2}}{\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-c^2}\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-a^2b^2c^2C}},$$

wo die rechte Seite mit dem Zeichen $+$ zu nehmen ist, wenn ds und $d\varphi$ dieselben Vorzeichen haben, mit dem Zeichen $-$ dagegen, wenn die Vorzeichen von ds und $d\varphi$ entgegengesetzt sind; nimmt man den Bogen der Curve in einer solchen Richtung, dass mit demselben die Werthe von φ für die kürzeste Linie auf dem Ellipsoid grösser werden, so kann man auch das Zeichen $-$ vernachlässigen, und man erhält, da

$$(a^2-b^2)\cos\varphi^2+(b^2-c^2)\sin\psi^2$$

$$=(a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2)-(b^2.\cos\psi^2+c^2.\sin\psi^2),$$

und in Rücksicht auf die Gleichung (6^a)

$$\frac{d\varphi\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2}}{\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-c^2}.\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-a^2b^2c^2C}}$$

$$=\pm\frac{d\psi\sqrt{b^2.\cos\psi^2+c^2.\sin\psi^2}}{\sqrt{a^2-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}\sqrt{a^2b^2c^2C-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}}$$

ist, durch Integration der für ds abgeleiteten Gleichung:

(8)

$$s=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int\frac{d\varphi(a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-c^2}\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2-a^2b^2c^2C}}\\ \displaystyle\mp\int\frac{d\psi(b^2.\cos\psi^2+c^2.\sin\psi^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a^2-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}\sqrt{a^2b^2c^2C-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}},\end{array}\right.$$

in welcher Gleichung die Integrale zwischen den gehörigen Grenzen zu nehmen sind, die durch die beiden Endpunkte der in Rede stehenden Curve bestimmt werden. Das doppelte Vorzeichen vor dem zweiten Integral entspricht ganz dem zwiefachen Zeichen in der Gleichung (7), dessen Bedeutung wir schon im vorigen Paragraphen angegeben haben. Da nach unserer Annahme die Werthe von φ für unsere Curve mit dem Bogen derselben immer wachsen, so wird für das erste Integral der Gleichung (8) die untere Grenze einen kleineren Werth haben als die obere; nehmen wir damit übereinstimmend auch beim zweiten Integral den kleineren Werth von ψ immer zur unteren Grenze, so können wir in der Gleichung (8) das untere Vorzeichen ganz vernachlässigen.

§. 6.

Was die Constante C betrifft, so haben wir schon bemerkt, dass dieselbe durch die Richtung der kürzesten Linie in einem beliebigen Punkte bestimmt wird; es lässt sich aber die Bedeutung derselben noch genauer angeben. Denken wir uns nämlich durch den Mittelpunkt des Ellipsoids eine Grade gelegt, welche, wenn wir die rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf die Axen des Ellipsoids mit ξ, η, ζ bezeichnen, durch die Gleichung

$$\xi:\eta:\zeta=l:m:n$$

dargestellt werde, so sind offenbar die Coordinaten der Punkte, in welchen das Ellipsoid von der Graden geschnitten wird:

$$\pm\frac{l}{\sigma},\quad \pm\frac{m}{\sigma},\quad \pm\frac{n}{\sigma},$$

wenn

$$\sigma=\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

gesetzt wird, und es wird daher die Länge des halben von der Graden gebildeten Durchmessers ausgedrückt durch:

$$\frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sigma}.$$

Demnach stellt der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\left(\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

die Länge des halben Durchmessers vom Ellipsoid dar, dessen Richtung der Tangente der kürzesten Linie im Punkte (x, y, z) parallel ist. Bezeichnen wir daher diesen halben Durchmesser mit D, und die Entfernung des Mittelpunktes von der Tangentialebene des Ellipsoids im Punkte (x, y, z), welche durch die Gleichung

$$\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}=1$$

dargestellt wird, mit P, so haben wir, da dann nach den Elementen der analytischen Geometrie

$$P^2=\frac{1}{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$$

ist, mit Rücksicht auf die Gleichung (5):

$$(9) \qquad P^2D^2=\frac{1}{C}.$$

§. 7.

Unter den Nabelpunkten einer Fläche versteht man nun nach Monge solche Punkte, in welchen die Krümmung der Fläche nach allen Richtungen dieselbe ist; auf dem Ellipsoid giebt es vier solcher Punkte, deren rechtwinklige Coordinaten in Bezug auf die drei Axen des Ellipsoids (vgl. z. B. C. F. H. Leroy, Analyse appliquée à la Géométrie des trois dimensions, §. 429.) ausgedrückt werden durch:

$$x=\pm a\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}},\quad y=0,\quad z=\pm c\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}},$$

und welche die Eigenschaft haben, dass für sie sich die beiden Krümmungslinien auf eine einzige, nämlich auf die durch die grösste und kleinste Axe des Ellipsoids gelegte Ellipse reduciren.

Es lässt sich leicht nachweisen (vgl. Leroy, Anal. appl. à la Géom. des trois dim. §. 214), dass die in diesen Nabelpunkten an das Ellipsoid gelegten Tangentialebenen den Kreisschnitten des Ellipsoids parallel sind, woraus sich mit Rücksicht auf die im vorigen Paragraphen aufgestellte Gleichung (9) ergiebt, dass für alle kürzesten Linien, welche durch die Nabelpunkte gehen, unsere Constante C denselben Werth erhält.

Was die im Obigen eingeführten Coordinaten φ und ψ betrifft, so wird, wie sich aus den in §. 3. aufgestellten Gleichungen (4^a) ergiebt, für die beiden auf der positiven Seite der Ebene der xy liegenden Nabelpunkte:

$$\psi=0,\quad \varphi=+\frac{\pi}{2} \text{ oder } \psi=0,\quad \varphi=-\frac{\pi}{2},$$

und für die beiden auf der negativen Seite jener Ebene befindlichen:

$$\psi=\pm\pi,\quad \varphi=+\frac{\pi}{2} \text{ oder } \psi=\pm\pi,\quad \varphi=-\frac{\pi}{2},$$

wo von den doppelten Vorzeichen für $\frac{\pi}{2}$ das Zeichen $+$ für die auf der positiven Seite der Ebene der yz, das Zeichen $-$ für die auf der negativen Seite derselben Ebene liegenden Nabelpunkte gilt.

§. 8.

Denken wir uns daher die kürzesten Linien durch die beiden Nabelpunkte gehend, welche auf der positiven Seite der Ebene der xy liegen, so müssen wir für unsere Integrale in der Formel (8) als die einen Grenzen in Bezug auf einen der Nabelpunkte $\varphi=+\frac{\pi}{2}$ und $\psi=0$ und in Bezug auf den anderen $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ und $\psi=0$ nehmen. Wir erhalten daher für die Curven, für welche die Summe der Entfernungen der einzelnen Punkte von den erwähnten beiden Nabelpunkten, auf den kürzesten Linien des Ellipsoids gemessen, constant ist, wenn wir diese constante Summe durch S und die in der Formel (8) nach φ und ψ zu integrirenden Funktionen resp. durch F und G bezeichnen, die Gleichung:

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi} F.d\varphi \mp \int_0^{\psi} Gd\psi + \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} Fd\varphi \mp \int_0^{\psi} G.d\psi.$$

Die beiden Integrale nach ψ werden, wie man aus dem zu Ende von §. 5. Gesagten leicht einsieht, immer dasselbe Zeichen erhalten, und zwar das Zeichen —, wenn die obere Grenze ψ zwischen 0 und π, das Zeichen + dagegen, wenn dieselbe zwischen $-\pi$ und 0 liegt. Für die Integrale nach φ ist das doppelte Vorzeichen nicht erforderlich, da wir φ sich nur von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ erstrecken lassen.

Da nun nach dem, was wir im vorigen Paragraphen für die Constante C gezeigt haben, die nach φ und ψ zu integrirenden Functionen in den Integralen der aufgestellten Gleichung dieselben sind, so können wir für dieselbe auch schreiben:

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F.d\varphi \mp \int_{0}^{\psi} G.d\psi$$

oder:

$$\pm\int_{0}^{\psi} G.d\psi=\tfrac{1}{2}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F.d\varphi - S\right\}.$$

Es ergiebt sich demnach, dass für die in Rede stehenden Curven das Integral

$$\pm\int_{0}^{\psi} \frac{d\psi(b^2.\cos\psi^2+c^2.\sin\psi^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a^2-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}\;\sqrt{a^2b^2c^2C-b^2.\cos\psi^2-c^2.\sin\psi^2}}$$

einen constanten Werth erhält, was nur der Fall sein kann, wenn $\pm\psi$, also auch ψ^2, constant ist. Einem constanten Werthe von ψ^2 entspricht aber eine bestimmte Krümmungslinie, und es ist daher die Linie, welche auf dem Ellipsoid um die beiden bezeichneten Nabelpunkte auf ähnliche Weise gebildet wird, wie in der Ebene die Ellipse um ihre beiden Brennpunkte, in der That eine Krümmungslinie.

Für die Curve, für welche die Differenz der beiden erwähnten Entfernungen, auf den kürzesten Linien gemessen, constant ist, erhalten wir ferner, wenn wir diese constante Differenz durch D bezeichnen, die Gleichung:

$$D=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi} F.d\varphi-\int_{\varphi}^{+\frac{\pi}{2}} F.d\varphi,$$

oder da

$$\int_{\varphi}^{+\frac{\pi}{2}} F.d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F.d\varphi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi} Fd\varphi$$

ist, die folgende:

$$D = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi} F.d\varphi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F.d\varphi,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi} F.d\varphi = \tfrac{1}{2}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F.d\varphi + D\right\},$$

und wir kommen daher hier auf den Schluss, dass das Integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\varphi\,(a^2.\cos\varphi^2 + b^2.\sin\varphi^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a^2.\cos\varphi^2 + b^2.\sin\varphi^2 - c^2}\;\sqrt{a^2.\cos\varphi^2 + b^2.\sin\varphi^2 - a^2b^2c^2C}}$$

einen constanten Werth bekömmt, was nur der Fall sein kann, wenn φ constant ist; und da einem constanten Werthe von φ eine Krümmungslinie der anderen Reihe entspricht, so haben wir hiemit für die beiden auf der positiven Seite der Ebene der xy liegenden Nabelpunkte nachgewiesen, dass die um sie nach der Weise der Ellipsen beschriebenen Curven die Krümmungslinien der einen Reihe und die um dieselben nach der Weise der Hyperbeln beschriebenen Curven die Krümmungslinien der anderen Reihe sind.

Ganz auf dasselbe Resultat wären wir gekommen, wenn wir statt der beiden auf der positiven Seite der Ebene der xy liegenden Nabelpunkte die beiden auf der negativen Seite derselben befindlichen genommen hätten; denn dann hätten wir nur als die eine Grenze der Integrale nach ψ statt 0 den Werth $+\pi$ oder $-\pi$ nehmen müssen, je nachdem ψ zwischen 0 und $+\pi$ oder zwischen $-\pi$ und 0 liegt.

§. 9.

Nehmen wir zwei Nabelpunkte, die auf derselben Seite der yz-Ebene liegen, so wird die Sache umgekehrt. Legen wir nämlich den Zeichen S und D wieder dieselbe Bedeutung wie im

vorigen Paragraphen bei, so erhalten wir für die Curven, welche um die beiden auf der positiven Seite der yz-Ebene liegenden Nabelpunkte nach der Weise der Ellipsen beschrieben sind, für positive Werthe von ψ die Gleichung:

$$S=\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} F.d\varphi-\int_{0}^{\psi} G.d\psi+\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} F.d\varphi-\int_{\psi}^{\pi} G.d\psi,$$

und für negative Werthe von ψ die folgende:

$$S=\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} F.d\varphi-\int_{\psi}^{0} G.d\psi+\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} F.d\varphi-\int_{-\pi}^{\psi} G.d\psi.$$

Da nun aber für den ersten Fall

$$\int_{0}^{\psi} G.d\psi+\int_{\psi}^{\pi} G.d\psi=\int_{0}^{\pi} G.d\psi,$$

und für den zweiten

$$\int_{-\pi}^{\psi} G.d\psi+\int_{\psi}^{0} G.d\psi=\int_{-\pi}^{0} G.d\psi,$$

und ausserdem, wie man aus der Beschaffenheit der Function G leicht ersieht,

$$\int_{0}^{\pi} G.d\psi=\int_{-\pi}^{0} G.d\psi$$

ist, so erhalten wir sowohl für positive, als auch für negative Werthe von ψ die Gleichung:

$$S=2\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} F.d\varphi-\int_{0}^{\pi} G.d\psi$$

oder:

$$\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} F.d\varphi=\tfrac{1}{2}\left\{\int_{0}^{\pi} G.d\psi+S\right\},$$

woraus ersichtlich ist, dass in Bezug auf die in Rede stehenden beiden Nabelpunkte für die den Ellipsen entsprechenden Curven φ constant wird.

Für die den Hyperbeln entsprechenden Curven erhalten wir jetzt für Werthe von ψ zwischen 0 und $+\pi$:

$$D = -\int_0^{\psi} G.d\psi + \int_{\psi}^{\pi} G.d\psi,$$

oder da

$$\int_{\psi}^{\pi} G.d\psi = \int_0^{\pi} G.d\psi - \int_0^{\psi} G.d\psi$$

ist:

$$D = \int_0^{\pi} G.d\psi - 2\int_0^{\psi} G.d\psi,$$

woraus sich ergiebt:

$$\int_0^{\psi} G.d\psi = \tfrac{1}{2}\left\{\int_0^{\pi} G.d\psi - D\right\},$$

und für Werthe von ψ zwischen $-\pi$ und 0 erhalten wir jetzt:

$$D = -\int_{\psi}^{0} G.d\psi + \int_{-\pi}^{\psi} G.d\psi,$$

oder da

$$\int_{-\pi}^{\psi} G.d\psi = \int_{-\pi}^{0} G.d\psi - \int_{\psi}^{0} G.d\psi$$

ist:

$$D = \int_{-\pi}^{0} G.d\psi - 2\int_{\psi}^{0} G.d\psi,$$

wofür wir auch schreiben können, da

$$\int_{-\pi}^{0} G.d\psi = \int_0^{\pi} G.d\psi$$

und

$$\int_{\psi}^{0} G.d\psi = -\int_0^{\psi} G.d\psi$$

ist:

$$-\int_0^{\psi} G.d\psi = \tfrac{1}{2}\left\{\int_0^{\pi} G.d\psi - D\right\}.$$

Wir kommen daher allerdings auf den Schluss, dass in Bezug auf die in Rede stehenden beiden Nabelpunkte für die den Hyper-

beln entsprechenden Curven $\pm\psi$, also auch ψ^2, constant wird. Zu demselben Resultate wären wir wieder gekommen, wenn wir statt der auf der positiven Seite der Ebene der yz liegenden Nabelpunkte die beiden auf der negativen Seite derselben befindlichen genommen hätten, denn dann hätten wir nur für die einen Grenzen der Integrale nach φ statt $+\frac{\pi}{2}$ den Werth $-\frac{\pi}{2}$ nehmen müssen.

Es ist somit allgemein nachgewiesen, dass auch für zwei Nabelpunkte, welche auf derselben Seite der Ebene der yz liegen, die um dieselben nach der Weise der Kegelschnitte beschriebenen Curven Krümmungslinien sind, und zwar die nach der Weise der Ellipsen beschriebenen solche, welche vorher den Hyperbeln entsprachen, sowie umgekehrt die nach der Weise der Hyperbeln beschriebenen solche, welche für die auf derselben Seite der xy-Ebene liegenden Nabelpunkte den Ellipsen analog gebildet waren.

§. 10.

Nachdem wir also dargethan haben, dass in der That die Krümmungslinien des Ellipsoids gleichsam Ellipsen oder Hyperbeln sind, die man um zwei auf derselben Seite der xy- oder der yz-Ebene liegende Nabelpunkte beschreibt, wollen wir jetzt untersuchen, ob auch den von diesen Curven gebildeten Vierecken die Eigenschaften zukommen, welche wir als den auf ähnliche Weise in der Ebene gebildeten krummlinigen Vierecken eigenthümlich erkannt haben. Die Orthogonalität findet offenbar auch hier Statt, denn dass die beiden Reihen von Krümmungslinien sich unter rechten Winkeln schneiden, bildet eben eine Grundeigenschaft dieser Curven.

Was die Entfernungen der gegenüberstehenden Eckpunkte betrifft, so können wir denselben hier sowohl die gerade Linie, als auch die kürzeste Linie auf dem Ellipsoid als Maass zu Grunde legen, und wie für beide Fälle das Verhältniss jener Entfernungen beschaffen ist, darauf wollen wir nun unser Augenmerk richten.

§. 11.

Betrachten wir zuerst die directen Entfernungen der gegenüberstehenden Eckpunkte, so ergiebt sich für diese leicht, dass sie einander gleich sind. Bezeichnen wir nämlich die Werthe von φ, welche den beiden Krümmungslinien der einen Reihe entsprechen, mit φ_1 und φ_2, und die Werthe von ψ, welche den

beiden Krümmungslinien der anderen Reihe entsprechen, mit ψ_1 und ψ_2; ferner die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes, in welchem sich die beiden Krümmungslinien φ_1 und ψ_1 schneiden, mit x_1', y_1', z_1'; dieselben Grössen in Bezug auf φ_1 und ψ_2 mit x_1'', y_1'', z_1''; in Bezug auf φ_2 und ψ_1 mit x_2', y_2', z_2', und endlich in Bezug auf φ_2 und ψ_2 mit x_2'', y_2'', z_2'': so kommt es darauf an, zu untersuchen, ob

$$(x_1' - x_2'')^2 + (y_1' - y_2'')^2 + (z_1' - z_2'')^2$$
$$= (x_1'' - x_2')^2 + (y_1'' - y_2')^2 + (z_1'' - z_2')^2$$

ist.

Nach den in §. 3. unter (4ᵃ) aufgestellten Formeln ist nun:

$$x_1' = \frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}} \sin\varphi_1 \sqrt{a^2 - b^2.\cos\psi_1^2 - c^2.\sin\psi_1^2},$$

$$y_1' = b.\sin\psi_1.\cos\varphi_1,$$

$$z_1' = \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}} \cos\psi_1 \sqrt{a^2.\cos\varphi_1^2 + b^2.\sin\varphi_1^2 - c^2};$$

$$x_1'' = \frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}} \sin\varphi_1 \sqrt{a^2 - b^2.\cos\psi_2^2 - c^2.\sin\psi_2^2},$$

$$y_1'' = b.\sin\psi_2.\cos\varphi_1,$$

$$z_1'' = \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}} \cos\psi_2 \sqrt{a^2.\cos\varphi_1^2 + b^2.\sin\varphi_1^2 - c^2};$$

$$x_2' = \frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}} \sin\varphi_2 \sqrt{a^2 - b^2.\cos\psi_1^2 - c^2.\sin\psi_1^2},$$

$$y_2' = b.\sin\psi_1.\cos\varphi_2,$$

$$z_2' = \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}} \cos\psi_1 \sqrt{a^2.\cos\varphi_2^2 + b^2.\sin\varphi_2^2 - c^2};$$

$$x_2'' = \frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}} \sin\varphi_2 \sqrt{a^2 - b^2.\cos\psi_2^2 - c^2.\sin\psi_2^2},$$

$$y_2'' = b.\sin\psi_2.\cos\varphi_2,$$

$$z_2'' = \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}} \cos\psi_2 \sqrt{a^2.\cos\varphi_2^2 + b^2.\sin\varphi_2^2 - c^2};$$

und aus diesen Formeln ersieht man, dass

$$x_1{}'.x_2{}'' = x_1{}''.x_2{}',\quad y_1{}'.y_2{}'' = y_1{}''.y_2{}',\quad z_1{}'.z_2{}'' = z_1{}''.z_2{}'$$

ist. Es bleibt daher nur noch übrig, zu untersuchen, ob

$$x_1{}'^2+x_2{}''^2+y_1{}'^2+y_2{}''^2+z_1{}'^2+z_2{}''^2=x_1{}''^2+x_2{}'^2+y_1{}''^2+y_2{}'^2+z_1{}''^2+z_2{}'^2$$

sei.

Nach den für die Coordinaten der Eckpunkte unseres Vierecks aufgestellten Formeln ist nun:

$$x_1{}'^2+y_1{}'^2+z_1{}'^2 = \frac{a^2}{a^2-c^2}\sin\varphi_1{}^2(a^2-b^2.\cos\psi_1{}^2-c^2.\sin\psi_1{}^2)$$

$$+b^2.\cos\varphi_1{}^2.\sin\psi_1{}^2+\frac{c^2}{a^2-c^2}\cos\psi_1{}^2(a^2.\cos\varphi_1{}^2+b^2.\sin\varphi_1{}^2-c^2),$$

und da

$$a^4.\sin\varphi_1{}^2-a^2.c^2.\sin\varphi_1{}^2.\sin\psi_1{}^2+a^2.c^2.\cos\varphi_1{}^2.\cos\psi_1{}^2-c^4.\cos\psi_1{}^2$$
$$=a^4.\sin\varphi_1{}^2-a^2.c^2.\sin\varphi_1{}^2+a^2.c^2.\cos\psi_1{}^2-c^4.\cos\psi_1{}^2$$
$$=(a^2-c^2)(a^2.\sin\varphi_1{}^2+c^2.\cos\psi_1{}^2),$$

und ferner

$$-\frac{a^2b^2}{a^2-c^2}\sin\varphi_1{}^2.\cos\psi_1{}^2+b^2.\cos\varphi_1{}^2.\sin\psi_1{}^2+\frac{b^2.c^2}{a^2-c^2}\sin\varphi_1{}^2.\cos\psi_1{}^2$$
$$=b^2(\cos\varphi_1{}^2.\sin\psi_1{}^2-\sin\varphi_1{}^2.\cos\psi_1{}^2)$$
$$=b^2(\cos\varphi_1{}^2-\cos\psi_1{}^2)$$

ist, so erhalten wir:

$$x_1{}'^2+y_1{}'^2+z_1{}'^2=a^2.\sin\varphi_1{}^2+b^2(\cos\varphi_1{}^2-\cos\psi_1{}^2)+c^2.\cos\psi_1{}^2;$$

auf dieselbe Weise ergiebt sich aus den obigen Formeln:

$$x_1{}''^2+y_1{}''^2+z_1{}''^2=a^2.\sin\varphi_1{}^2+b^2(\cos\varphi_1{}^2-\cos\psi_2{}^2)+c^2.\cos\psi_2{}^2,$$
$$x_2{}'^2+y_2{}'^2+z_2{}'^2=a^2.\sin\varphi_2{}^2+b^2(\cos\varphi_2{}^2-\cos\psi_1{}^2)+c^2.\cos\psi_1{}^2,$$
$$x_2{}''^2+y_2{}''^2+z_2{}''^2=a^2.\sin\varphi_2{}^2+b^2(\cos\varphi_2{}^2-\cos\psi_2{}^2)+c^2.\cos\psi_2{}^2;$$

und hiemit ist die Richtigkeit der Gleichung

$$x_1{}'^2+x_2{}''^2+y_1{}'^2+y_2{}''^2+z_1{}'^2+z_2{}''^2=x_1{}''^2+x_2{}'^2+y_1{}''^2+y_2{}'^2+z_1{}''^2+z_2{}'^2,$$

und daher auch die Gleichheit der directen Entfernungen der gegenüberstehenden Eckpunkte unseres Vierecks allerdings dargethan.

§. 12.

Betrachten wir nun die Entfernungen der gegenüberstehenden Eckpunkte unseres Vierecks, indem wir bei dem Abmessen derselben nicht die gerade Linie, sondern die kürzeste Linie auf dem Ellipsoid zu Grunde legen, so werden wir auch für diesen Fall nachweisen können, dass jene Entfernungen einander gleich sind.

Sind wieder, wie im vorigen Paragraphen, φ_1, φ_2; ψ_1, ψ_2 die den Seiten unseres Vierecks entsprechenden Werthe von φ und ψ, so haben wir, wenn wir den Werth der Constanten C für die kürzeste Linie, die durch die Punkte (φ_1, ψ_1) und (φ_2, ψ_2) geht, mit C_1 bezeichnen, für die Bestimmung dieser Constanten nach der in §. 4. für die kürzeste Linie auf dem Ellipsoid aufgestellten Gleichung (6^a) die beiden Gleichungen:

$$(10^a)$$

$$\frac{a^2b^2c^2C_1 - b^2.\cos\psi_1{}^2 - c^2.\sin\psi_1{}^2}{a^2.\cos\varphi_1{}^2 + b^2.\sin\varphi_1{}^2 - a^2b^2c^2C_1}$$
$$= \frac{(b^2.\cos\psi_1{}^2 + c^2.\sin\psi_1{}^2)(a^2.\cos\varphi_1{}^2 + b^2.\sin\varphi_1{}^2 - c^2)\,d\psi_1{}^2}{(a^2.\cos\varphi_1{}^2 + b^2.\sin\varphi_1{}^2)(a^2 - b^2.\cos\psi_1{}^2 - c^2.\sin\psi_1{}^2)\,d\varphi_1{}^2},$$

$$\frac{a^2b^2c^2C_1 - b^2.\cos\psi_2{}^2 - c^2.\sin\psi_2{}^2}{a^2.\cos\varphi_2{}^2 + b^2.\sin\varphi_2{}^2 - a^2b^2c^2C_1}$$
$$= \frac{(b^2.\cos\psi_2{}^2 + c^2.\sin\psi_2{}^2)(a^2.\cos\varphi_2{}^2 + b^2.\sin\varphi_2{}^2 - c^2)\,d\psi_2{}^2}{(a^2.\cos\varphi_2{}^2 + b^2.\sin\varphi_2{}^2)(a^2 - b^2.\cos\psi_2{}^2 - c^2.\sin\psi_2{}^2)\,d\varphi_2{}^2};$$

und bezeichnen wir für die kürzeste Linie, welche durch die Punkte (φ_1, ψ_2) und (φ_2, ψ_1) geht, den Werth der Constanten C mit C_2, so haben wir für die Bestimmung von C_2 nach derselben Gleichung (6^a) die beiden Gleichungen:

$$(10^b)$$

$$\frac{a^2b^2c^2C_2 - b^2.\cos\psi_2{}^2 - c^2.\sin\psi_2{}^2}{a^2.\cos\varphi_1{}^2 + b^2.\sin\varphi_1{}^2 - a^2b^2c^2C_2}$$
$$= \frac{(b^2.\cos\psi_2{}^2 + c^2.\sin\psi_2{}^2)(a^2.\cos\varphi_1{}^2 + b^2.\sin\varphi_1{}^2 - c^2)\,d\psi_2{}^2}{(a^2.\cos\varphi_1{}^2 + b^2.\sin\varphi_1{}^2)(a^2 - b^2\cos\psi_2{}^2 - c^2.\sin\psi_2{}^2)\,d\varphi_1{}^2},$$

$$\frac{a^2b^2c^2C_2 - b^2.\cos\psi_1{}^2 - c^2.\sin\psi_1{}^2}{a^2.\cos\varphi_2{}^2 + b^2.\sin\varphi_2{}^2 - a^2b^2c^2C_2}$$
$$= \frac{(b^2.\cos\psi_1{}^2 + c^2.\sin\psi_1{}^2)(a^2\cos\varphi_2{}^2 + b^2.\sin\varphi_2{}^2 - c^2)\,d\psi_1{}^2}{(a^2.\cos\varphi_2{}^2 + b^2.\sin\varphi_2{}^2)(a^2 - b^2.\cos\psi_1{}^2 - c^2.\sin\psi_1)^2 d\varphi_2{}^2}.$$

Multipliciren wir die beiden Gleichungen (10^a) und die beiden Gleichungen (10^b) mit einander, so werden die rechten Seiten der beiden so entstehenden Gleichungen identisch, und wir erhalten durch die Combination dieser Gleichungen, wenn wir

$$a^2b^2c^2C_1 = X_1, \qquad a^2b^2c^2C_2 = X_2;$$

$$a^2.\cos\varphi_1{}^2 + b^2.\sin\varphi_1{}^2 = \Phi_1, \quad a^2.\cos\varphi_2{}^2 + b^2.\sin\varphi_2{}^2 = \Phi_2,$$

$$b^2.\cos\psi_1{}^2 + c^2.\sin\psi_1{}^2 = \Psi_1, \quad b^2.\cos\psi_2{}^2 + c^2.\sin\psi_2{}^2 = \Psi_2$$

setzen, die Gleichung:

$$\frac{(X_1 - \Psi_1)(X_1 - \Psi_2)}{(\Phi_1 - X_1)(\Phi_2 - X_1)} = \frac{(X_2 - \Psi_1)(X_2 - \Psi_2)}{(\Phi_1 - X_2)(\Phi_2 - X_2)}$$

oder:

$$(11) \qquad (X_1 - \Psi_1)(X_1 - \Psi_2)(X_2 - \Phi_1)(X_2 - \Phi_2)$$
$$- (X_2 - \Psi_1)(X_2 - \Psi_2)(X_1 - \Phi_1)(X_1 - \Phi_2) = 0.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf X_1 eine quadratische, und sie wird sich daher in zwei Gleichungen vom ersten Grade zerlegen lassen, von welchen jede einen besonderen Werth für X_1 liefert. Da die obige Gleichung durch $X_1 = X_2$ erfüllt wird, so wird die eine der beiden Gleichungen ersten Grades

$$(11^a) \qquad X_1 - X_2 = 0$$

sein, und die andere erhält man, wenn man nach Auflösung der beiden Producte in der obigen Gleichung die linke Seite derselben durch $X_1 - X_2$ dividirt. Auf diese Weise ergiebt sich als die zweite der beiden Gleichungen, in welche sich die obige quadratische zerlegen lässt:

$$(11^b) \quad (\Phi_1 + \Phi_2 - \Psi_1 - \Psi_2)X_1.X_2 - (\Phi_1.\Phi_2 - \Psi_1.\Psi_2)(X_1 + X_2)$$
$$+ \Phi_1.\Phi_2(\Psi_1 + \Psi_2) - \Psi_1.\Psi_2(\Phi_1 + \Phi_2) = 0.$$

Es muss also das Verhältniss zwischen X_1 und X_2 entweder durch diese Gleichung oder durch die andere

$$X_1 - X_2 = 0$$

dargestellt werden.

Aus den Gleichungen (10^a) und (10^b) ist nun ersichtlich, dass für $\varphi_2 = -\varphi_1$ und $\psi_2 = -\psi_1$ auch die einfachen, zur Bestimmung von C_1 und C_2 dienenden Gleichungen identisch werden, dass

also für jene Beziehungen zwischen den Werthen von φ und ψ die Constante $C_1 = C_2$, also auch $X_1 = X_2$ sein muss.

Da für $\varphi_2 = -\varphi_1$ und $\psi_2 = -\psi_1$ auch $\Phi_2 = \Phi_1$ und $\Psi_2 = \Psi_1$ wird, so verwandelt sich für diese Bedingung die Gleichung (11^b), wenn wir den gemeinschaftlichen Werth von Φ_1 und Φ_2 mit Φ und den gemeinschaftlichen Werth von Ψ_1 und Ψ_2 mit Ψ bezeichnen, in die folgende:

$$2(\Phi-\Psi)X_1.X_2-(\Phi^2-\Psi^2)(X_1+X_2)+2\Phi\Psi(\Phi-\Psi)=0,$$

oder, wenn wir diese Gleichung durch $\Phi-\Psi$ dividiren, in:

$$2X_1.X_2-(\Phi+\Psi)(X_1+X_2)+2\Phi.\Psi=0.$$

Sollte sich aus dieser Gleichung $X_1 = X_2$ ergeben, so müsste, wenn wir dann den gemeinschaftlichen Werth $a^2b^2c^2C$ von $a^2b^2c^2C_1$ und $a^2b^2c^2C_2$ oder von X_1 und X_2 mit X bezeichnen,

$$2X^2-2(\Phi+\Psi)X+2\Phi.\Psi=0$$

oder

$$X^2-(\Phi+\Psi)X+\Phi.\Psi=0$$

sein. Da wir für die letztere Gleichung auch

$$(X-\Phi)(X-\Psi)=0$$

schreiben können, so folgt, dass entweder

$$X=\Phi \quad \text{oder} \quad X=\Psi,$$

d. h.

$$a^2b^2c^2C=a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2 \quad \text{oder} \quad a^2b^2c^2C=b^2.\cos\psi^2+c^2.\sin\psi^2$$

sein müsste.

Wenn wir aber einen dieser Werthe für $a^2b^2c^2C$ in die für die kürzeste Linie aufgestellte Gleichung (6^a) einsetzen, so verwandelt sich dieselbe in:

$$d\psi=0 \quad \text{oder} \quad d\varphi=0,$$

d. h.

$$\psi=\text{Const.} \quad \text{oder} \quad \varphi=\text{Const.},$$

woraus hervorgeht, dass die je zwei gegenüberstehende Eckpunkte unseres Vierecks verbindenden kürzesten Linien Krümmungslinien sein müssten, was nicht der Fall sein kann, da die in Rede stehenden kürzesten Linien Punkte mit einander verbinden, welche nicht auf denselben Krümmungslinien liegen.

Es ist hieraus ersichtlich, dass die Gleichung (11^b) das richtige Verhältniss zwischen X_1 und X_2 nicht angiebt, und es muss dasselbe daher durch die andere Gleichung (11^a) dargestellt werden, nach welcher

$$X_1 = X_2,$$

d. h.

$$a^2b^2c^2C_1 = a^2b^2c^2C_2,$$

also

$$C_1 = C_2$$

ist.

§. 13.

Nachdem wir uns so davon überzeugt haben, dass die Constante C für die beiden kürzesten Linien, die durch die gegenüberstehenden Eckpunkte unseres Vierecks gehen, denselben Werth erhält, können wir leicht nachweisen, dass die Längen der beiden kürzesten Linien zwischen jenen Punkten einander gleich sind.

Setzen wir nämlich voraus, dass $\varphi_2 > \varphi_1$, $\psi_2 > \psi_1$ ist, so erhalten wir aus der in §. 5. aufgestellten Gleichung (8), wenn wir die in derselben nach φ und ψ zu integrirenden Functionen, welche nach dem, was wir so eben für die Werthe der Constanten C nachgewiesen haben, für beide kürzesten Linien dieselben sind, wie oben, resp. mit F und G bezeichnen, für die Länge der Linie zwischen den beiden Punkten (φ_1, ψ_1) und (φ_2, ψ_2) sowohl, als auch derjenigen zwischen den beiden Punkten (φ_1, ψ_2) und (φ_2, ψ_1) den Ausdruck:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F.d\varphi - \int_{\psi_1}^{\psi_2} G.d\psi,$$

und wir haben somit die Gleichheit der Entfernungen der gegenüberstehenden Eckpunkte unseres Vierecks nachgewiesen, sowohl wenn wir die gerade Linie, als auch wenn wir die kürzeste Linie auf dem Ellipsoid bei der Abmessung derselben zu Grunde legen.

§. 14.

Aus dem, was wir in §. 12. gezeigt haben, dass die Constante C für die beiden kürzesten Linien, welche die gegenüberstehen-

den Eckpunkte unseres Vierecks mit einander verbinden, denselben Werth erhält, können wir noch den Satz ableiten, dass jene kürzesten Linien mit den Krümmungslinien, welche durch ihren Durchschnittspunkt gehen, gleiche Winkel bilden.

Denken wir uns nämlich in jenem Durchschnittspunkte eine Tangentialebene an das Ellipsoid construirt, und bezeichnen die Entfernung des Ellipsoid-Mittelpunktes von dieser Tangentialebene, wie in §. 6., mit P, und die halben Durchmesser des Ellipsoids, welche den Tangenten an den beiden in Rede stehenden kürzesten Linien in ihrem Durchschnittspunkte parallel sind, mit D_1 und D_2, so haben wir, da die Constante C für diese beiden Linien dieselbe ist, nach der in §. 6. aufgestellten Gleichung (9):

$$D_1^2 = \frac{p^2}{C} \text{ und } D_2^2 = \frac{p^2}{C},$$

woraus hervorgeht, dass $D_1 = D_2$ ist.

Wenn wir uns also durch den Mittelpunkt des Ellipsoids parallel mit der erwähnten Tangentialebene eine Ebene gelegt denken, so werden die Durchmesser der durch den Durchschnitt dieser Ebene mit dem Ellipsoid gebildeten Ellipse, welche den Tangenten unserer beiden kürzesten Linien in ihrem Durchschnittspunkte parallel sind, einander gleich sein.

Wie nun ferner Dupin gezeigt hat (vergl. die Abhandlung von Joachimsthal in Crelle's Journal, XXVI., S. 166.), sind die Tangenten zweier sich schneidender Krümmungslinien in ihrem Durchschnittspunkte den Axen der Ellipse parallel, welche durch das Ellipsoid und die durch den Mittelpunkt desselben parallel mit der Tangentialebene in dem Durchschnittspunkte der Krümmungslinien gelegte Ebene gebildet wird, und da in einer Ellipse gleiche Durchmesser mit den beiden Axen gleiche Winkel bilden, so ist die Richtigkeit des von uns aufgestellten Satzes hiermit dargethan.

XXI.

Integration der linearen Differentialgleichung

$$x^{2n}y^{(n)} = Axy' + By. \tag{1}$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie zu Wien.

Ich habe mich mit der Integration der Gleichung

$$y^{(n)} = Ax^m y' + Bx^{m-1}y \tag{2}$$

schon zu wiederholten Malen beschäftigt. (Archiv. Band XXVIII. Seite 254., Band XXX. Seite 82.) Die Gleichung (1) ist ein specieller Fall der Gleichung (2) und geht aus ihr hervor, wenn man

$$m = 1 - 2n$$

setzt. Da ich aber bei der Integration der Gleichung (2) bloss positive Werthe von $m + n$ voraussetzte, so will ich hier zeigen, dass sich trotzdem die Gleichung (1) auf ähnliche Weise integriren lässt. Folgt man genau dem Band XXVIII. Seite 254. angezeigten Weg, so erhält man:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} \psi(ux)\, u^{\frac{B}{A}-1}\, e^{\frac{1}{nAu^n}}\, du,$$

woselbst u_1, u_2 Wurzeln der Gleichung

$$u^{\frac{B}{A}}\, e^{\frac{1}{nAu^n}}\, \psi(ux) = 0$$

sind, und $\psi(x)$ ergibt sich aus,

$$x^{2n}\psi^{(n)}(x) = \psi(x),$$

und es ist folglich:

$$\psi(x) = x^{n-1}[C_1 e^{-\frac{\mu_1}{x}} + C_2 e^{-\frac{\mu_2}{x}} + \ldots + C_n e^{-\frac{\mu_n}{x}}],$$

unter $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ die n Wurzeln der Gleichung $\mu^n = 1$, und unter $C_1, C_2 \ldots C_n$ willkührliche Constante verstanden. Man hat daher:

$$y = x^{n-1} \int_{u_1}^{u_2} u^{n+\frac{B}{A}-2} e^{\frac{1}{nAu^n}} [C_1 e^{-\frac{\mu_1}{ux}} + C_2 e^{-\frac{\mu_2}{ux}} + \ldots + C_n e^{-\frac{\mu_n}{ux}}] du,$$

und als Gleichung zur Bestimmung der Integrationsgrenzen:

$$u^{n+\frac{B}{A}-1} e^{\frac{1}{nAu^n}} . x^{n-1} [C_1 e^{-\frac{\mu_1}{ux}} + C_2 e^{-\frac{\mu_2}{ux}} + \ldots C_n e^{-\frac{\mu_n}{ux}}] = 0.$$

Damit man aus dieser letzten Gleichung schickliche Grenzwerthe erhält, wollen wir statt u eine neue Variable v in Rechnung einführen mittelst der Substitution

$$u = \frac{1}{v};$$

alsdann hat man:

$$y = x^{n-1} \int_{v_1}^{v_2} v^{-n-\frac{B}{A}} e^{\frac{v^n}{nA}} [C_1 e^{-\frac{\mu_1 v}{x}} + C_2 e^{-\frac{\mu_2 v}{x}} + \ldots + C_n e^{-\frac{\mu_n v}{x}}] dv$$

und als Gleichung zur Bestimmung der Grenzen:

$$v^{1-n-\frac{B}{A}} e^{\frac{v^n}{nA}} x^{n-1} [C_1 e^{-\frac{\mu_1 v}{x}} + C_2 e^{-\frac{\mu_2 v}{x}} + \ldots + C_n e^{-\frac{\mu_n v}{x}}] = 0.$$

Setzt man voraus, dass A negativ, $1 - n - \frac{B}{A}$ aber positiv ist, so hat man $v = 0$ und $v = \infty$ als Wurzeln der eben hingestellten Gleichung, und das Integral der vorgelegten Gleichung (1) ist alsdann:

$$y = x^{n-1} \int_0^\infty v^{-n-\frac{B}{A}} e^{\frac{v^n}{nA}} [C_1 e^{-\frac{\mu_1 v}{x}} + C_2 e^{-\frac{\mu_2 v}{x}} + \ldots + C_n e^{-\frac{\mu_n v}{x}}] dv.$$

So hat man z. B., falls $A = -1$, $B = n$ ist, die Gleichung:

$$x^{2n} y^{(n)} = -xy' + ny,$$

welche das Integral hat:

$$y = x^{n-1} \int_0^\infty e^{-\frac{u^n}{nA}} [C_1 e^{-\frac{\mu_1 u}{x}} + C_2 e^{-\frac{\mu_2 u}{x}} + \ldots + C_n e^{-\frac{\mu_n u}{x}}] du.$$

XXII.

Note bezüglich eines zwischen Differenzengleichungen und Differentialgleichungen stattfindenden Reciprocitätsgesetzes.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie zu Wien.

Nachdem mir die Summation einiger unendlichen Kettenbrüche gelungen war, strebte ich natürlich dahin, noch mehrere andere Kettenbrüche, namentlich den folgenden:

$$\text{(I)} \qquad \psi(x)=x^2+\cfrac{1}{(x+1)^2+\cfrac{1}{(x+2)^2+\ldots}},$$

zur Summation zu bringen, und obwohl mir dieses bisher nicht gelang, bin ich doch hierbei zu einem sehr beachtenswerthen Satze gelangt, den mitzutheilen ich mir hier erlaube.

Aus (I) folgt:

$$\psi(x)=x^2+\frac{1}{\psi(x+1)},$$

und setzt man

$$\psi(x)=\frac{F(x)}{F(x+1)},$$

folglich

$$\psi(x+1)=\frac{F(x+1)}{F(x+2)},$$

so kommt man zu der Differenzengleichung

$$(2) \qquad F(x+2)+x^2F(x+1)-F(x)=0,$$

welche nun aufzulösen ist.

Man hat, meine Methode zur Auflösung von Differenzengleichungen einschlagend, für $F(x)$ zu setzen einen Ausdruck von folgender Form:

$$F(x)=\left\{\frac{\partial^x f(r)}{\partial r^x}\right\}_\lambda,$$

und erhält dann, unter Voraussetzung von $\lambda=0$, zur Bestimmung von $f(r)$ die Differentialgleichung

$$(3) \qquad r^2f'''(r)+(r+1)f''(r)-f(r)=0,$$

welche in geschlossener Form zu integriren mir bisher nicht gelang. Ich werde nun versuchen, diese Differentialgleichung (3) mit Hülfe unendlicher Reihen zu integriren, und setze zu dem Behufe $f(r)$ in folgender Form voraus:

$$(4) \qquad f(r)=A_0+A_1r+A_2r^2+A_3r^3+A_4r^4+\ldots.,$$

unter A_0, A_1, A_2, A_3, A_4.... constante Zahlen verstanden. Aus (4) folgt:

$$f''(r)=1.2A_2+2.3A_3r+3.4A_4r^2+\ldots.,$$
$$f'''(r)=1.2.3A_3+2.3.4A_4r+3.4.5A_5r^2+\ldots.;$$

somit ist, diess in (3) substituirend:

$$\begin{aligned}(1.2A_2-A_0)&+(2.3A_3+1.2A_2-A_1)r\\&+(3.4A_4+2^2.3A_3-A_2)r^2\\&+(4.5A_5+3^2.4A_4-A_3)r^3\\&+(5.6A_6+4^2.5A_5-A_4)r^4+\ldots.=0,\end{aligned}$$

und damit diese Gleichung stattfinde, müssen die einzelnen Coefficienten der Potenzen von r, und zwar jeder für sich, verschwinden, d. h. es muss sein:

$$\begin{aligned}2A_2&=A_0,\\2.3A_3+1.2A_2&=A_1,\\3.4A_4+2^2.3A_3&=A_2,\\4.5A_5+3^2.4A_4&=A_3,\\5.6A_6+4^2.5A_5&=A_4,\\&\ldots\ldots\end{aligned}$$

und allgemein:

$$(n+1)(n+2)A_{n+2}+n^2(n+1)A_{n+1}=A_n.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt:

$$A_2=\frac{A_0}{2};$$

aus der zweiten:

$$A_3=\frac{A_1}{6}-\frac{A_0}{6};$$

aus der dritten:

$$A_4=-\frac{A_1}{6}+\frac{5A_0}{24} \text{ u. s. w.};$$

und aus der allgemeinen Gleichung

$$(n+1)(n+2)A_{n+2}+n^2(n+1)A_{n+1}=A_n$$

folgt, wenn man

$$A_n=\frac{\varphi(n)}{n!},$$

somit

$$A_{n+1}=\frac{\varphi(n+1)}{(n+1)!},\quad A_{n+2}=\frac{\varphi(n+2)}{(n+2)!}$$

setzt:

$$\varphi(n+2)+n^2\varphi(n+1)-\varphi(n)=0.$$

Allein diess ist genau die Gleichung (2), von der wir ausgingen, somit sieht man, dass man behufs der Integration der Differenzengleichung

$$(2)\qquad F(x+2)+x^2F(x+1)-F(x)=0$$

das Integral der Differentialgleichung

$$(3)\qquad r^2f'''(r)+(r+1)f''(r)-f(r)=0$$

bedarf, und umgekehrt bedarf man, behufs der Integration der Differentialgleichung (3), das Integral der Differenzengleichung (2).

Die beiden Gleichungen (2) und (3) hängen daher auf eine merkwürdige reciproke Weise von einander ab, und dürften einer genauern Untersuchung würdig befunden werden.

XXIII.

Note über unendliche Kettenbrüche.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,
Professor an der Handels-Akademie zu Wien.

Im ersten Supplementbande zu Klügel's mathematischem Wörterbuche Seite 555. ist für den Kettenbruch

$$\psi(x)=\cfrac{r}{x+\cfrac{r}{x+1+\cfrac{r}{x+2+\ldots}}}$$

folgender Werth gegeben:

$$\psi(x)=\frac{r}{x}\cdot\frac{1+\frac{r}{x+1}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{r^2}{(x+1)(x+2)}+\ldots}{1+\frac{r}{x}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{r^2}{x(x+1)}+\ldots},$$

der auch nachstehende Schreibweise gestattet:

$$\psi(x)=r.\frac{\frac{1}{x!}+\frac{r}{1!(x+1)!}+\frac{r^2}{2!(x+2)!}+\ldots}{\frac{1}{(x-1)!}+\frac{r}{1!x!}+\frac{r^2}{2!(x+1)!}+\ldots}.$$

Da nun

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{2\sqrt{r}\cos\omega}\,d\omega=1+r+\frac{r^2}{2!2!}+\frac{r^3}{3!3!}+\frac{r^4}{4!4!}+\ldots$$

(siehe: Lacroix, Traité du calcul différentiel etc., 3. Bd., S. 559.) ist, so hat man:

$$\psi(x)=r.\frac{\frac{\partial^x}{\partial r^x}\left[\int_0^\pi e^{2\sqrt{r}\cos\omega}\,d\omega\right]}{\frac{\partial^{x-1}}{\partial r^{x-1}}\left[\int_0^\pi e^{2\sqrt{r}\cos\omega}\,d\omega\right]},$$

somit

$$x+\cfrac{r}{x+1+\cfrac{r}{x+2+\cfrac{r}{x+3+\ldots}}}=\frac{\frac{\partial^{x-1}}{\partial r^{x-1}}\left[\int_0^\pi e^{2\sqrt{r}\cos\omega}\,d\omega\right]}{\frac{\partial^x}{\partial r^x}\left[\int_0^\pi e^{2\sqrt{r}\cos\omega}\,d\omega\right]}.$$

Ich werde nun den unendlichen Kettenbruch

$$\psi(x)=2x+1+\cfrac{2m}{2x+3+\cfrac{2m}{2x+5+\cfrac{2m}{2x+7+\ldots}}}$$

in geschlossener Form zu bestimmen suchen. Es ist

$$\psi(x)=2x+1+\frac{2m}{\psi(x+1)},$$

und wenn man

$$\psi(x)=\frac{f(x)}{f(x+1)}$$

setzt, so kömmt man zu der Differenzengleichung

$$2mf(x+2)+(2x+1)f(x+1)-f(x)=0.$$

Setzt man hierein

$$f(x)=\left\{\frac{\partial^x\varphi(r)}{\partial r^x}\right\}_\lambda,$$

so erhält man zur Bestimmung von $\varphi(r)$ folgende Differentialgleichung:

$$(2r+2m-2\lambda)\varphi''(r)+\varphi'(r)-\varphi(r)=0,$$

die für $m=\lambda$ sich vereinfacht, und zum Integrale hat:

$$\varphi(r)=C_1e^{+\sqrt{2r}}+C_2e^{-\sqrt{2r}};$$

folglich ist:

$$f(x)=\left\{\frac{\partial^x}{\partial r^x}[C_1e^{+\sqrt{2r}}+C_2e^{-\sqrt{2r}}]\right\}_m,$$

und somit:

$$\psi(x)=\frac{\left\{\frac{\partial^x}{\partial r^x}[C_1 e^{+\sqrt{2r}}+C_2 e^{-\sqrt{2r}}]\right\}_m}{\left\{\frac{\partial^{x+1}}{\partial r^{x+1}}[C_1 e^{+\sqrt{2r}}+C_2 e^{-\sqrt{2r}}]\right\}_m}.$$

Nun lässt sich weiter leicht zeigen, dass $C_1=C_2$ ist; man erhält daher, wenn man der Einfachheit halber m durch r ersetzt, folgende merkwürdige Formel:

$$2x+1+\cfrac{2r}{2x+3+\cfrac{2r}{2x+5+\cfrac{2r}{2x+7+\ldots}}}=\frac{\frac{\partial^x}{\partial r^x}[e^{+\sqrt{2r}}+e^{-\sqrt{2r}}]}{\frac{\partial^{x+1}}{\partial r^{x+1}}[e^{+\sqrt{2r}}+e^{-\sqrt{2r}}]},$$

woraus man sieht, auf welche eigenthümliche Weise r und auf welche eigenthümliche Weise x in die Summe eintreten.

XXIV.

Zur Lehre vom Dreieck.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lehrer der Mathematik in der k. k. österreichischen Kriegs-Marine, eingeschifft auf Sr. Maj. Propeller-Fregatte Donau.

---

1) Indem wir voraussetzen, dass der Mittelpunkt O (Taf. II. Fig. 2.) des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises innerhalb des Dreieckes liege, fällen wir von ihm aus auf die drei Seiten des Dreieckes ABC die Senkrechten OD, OE, OF, construiren das Dreieck DEF und verbinden O mit den drei Ecken A, B, C durch die Geraden OA, OB, OC. Nach den Lehren der Elementar-Geometrie sind alsdann die Seiten des Dreieckes DEF halb so gross, als die Seiten des Dreieckes ABC, und

zwar ist, wenn wir diese letzteren wie gewöhnlich mit a, b, c bezeichnen, $EF=\frac{1}{2}a$, $DF=\frac{1}{2}b$, $DE=\frac{1}{2}c$. Ferner entstehen auf diese Art drei Vierecke $AEFO$, $BDFO$, $CDEO$, welche die für uns besonders wichtige Eigenschaft haben, dass sich denselben Kreise umschreiben lassen, welcher Umstand die Anwendung des Ptolemäischen Satzes: „Das Rechteck aus den Diagonalen eines im Kreise beschriebenen Viereckes ist gleich der Summe der Rechtecke aus den gegenüberliegenden Seiten" gestattet. In der That folgt, wenn man $OD=p_1$, $OE=p_2$, $OF=p_3$ und den Radius des umschriebenen Kreises gleich r setzt:

$$(1)\qquad \begin{aligned} ar &= bp_3 + cp_2, \\ br &= cp_1 + ap_3, \\ cr &= ap_2 + bp_1. \end{aligned}$$

Werden diese drei Gleichungen der Reihe nach addirt, und je zwe addirt, die dritte davon subtrahirt, so erhält man folgende vier Gleichungen:

$$(\mathrm{a})\qquad \begin{aligned} (a+b+c)r &= p_1(b+c)+p_2(a+c)+p_3(a+b), \\ (b+c-a)r &= p_1(b+c)+p_2(a-c)+p_3(a-b), \\ (a+c-b)r &= p_1(b-c)+p_2(a+c)+p_3(b-a), \\ (a+b-c)r &= p_1(c-b)+p_2(c-a)+p_3(a+b). \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit den Buchstaben Δ, ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 den Flächenraum des Dreieckes ABC, den Radius des demselben eingeschriebenen Kreises und die Radien der drei äusseren Berührungskreise, welche beziehungsweise den Seiten a, b, c gegenüber liegen, so ist (s. Archiv Thl. XXVII. p. 328.):

$$(2)\qquad \begin{aligned} 2\Delta &= (a+b+c)\varrho, \\ 2\Delta &= (b+c-a)\varrho_1, \\ 2\Delta &= (a+c-b)\varrho_2, \\ 2\Delta &= (a+b-c)\varrho_3; \end{aligned}$$

ferner ist aber auch, wie aus dem Anblick der Figur unmittelbar hervorgeht, $2\Delta=ap_1+bp_2+cp_3$, mithin:

$$\begin{aligned} ap_1+bp_2+cp_3-(a+b+c)\varrho &= 0, \\ -ap_1-bp_2-cp_3+(b+c-a)\varrho_1 &= 0, \\ -ap_1-bp_2-cp_3+(a+c-b)\varrho_2 &= 0, \\ -ap_1-bp_2-cp_3+(a+b-c)\varrho_3 &= 0; \end{aligned}$$

und wenn man diese vier Gleichungen zu jenen (a) der Reihe nach addirt und bemerkt, dass alsdann beide Theile derselben die Factoren

$$a+b+c,$$

$$b+c-a,$$

$$a+c-b,$$

$$a+b-c$$

gemeinschaftlich haben, durch welche man also abkürzen kann, so erhält man die vier Relationen:

$$r= \quad p_1+p_2+p_3-\varrho,$$

$$r= \quad p_1-p_2-p_3+\varrho_1,$$

$$r=-p_1+p_2-p_3+\varrho_2,$$

$$r=-p_1-p_2+p_3+\varrho_3;$$

oder

$$(3) \quad \begin{aligned} p_1+p_2+p_3&=\varrho+r, \\ p_2+p_3-p_1&=\varrho_1-r, \\ p_1+p_3-p_2&=\varrho_2-r, \\ p_1+p_2-p_3&=\varrho_3-r; \end{aligned}$$

welche in die gewöhnliche Wortsprache übersetzt folgenden Lehrsatz geben:

Liegt der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises innerhalb des Dreieckes, so ist die Summe der aus diesem Mittelpunkt auf die Seiten gefällten Perpendikel der Summe der Radien des eingeschriebenen und umschriebenen Kreises gleich. — Die Summe zweier Perpendikel vermindert um das dritte ist gleich dem Radius des dem subtractiven Perpendikel gegenüber liegenden äusseren Berührungskreises weniger dem Radius des umschriebenen Kreises.

Werden die drei letzten Gleichungen in (3) addirt, so erhält man mit Rücksicht auf die erste derselben:

$$p_1+p_2+p_3=\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3-3r=\varrho+r$$

oder

$$(4) \quad \varrho_1+\varrho_2+\varrho_3-\varrho=4r.$$

Wenn man die drei letzten Gleichungen des Systems (3) der Reihe nach zur ersten addirt, so folgt:

$$2(p_2+p_3)=\varrho_1+\varrho,$$
$$2(p_1+p_3)=\varrho_2+\varrho,$$
$$2(p_1+p_2)=\varrho_3+\varrho;$$

und wenn man diese Gleichungen addirt:

$$4(p_1+p_2+p_3)=\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+3\varrho;$$

werden endlich die vorhergehenden drei Gleichungen mit 2 multiplicirt und von der letzten subtrahirt, so ergibt sich mit Leichtigkeit:

$$(5)\qquad \begin{aligned} 4p_1&=\varrho+\varrho_2+\varrho_3-\varrho_1,\\ 4p_2&=\varrho+\varrho_1+\varrho_3-\varrho_2,\\ 4p_3&=\varrho+\varrho_1+\varrho_2-\varrho_3. \end{aligned}$$

2) Wir wollen nun voraussetzen, der Mittelpunkt O (Taf. II. Fig. 3.) des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises liege ausserhalb desselben und der Seite BC gegenüber. Fällen wir wieder von O aus auf die drei Seiten die Perpendikel OD, OE, OF, construiren das Dreieck DEF und verbinden O mit den drei Ecken des Dreieckes ABC durch die Geraden OA, OB, OC, so ist nach wie vor $EF=\frac{1}{2}a$, $DF=\frac{1}{2}b$, $DE=\frac{1}{2}c$, und es entstehen drei Vierecke $AEFO$, $BDFO$, $CDEO$, um welche ebenfalls Kreise beschrieben werden können, so dass sich auch auf sie der Satz des Ptolemäus anwenden lässt: aber diese Anwendung führt, wenn wir $OD=p_1$, $OE=p_2$, $OF=p_3$ setzen, jetzt zu folgenden Relationen:

$$(6)\qquad \begin{aligned} ar&=cp_2+bp_3,\\ br&=ap_3-cp_1,\\ cr&=ap_2-bp_1. \end{aligned}$$

Werden diese drei Gleichungen addirt und dann auch je zwei addirt, die dritte davon subtrahirt, so erhält man leicht folgende vier Gleichungen:

$$(b)\qquad \begin{aligned} (a+b+c)r&=-p_1(b+c)+p_2(a+c)+p_3(a+b),\\ (b+c-a)r&=-p_1(b+c)+p_2(a-c)+p_3(a-b),\\ (a+c-b)r&=p_1(c-b)+p_2(a+c)+p_3(b-a),\\ (a+b-c)r&=p_1(b-c)+p_2(c-a)+p_3(a+b). \end{aligned}$$

Da aus der Figur unmittelbar einleuchtet, dass die Grösse $-ap_1+bp_2+cp_3$ den doppelten Flächenraum des Dreiecks ABC vorstellt, so hat man mit Rücksicht auf früher Gesagtes auch folgende vier identische Gleichungen:

$$-ap_1+bp_2+cp_3-(a+b+c)\varrho\ =0,$$
$$ap_1-bp_2-cp_3+(b+c-a)\varrho_1=0,$$
$$ap_1-bp_2-cp_3+(a+c-b)\varrho_2=0,$$
$$ap_1-bp_2-cp_3+(a+b-c)\varrho_3=0;$$

und wenn man diese zu den vier vorgehenden Gleichungen der Ordnung nach addirt und die gleichartigen Glieder vereinigt, so zeigt sich bald, dass beiden Theilen die Factoren:

$$a+b+c,$$
$$b+c-a,$$
$$a+c-b,$$
$$a+b-c$$

der Reihe nach gemeinschaftlich sind, durch welche abgekürzt man zu folgenden vier Gleichungen geführt wird:

$$r=-p_1+p_2+p_3-\varrho,$$
$$r=-p_1-p_2-p_3+\varrho_1,$$
$$r=\ \ p_1+p_2-p_3+\varrho_2,$$
$$r=\ \ p_1-p_2+p_3+\varrho_3$$

oder

$$(7)\qquad \begin{aligned} p_1+p_2+p_3&=\varrho_1-r,\\ p_2+p_3-p_1&=\varrho\ +r,\\ p_1+p_3-p_2&=r\ -\varrho_3,\\ p_1+p_2-p_3&=r\ -\varrho_2; \end{aligned}$$

welche Gleichungen folgenden Lehrsatz aussprechen:

Liegt der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ausser dem Dreieck, so ist die Summe der aus diesem Mittelpunkt auf die Seiten gefällten Perpendikel gleich dem Radius desjenigen äusseren Berührungskreises, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises derselben Seite gegenüberliegt, weni-

ger dem Radius des umschriebenen Kreises. — Die Summe der zwei anliegenden Perpendikel weniger dem dritten oder mittleren ist gleich der Summe der Radien des eingeschriebenen und umschriebenen Kreises. — Die Summe des mittleren und des ersten anliegenden Perpendikels weniger dem zweiten ist gleich dem Radius des umschriebenen Kreises weniger dem Radius des ersten anliegenden Berührungskreises *).

Werden die letzten drei Gleichungen addirt, und berücksichtigt man die erste dabei, so zeigt sich:

$$p_1+p_2+p_3=\varrho-\varrho_2-\varrho_3+3r=\varrho_1-r,$$

woraus folgt:

$$(4)\qquad \varrho_1+\varrho_2+\varrho_3-\varrho=4r;$$

da diese Relation mit jener (4) identisch ist, so gilt in voller Allgemeinheit folgender Lehrsatz:

In jedem Dreieck ist die Summe der Radien der drei äusseren Berührungskreise weniger dem Radius des eingeschriebenen Kreises dem vierfachen Radius des umschriebenen Kreises gleich.

Addirt man die drei letzten Gleichungen in (7) der Reihe nach zur ersten, so folgt:

$$2(p_2+p_3)=\varrho+\varrho_1,$$
$$2(p_1+p_3)=\varrho_1-\varrho_3,$$
$$2(p_1+p_2)=\varrho_1-\varrho_2,$$

aus deren Vereinigung sich

$$4(p_1+p_2+p_3)=3\varrho_1-\varrho_2-\varrho_3+\varrho$$

ergibt. Werden diese Gleichungen nun mit 2 multiplicirt und der Reihe nach von der letzten subtrahirt, so erhält man:

$$(8)\qquad \begin{aligned} 4p_1&=\varrho_1-\varrho_2-\varrho_3-\varrho,\\ 4p_2&=\varrho_1+\varrho+\varrho_3-\varrho_2,\\ 4p_3&=\varrho_1+\varrho+\varrho_1-\varrho_3; \end{aligned}$$

---

*) Der in La Frémoire's Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben, herausgegeben von Dr. C. G. Reuschle, p. 81. aufgeführte Lehrsatz gilt also nicht für jedes Dreieck, sondern nur dann, wenn der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises innerhalb des Dreiecks fällt, für welchen Fall er auch dort nur bewiesen ist.

mittelst welcher Gleichungen die Perpendikel p_1, p_2, p_3 bestimmt werden durch die Radien der Berührungskreise.

3) Die Gleichung (4) lässt sich auch leicht aus den beiden folgenden:

$$(9)\qquad r=\tfrac{1}{4}\frac{(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_3)(\varrho_2+\varrho_3)}{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3},\quad \varrho=\frac{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3},$$

welche ich im Archiv Thl. XXIX. p. 434. bewiesen habe, ableiten, denn sie geben unmittelbar:

$$4r=(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_3)(\varrho_2+\varrho_3)\frac{\varrho}{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}=\varrho\left(1+\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)\left(1+\frac{\varrho_3}{\varrho_2}\right)\left(1+\frac{\varrho_1}{\varrho_3}\right)$$

$$=\varrho\left\{1+\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}+\frac{\varrho_3}{\varrho_2}+\frac{\varrho_1}{\varrho_3}\right)+\left(\frac{\varrho_3}{\varrho_1}+\frac{\varrho_2}{\varrho_3}+\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)+1\right\}$$

$$=\varrho\left\{2+\varrho_1\left(\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}\right)+\varrho_2\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_3}\right)+\varrho_3\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\right\},$$

oder, weil

$$(10)\qquad \frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}$$

ist:

$$4r=\varrho\left\{2+\varrho_1\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}\right)+\varrho_2\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_2}\right)+\varrho_3\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_3}\right)\right\}$$

$$=\varrho\left\{2+\frac{\varrho_1}{\varrho}-1+\frac{\varrho_2}{\varrho}-1+\frac{\varrho_3}{\varrho}-1\right\},$$

mithin

$$(4)\qquad 4r=\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3-\varrho.$$

Aus der zweiten der Gleichungen (9) folgt auch:

$$\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3=\frac{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}{\varrho},$$

oder, weil

$$\frac{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}{\varrho}=\frac{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3}{\varrho^2}=\frac{\Delta^2}{\varrho^2}=\frac{\{\frac{1}{2}(a+b+c)\varrho\}^2}{\varrho^2}=\{\tfrac{1}{2}(a+b+c)\}^2$$

ist:

$$(11)\qquad \varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3=\{\tfrac{1}{2}(a+b+c)\}^2,$$

d. h. die Summe der Rechtecke aus den Radien des ersten und zweiten, des ersten und dritten und zwei-

ten und dritten äusseren Berührungskreises eines jeden Dreieckes ist gleich dem über dem halben Umfang desselben errichteten Quadrat.

4) Bezeichnet man mit d, d_1, d_2, d_3 die Entfernungen des Mittelpunktes des einem Dreieck umschriebenen Kreises von den Mittelpunkten der vier Berührungskreise desselben, so ist bekanntlich:

$$(12)\qquad \begin{aligned} d^2 &= r^2 - 2r\varrho, \\ d_1^2 &= r^2 + 2r\varrho_1, \\ d_2^2 &= r^2 + 2r\varrho_2, \\ d_3^2 &= r^2 + 2r\varrho_3, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} -\varrho &= \frac{d^2 - r^2}{2r}, \\ \varrho_1 &= \frac{d_1^2 - r^2}{2r}, \\ \varrho_2 &= \frac{d_2^2 - r^2}{2r}, \\ \varrho_3 &= \frac{d_3^2 - r^2}{2r}; \end{aligned}$$

und wenn man diese Gleichungen addirt und darauf Rücksicht nimmt, dass nach dem oben Bewiesenen

$$(4)\qquad \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho = 4r$$

ist, so zeigt sich:

$$4r = \frac{1}{2r}(d^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) - 2r$$

oder

$$(13)\qquad 12r^2 = d^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2,$$

d. h. **die Summe der Quadrate der Distanzen des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises von den Mittelpunkten der vier Berührungskreise eines Dreieckes ist gleich dem zwölffachen Quadrat über dem Radius des umschriebenen Kreises.**

Setzt man ferner die eben für ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 gefundenen Werthe in die oft benutzte Gleichung

$$(10) \qquad \frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}$$

und bringt sie auf Null, so erhält man nach Division mit $2r$:

$$\frac{1}{d^2-r^2}+\frac{1}{d_1^2-r^2}+\frac{1}{d_2^2-r^2}+\frac{1}{d_3^2-r^2}=0$$

oder

$$\frac{1}{12r^2-12d^2}+\frac{1}{12r^2-12d_1^2}+\frac{1}{12r^2-12d_2^2}+\frac{1}{12r^2-12d_3^2}=0,$$

oder, weil mit Rücksicht auf die Gleichung (13)

$$\begin{aligned}
12r^2-12d^2 &= d_1^2+d_2^2+d_3^2-11d^2,\\
12r^2-12d_1^2 &= d^2+d_2^2+d_3^2-11d_1^2,\\
12r^2-12d_2^2 &= d^2+d_1^2+d_3^2-11d_2^2,\\
12r^2-12d_3^2 &= d^2+d_1^2+d_2^2-11d_3^2
\end{aligned}$$

ist:

$$(14) \qquad \frac{1}{d_1^2+d_2^2+d_3^2-11d^2}+\frac{1}{d^2+d_2^2+d_3^2-11d_1^2}$$
$$+\frac{1}{d^2+d_1^2+d_3^2-11d_2^2}+\frac{1}{d^2+d_1^2+d_2^2-11d_3^2}=0,$$

und dieses ist die Bedingungsgleichung, durch welche die vier Distanzen d, d_1, d_2, d_3 mit einander verbunden sind.

XXV.

Einfache Begründung der ebenen Trigonometrie.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lehrer der Mathematik in der k. k. österreichischen Kriegs-Marine, eingeschifft auf Sr. Maj. Propeller-Fregatte Donau.

Die Lehre vom rechtwinkeligen Dreieck (welche aus den ersten Begriffen der Goniometrie ohnehin hervorgeht) als bekannt vorausgesetzt, sei ABC (Taf. II. Fig. 4.) das zu betrachtende Dreieck, dessen Seiten wie gewöhnlich durch a, b, c bezeichnet werden mögen. Wir verlängern beiderseits die Seite AB, machen $AD=AE=b$, $BF=BG=a$, verbinden die Punkte D, E, F, G mit C durch Gerade und ziehen CP senkrecht auf AB. Alsdann sind aus geometrischen Gründen die Dreiecke CDE, CFG in C rechtwinkelig, ferner ist $\angle D=\frac{1}{2}A$, $\angle F=\frac{1}{2}B$, folglich

$$m=90^0-\tfrac{1}{2}B=\tfrac{1}{2}(C+A),\quad n=m-A=\tfrac{1}{2}(C-A).$$

Aus der Figur sieht man unmittelbar, dass

$$DG=b+c-a,\quad EF=a+c-b;$$

$$DG+EF=2AB,\quad DF=a+b+c,\quad DF-2AB=a+b-c.$$

Weil

$$(1)\qquad \overline{CP}^2=DP.EP=FP.GP,$$

so hat man die Proportion:

$$DP:GP=FP:EP,$$

also

$$DP:DP-GP=FP:FP-EP,$$

$$(2)\qquad DP:DG=FP:EF,$$

woraus folgt:

$$DP : DP + FP = DG : DG + EF,$$

$$DP : DF = DG : 2AB;$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf das Obige:

$$DP = \frac{DF.DG}{2AB} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2c} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2c}.$$

Ferner folgt aus (2):

$$FP = EF.\frac{DP}{DG},$$

oder, weil

$$FP = EP + EF, \quad \frac{DP}{DG} = \frac{DF}{2AB}$$

ist,

$$EP + EF = EF.\frac{DF}{2AB},$$

mithin

$$EP = \frac{EF.(DF - 2AB)}{2AB} = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{2c};$$

setzt man die gefundenen Werthe für DP und EP in die Gleichung (1) und bezeichnet die Höhe CP des Dreieckes ABC mit h, bedenkt man ferner, dass, wenn $\varDelta$ den Flächeninhalt des Dreickes bezeichnet, $\varDelta = \frac{1}{2}ch$ ist, so findet man mit Leichtigkeit:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} h = \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}, \\ \varDelta = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}. \end{cases}$$

Ferner ist offenbar:

$$DP = AD + AP = b + b\operatorname{Cos}A = 2b\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}A,$$

$$EP = AE - AP = b - b\operatorname{Cos}A = 2b\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}A,$$

und wenn man hieraus $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A$, $\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A$ bestimmt und für DP, EP seine Werthe setzt:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \operatorname{Cos}\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}}, \\ \operatorname{Sin}\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(a+c-b)(a+b-c)}{bc}}; \end{cases}$$

woraus auch gleich folgt:

$$\text{(III)} \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}}, \\ \operatorname{Sin} A &= \frac{1}{2bc}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}. \end{aligned} \right.$$

Weil nach dem Obigen

$$\frac{(b+c)^2-a^2}{2c} = b + b\operatorname{Cos} A,$$

so hat man zur Berechnung einer Seite aus den beiden anderen und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, wie man bald findet, die Gleichung:

$$\text{(IV)} \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\operatorname{Cos} A.$$

Weil in den beiden rechtwinkligen Dreiecken ACP und BCP $CP = b\operatorname{Sin} A = a\operatorname{Sin} B$, weil ferner $\Delta = \frac{1}{2}c.CP$ ist, so hat man auch:

$$\text{(V)} \qquad a:b = \operatorname{Sin} A : \operatorname{Sin} B,$$

$$\text{(VI)} \qquad \Delta = \tfrac{1}{2}bc\operatorname{Sin} A.$$

Kraft obiger Proportion hat man

$$\text{im } \Delta ACG\text{:} \quad AC:AG = \operatorname{Sin} m : \operatorname{Sin} n,$$

$$\text{im } \Delta ACF\text{:} \quad AC:AF = \operatorname{Sin} F : \operatorname{Sin}(90^\circ + n)$$

oder

$$b : c - a = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(C+A) : \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(C-A),$$

$$b : c + a = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(C+A) : \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(C-A);$$

woraus folgt:

$$\text{(VII)} \left\{ \begin{aligned} b\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(C-A) &= (c-a)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(C+A) = (c-a)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B, \\ b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(C-A) &= (c+a)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(C+A) = (c+a)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B; \end{aligned} \right.$$

und wenn man diese Gleichungen multiplicirt und dividirt:

$$\text{(VIII)} \left\{ \begin{aligned} b^2\operatorname{Sin}(C-A) &= (c^2-a^2)\operatorname{Sin}(C+A) = (c^2-a^2)\operatorname{Sin} B, \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(C-A) &= \frac{c-a}{c+a}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(C+A) = \frac{c-a}{c+a}\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}B. \end{aligned} \right.$$

Es ist auch:

$$DP = BD - BP = b + c - a\,\mathrm{Cos}\,B = 2b\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}A,$$
$$EP = BP - BE = a\,\mathrm{Cos}\,B + b - c = 2b\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}A;$$

mithin ist:

$$\text{(IX)}\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{b+c-a\,\mathrm{Cos}\,B}{2b}}, \\ \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{b-c+a\,\mathrm{Cos}\,B}{2b}}. \end{aligned}\right.$$

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke CDP und CFP geben $CP = DP.\mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}A = FP.\mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}B$, und man hat die Proportion:

$$DP : FP = \mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}B : \mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}A;$$

weil aber nach dem Obigen $DP:FP = DG:EG$ ist, so hat man auch:

$$DG : EG = \mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}B : \mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}A,$$

und wenn man für DG und EG ihre Werthe setzt und die Proportion in eine Gleichung verwandelt, so wird man zu folgender Relation geführt:

$$\text{(X)}\quad (b+c-a)\,\mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}A = (a+c-b)\,\mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}B = (a+b-c)\,\mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}C.$$

Es kann nicht meine Absicht sein, dieser Skizze einen besonderen wissenschaftlichen Werth beizumessen, aber den Bedürfnissen des trigonometrischen Unterrichts empfiehlt sich der hier betretene Weg durch seine Einfachheit. Indem man die Figur dergestalt abändert, dass die Basis kleiner als eine der beiden oder als beide anderen Seiten wird und das Perpendikel ausserhalb des Dreiecks fällt, gibt man Schülern Gelegenheit zu nützlicher Uebung.

XXVI.

Bestimmung der Quadraturen sämmtlicher Kegelschnitte mittelst jenes in Theil XXXI. S. 449. bewiesenen allgemeinen Satzes von den Curven.

Von

Herrn Doctor *Völler*,

Lehrer an der Realschule zu Saalfeld.

Das merkwürdige Gränzverhältniss bei ebenen Curven, welches von Herrn Professor Dr. Grunert und mir*) in Theil XXXI. des Archivs (S. 449.) bewiesen, gab mir bald Veranlassung zu der Frage: Ist es nicht möglich, mittelst jenes Satzes den Flächeninhalt ebener Curven zu bestimmen? Mit diesem Gedanken wandte ich mich — natürlich nur für's Erste — zu bekannten Curven und zwar — wie aus Thl. XXXII. S. 420. dieser Zeitschrift zu ersehen — zunächst zur Parabel, die hinsichtlich ihrer Quadratur jedenfalls der einfachste aller Kegelschnitte ist.

Mit Bezugnahme auf jenen allgemeinen Satz und mit Hülfe einiger passender Transformationen der an jenem Orte aufgestellten allgemeinen Formel des bewussten Verhältnisses gelang es mir, in Kurzem die Formel für den Flächeninhalt der Parabel abzuleiten. Die Ableitung ist auch nicht complicirt, und gewiss Jedem klar, der das Agens der höheren Analysis, den Begriff des Unendlichkleinen, nach allen seinen Beziehungen richtig aufzufassen bemüht gewesen.

Indess der Gang der so eben erwähnten Entwickelung ist wenig geeignet, darnach auch den Flächeninhalt der übrigen Kegel-

*) Herrn Dr. Völler gebührt allein die Ehre der Erfindung; ich habe daran gar keinen Theil. G.

schnitte mit Leichtigkeit bestimmen zu können, weshalb ich die Untersuchung von Neuem aufgenommen und nunmehr auf ein Verfahren zur Bestimmung der Quadraturen sämmtlicher Kegelschnitte aufmerksam machen möchte, welches allerdings nicht nur ein Bedenken in Bezug auf das ganze Raisonnement der der höheren Analysis entsprechenden Herleitung in keiner Weise gestattet, sondern welches auch hinsichtlich des Calculs grössere Bequemlichkeit als das in Theil XXXII. beschriebene darbietet.

I.

Die Parabel.

Es sei O der Anfangspunkt der Coordinaten (Taf. II. Fig. 5.) und das unendlich kleine Segment habe eine solche Lage, dass die Sehne desselben senkrecht auf der X-Achse steht, also symmetrisch gegen letztere gelegen ist.

Da nun für unendlich kleine Dimensionen:

$$\text{Segm.} = \tfrac{2}{3}.\triangle MTN,$$

so kann man für's Erste — wenn nur die endlichen Werthe in's Auge gefasst werden und ausserdem auf die Entwickelung Rücksicht genommen wird, die in Theil XXXI. des Archivs gegeben worden —

$$\text{Segm.} = \tfrac{1}{3}.\left[\frac{(x_1-x_2)\{(y_1-y_2)f'(x_2)-(x_1-x_2)f'(x_1)f'(x_2)\}+(y_2-y_1)\{y_1-y_2+(x_2-x_1)f'(x_1)\}}{f'(x_1)-f'(x_2)}\right]$$

setzen.

Wie aus der Figur erhellt, ist aber jetzt:

$$x_1 = x_2,$$

$$y_1 = -y_2;$$

und demnach auch:

$$f'(x_1) = -f'(x_2).$$

Also ergiebt sich nach Substitution der vorstehenden Werthe:

$$\text{Segm.} = \tfrac{1}{3}.\frac{2y_2.-2y_2}{-2f'(x_2)},$$

d. i.

$$\text{Segm.} = \tfrac{2}{3}.\frac{y_2^2}{f'(x_2)}.$$

Nun ist aber abgesehen vom Zeichen — denn hier interessiren nur die absoluten Zahlenwerthe — bei der Parabel:

$$f'(x_2) = \frac{y_2}{2x_2},$$

mithin erhält man:

$$\text{Segm.} = \tfrac{4}{3}.x_2y_2,$$

was die bekannte Formel für den Flächeninhalt eines Parabelsegments ist.

Auf den ersten Blick scheint allerdings in der vorstehenden Entwickelung darin ein Versehen begangen worden zu sein, dass das Gränzverhältniss, welches ursprünglich nur für unendlich kleine Grössen Geltung hatte, auch stillschweigend auf endliche Werthe übertragen worden.

Indess, obgleich dies geschehen, so ist doch die Untersuchung nicht unrichtig, weil die Formel, welche für den Flächeninhalt des Dreiecks MTN substituirt worden, natürlich auch dann noch gilt, sobald x_1 und x_2 sehr klein, d. h. unendlichklein werden.

Ueberdies kann man auch in dem Endresultat

$$\text{Segm.} = \tfrac{4}{3}.x_2y_2$$

unter x_2 und y_2 sich recht gut ∂x_2 und ∂y_2 denken, indem dann nur für ein bestimmtes Parabelsegment:

$$\text{Segm.} = \tfrac{4}{3}\iint \partial x_2 \partial y_2 + C$$

oder

$$\text{Segm.} = \tfrac{4}{3}\int_{x_0}^{x} \partial x_2 \int_{y_0}^{y} \partial y_2$$

gesetzt zu werden braucht, was in gleicher Weise, da hier x_2 und y_2 als unabhängige Variable anzusehen sind, wieder zu der Formel

$$\text{Segm.} = \tfrac{4}{3}.x_2y_2$$

führt *).

II.

Der Kreis.

Liegt das Segment (Taf. II. Fig. 6.) auch hier symmetrisch gegen die X-Achse, so gilt in gleicher Weise — sobald man

*) Bei der ersten Ableitung der Quadratur der Parabel in Theil XXXII. ist diese Discussion leider übergangen worden.

aber Ist nun der Mittelpunkt der Ellipse Anfangspunkt der Coordinaten (Taf. II. Fig. 7.), so ist, weil

$$TR = \frac{a^2 - x^2}{x}$$

ist:

$$f'(x) = \frac{xy}{a^2 - x^2}.$$

Demnach wird:

$$\text{Segm.} = \tfrac{2}{3} . \frac{y^2 (a^2 - x^2)}{xy},$$

d. i.

$$\text{Segm.} = \tfrac{2}{3} . \frac{y (a^2 - x^2)}{x}.$$

Da aber mit Rücksicht auf die Ellipsengleichung

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2}$$

gesetzt werden kann, so folgt weiter:

$$\text{Segm.} = \tfrac{2}{3} . \frac{a^2 y^3}{b^2 x},$$

und endlich, weil aus denselben Gründen

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

ist:

$$\text{Segm.} = \tfrac{2}{3} . \frac{a^2 y^3}{b^2 . \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}};$$

mithin:

$$\text{Segm.} = \tfrac{2}{3} . \frac{a y^3}{b \sqrt{b^2 - y^2}},$$

wo natürlich y hinsichtlich seiner absoluten Länge als sehr klein anzusehen ist. Setzt man nunmehr wiederum:

$$y^3 = 3 \int y^2 \partial y,$$

so ergiebt sich die Gleichung:

$$\text{Segm.} = 2 . \frac{a}{b} \int \frac{y^2 \partial y}{\sqrt{b^2 - y^2}} + C,$$

wo das Integral $\int \frac{y^2 \partial y}{\sqrt{b^2 - y^2}}$ gleichfalls mittelst der unter No. II. citirten allgemeinen Formel gelöst werden kann.

Man erhält nehmlich auch hier:

$$\text{Segm.} = 2.\frac{a}{b}.\frac{1}{b}\int_{y=0}^{y=b}\frac{y^2\partial y}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}$$

oder

$$\text{Segm.} = 2.\frac{a}{b}.b^2\int_{y=0}^{y=b}\frac{\left(\frac{y}{b}\right)^2\partial.\left(\frac{y}{b}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}},$$

d. i.

$$\text{Segm.} = 2ab\int_{y=0}^{y=b}\frac{\left(\frac{y}{b}\right)^2\partial.\left(\frac{y}{b}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}};$$

demnach nach erfolgter Integration:

$$\text{Segm.} = 2ab\left\{-\frac{\frac{y}{b}\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}{2}+\tfrac{1}{2}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{y}{b}\right)\right\}_{y=0}^{y=b}.$$

Es ergiebt sich also, wenn man die angedeuteten Gränzen berücksichtigt, für die halbe Ellipse die Formel:

$$2ab.\tfrac{1}{2}.\frac{\pi}{2}$$

oder

$$\frac{ab\pi}{2};$$

folglich für die ganze Ellipse der Ausdruck des Flächeninhaltes:

$$ab\pi.$$

IV.

Die Hyperbel.

Allgemein gilt für alle ebenen Curven bei verschwindenden Dimensionen die Gleichung:

$$\text{Segm.} = \tfrac{2}{3}.\frac{y^2}{f'(x)},$$

mithin auch bei der Hyperbel. (Taf. II. Fig. 8.)

Nun ist aber in dem vorliegenden Falle:

$$f'(x)=\frac{xy}{x^2-a^2},$$

demnach:

$$\text{Segm.}=\tfrac{2}{3}.\frac{y^3(x^2-a^2)}{xy}=\tfrac{2}{3}.\frac{y(x^2-a^2)}{x}.$$

Wegen der Gleichung

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$$

folgt weiter:

$$\text{Segm.}=\tfrac{2}{3}.\frac{y}{x}.\frac{a^2y^2}{b^2},$$

d. i.

$$\text{Segm.}=\tfrac{2}{3}.\frac{a^2y^3}{b^2x}.$$

Da aber auch

$$x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y^2},$$

so ergiebt sich nach Substitution dieses Werthes:

$$\text{Segm.}=\tfrac{2}{3}.\frac{a^2y^3}{b^2.\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y^2}},$$

oder:

$$\text{Segm.}=\tfrac{2}{3}.\frac{ay^3}{b\sqrt{b^2+y^2}}.$$

Setzt man nun wie früher:

$$y^3=3\int y^2\partial y,$$

so erhält man die Gleichung:

$$\text{Segm.}=\frac{2a}{b}\int\frac{y^2\partial y}{\sqrt{b^2+y^2}}+C,$$

wo das Integral $\int\frac{y^2\partial y}{\sqrt{b^2+y^2}}$ leicht mit Hülfe der allgemeinen Formel

$$\int\frac{y^n\partial y}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{y^{n-1}\sqrt{1+y^2}}{n}-\frac{n-1}{n}\int\frac{y^{n-2}\partial y}{\sqrt{1+y^2}}+\text{Const.}$$

bestimmt werden kann, wenn man übrigens nur noch darauf Rücksicht nimmt, dass

$$\int\frac{\partial y}{\sqrt{1+y^2}}=\log(y+\sqrt{1+y^2})+\text{Const.}$$

ist.

Man bringe also zunächst obigen Ausdruck auf die Form:

$$\text{Segm.}=2ab\int\frac{\left(\frac{y}{b}\right)^2\partial.\left(\frac{y}{b}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{b}\right)^2}}+C,$$

dann ergiebt sich mit Bezugnahme auf die allgemeine Formel:

$$\text{Segm.}=2ab\left\{\frac{\frac{y}{b}\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}}{2}-\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{y}{b}+\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}\right)\right\}+C,$$

oder:

$$\text{Segm.}=2ab\left\{\frac{y\sqrt{b^2+y^2}}{2b^2}-\tfrac{1}{2}\log\frac{y+\sqrt{b^2+y^2}}{b}\right\}+C,$$

wo, wegen der besonderen Eigenschaften der Hyperbel, die Constante dadurch wegfällt, dass man von $y=0$ bis $y=y$ integrirt, in welchem Falle man für ein beliebiges, gegen die X-Achse symmetrisch gelegenes Flächenstück eines Hyperbelastes zu der Formel gelangt:

$$\text{Segm.}=2ab\left\{\frac{y\sqrt{b^2+y^2}}{2b^2}-\tfrac{1}{2}\log\frac{y+\sqrt{b^2+y^2}}{b}\right\}.$$

Da aber für gewöhnlich die Variable x mit in die Formel hereingezogen wird, so ergiebt sich, weil

$$b^2+y^2=\frac{b^2x^2}{a^2}$$

ist:

$$\text{Segm.}=2ab\left\{\frac{bx.b\sqrt{x^2-a^2}}{a.a.2b^2}-\tfrac{1}{2}\log.\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{bx}{a}}{b}\right\},$$

d. i. endlich:

$$\text{Segm.}=2ab\left\{\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2}-\tfrac{1}{2}\log.\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right\},$$

welcher Ausdruck bekanntlich auch öfter noch durch die elegantere Form:

$$\text{Segm.} = xy - ab.\log\left\{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right\}$$

vertreten wird.

XXVII.

Zur Auflösung biquadratischer Gleichungen.

Von

Herrn Dr. *Carl Spitz*,

Lehrer am Polytechnikum zu Carlsruhe.

1.

Es sei

$$x^4 + Kx^3 + Lx^2 + Mx + N = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

eine biquadratische Gleichung, so kann man dieselbe betrachten als das Resultat der Elimination von y zwischen den zwei Kegelschnittsgleichungen

$$U = 0, \quad U' = 0.$$

Da diese Gleichungen zusammen 10 willkührliche Constanten enthalten, die biquadratische Gleichung (1) aber nur vier solcher hat, so geht daraus hervor, dass vorliegende Aufgabe eine unbestimmte ist. Man kann auch in der That unendlich viele Kegelschnitts-

paare angeben, welche die Eigenschaft besitzen, dass durch Elimination von y aus ihren Gleichungen die gegebene biquadratische Gleichung resultirt. Zu unserem Zwecke sind jedoch von allen diesen Kegelschnittspaaren nur diejenigen anwendbar, welche sich auffinden lassen, ohne dass man nöthig hätte, eine Gleichung von einem höheren, als vom zweiten Grade aufzulösen.

Wir wollen hier nur eine Auflösung dieser unbestimmten Aufgabe geben und dieselbe zur Auflösung der biquadratischen Gleichungen anwenden.

2.

Wählen wir als ersten Kegelschnitt eine Parabel, deren Gleichung

$$x^2 = ay \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ist, so erhalten wir für den anderen Kegelschnitt, wenn wir in der Gleichung (1)

$$x^4 = a^2y^2,$$
$$x^3 = ayx,$$
$$x^2 = ay$$

setzen, die Gleichung:

$$a^2y^2 + Kayx + Lay + Mx + N = 0. \quad \ldots \quad (3)$$

Verbinden wir die zwei Gleichungen (2) und (3) durch einen unbestimmten Coefficienten μ zu der Gleichung eines beliebigen Kegelschnittes der Schaar, so erhalten wir für denselben:

$$a^2y^2 + Kayx + \mu x^2 + ay(L-\mu) + Mx + N = 0. \quad \ldots \quad (4)$$

Setzen wir:

$$a^2 = A, \qquad a(L-\mu) = 2D,$$
$$Ka = 2B, \qquad M = 2E,$$
$$\mu = C; \qquad N = F;$$

so wird die Bedingungsgleichung, dass der letztere Kegelschnitt ein geradliniger sei *):

$$B^2F + CD^2 - ACF + AE^2 - 2BDE = 0.$$

Substituiren wir hierin für $A, B, C \ldots$ die betreffenden Werthe, so erhalten wir zur Bestimmung von μ folgende Gleichung:

$$\mu^3 - 2L\mu^2 + (KM + L^2 - 4N)\mu + K^2N + M^2 - KLM = 0. \quad (5)$$

*) Vergl. den Aufsatz XIX. in Theil XXXII. dieses Archivs.

Setzen wir

$$\left.\begin{aligned} B^2-AC&=p,\\ BD-AE&=q,\\ D^2-AF&=r; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

so muss, wenn der Kegelschnitt (3) das System zweier Geraden darstellen soll, die Beziehung stattfinden:

$$p(Ay+Bx+D)^2-(px+q)^2=0\text{*)}$$

oder

$$Ay+Bx+D=\frac{px+q}{\mathfrak{p}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wo $\mathfrak{p}$ einen beliebigen der zwei Werthe von $\sqrt{p}$ bedeutet.

Da aber

$$pr-q^2=0,$$

so ist

$$\pm r=\frac{q}{\mathfrak{p}},$$

wo das Zeichen auf der linken Seite so gewählt werden muss, dass die Gleichheit wirklich stattfindet. Bezeichnen wir diesen Werth von $\frac{q}{\mathfrak{p}}$ durch $\mathfrak{r}$ und berücksichtigen, dass $\mathfrak{p}^2=p$, so verwandelt sich die Gleichung (7) in:

$$Ay+Bx+D=\mathfrak{p}x+\mathfrak{r}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Vermöge der Relationen (6) ist aber:

$$p=a^2\left(\frac{K^2}{4}-\mu\right),$$

$$q=a^2\left[\frac{K}{4}(L-\mu)-\frac{M}{2}\right],$$

$$r=a^2\left[\left(\frac{L-\mu}{2}\right)^2-N\right];$$

und es darf somit

$$\mathfrak{p}=\pm a\sqrt{\frac{K^2}{4}-\mu}$$

gesetzt werden.

---

*) Siehe §. 2. des in vorhergehender Note angeführten Aufsatzes.

Für $\mathfrak{M}$ erhält man:

$$\mathfrak{M} = \pm a \sqrt{\left(\frac{L-\mu}{2}\right)^2 - N},$$

wo aber das Zeichen dem Obigen entsprechend gewählt werden muss.

Verbindet man nun die Gleichung (8) mit der Parabelgleichung (2), so findet man:

$$\frac{A}{a}x^2 + Bx + D = \mathfrak{P}x + \mathfrak{M}.$$

Es ist aber $\frac{A}{a} = a$. Dividiren wir daher die vorstehende Gleichung durch a, so erhalten wir zur Bestimmung der Werthe von x die Gleichung

$$x^2 + \frac{K}{2}x + \frac{L-\mu}{2} = \frac{\mathfrak{P}}{a}x + \frac{\mathfrak{M}}{a}.$$

Man ersieht hieraus, dass in den Ausdrücken für $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ immer

$$a = 1,$$

also

$$\mathfrak{P} = \pm \sqrt{\frac{K^2}{4} - \mu},$$

$$\mathfrak{M} = \pm \sqrt{\left(\frac{L-\mu}{2}\right)^2 - N}$$

gesetzt werden darf, wodurch vorstehende Gleichung alsdann übergeht in:

$$x^2 + \frac{K}{2}x + \frac{L-\mu}{2} = \mathfrak{P}x + \mathfrak{M}. \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Das Zeichen der rechten Seite im Ausdrucke für $\mathfrak{P}$ ist hierbei beliebig zu wählen; in dem Ausdrucke für $\mathfrak{M}$ ist es jedoch so zu bestimmen, dass man hat:

$$\mathfrak{M} = \frac{q}{\mathfrak{P}}.$$

3.

Wenden wir das Gesagte noch schliesslich zur Auflösung einer biquadratischen Zahlengleichung an.

Es sei

$$x^4+2x^3-25x^2-26x+128=0$$

die vorgelegte Gleichung, so ergeben sich aus der Vergleichung derselben mit der allgemeinen Form (1) die Beziehungen:

$$K=2,\qquad M=-26,$$
$$L=-25,\qquad N=128;$$

und es wird also:

$$-2L=50,$$
$$KM+L^2-4N=93,$$
$$K^2N+M^2-KLM=-144;$$

so dass die Gleichung (5) übergeht in:

$$\mu^3+50\mu^2+93\mu-144=0.$$

Hieraus ergeben sich für μ die Werthe:

$$1,\quad -3,\quad -48.$$

Für jeden dieser Werthe muss nun die Gleichung (9) die vier Wurzeln der vorgelegten biquadratischen Gleichung liefern, wenn man dort einmal $\mathfrak{p}$ positiv, das andere Mal $\mathfrak{p}$ negativ in Rechnung bringt.

Nehmen wir z. B. an, es sei

$$\mu=-3,$$

und setzen

$$\mathfrak{p}=\sqrt{\frac{K}{4}-\mu}=+2,$$

also

$$\mathfrak{s}=\frac{q}{\mathfrak{p}}=\frac{\frac{K}{4}(L-\mu)-\frac{M}{2}}{\mathfrak{p}}=+1;$$

so verwandelt sich die Gleichung (9) in

$$x^2+x-11=2x+1,$$

woraus folgt:

$$x_1=4,\quad x_2=-3.$$

Wählen wir nun in derselben Gleichung (9) und bei derselben Annahme von μ für

$$\mathfrak{p}=-2,$$

also für

$$\mathfrak{K} = -1,$$

so erhalten wir:

$$x^2 + x - 11 = -2x - 1,$$

und hieraus:

$$x_3 = -5, \quad x_4 = 2;$$

die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind daher:

$$4, \quad -3, \quad -5, \quad 2.$$

Hätten wir

$$\mu = -48$$

angenommen, so wäre

$$\mathfrak{p} = +\sqrt{\frac{K^2}{4} - \mu} = +7,$$

also

$$\mathfrak{K} = \frac{q}{\mathfrak{p}} = \frac{7}{2}$$

geworden, und die Gleichung (9) übergegangen in:

$$x^2 + x + \frac{23}{2} = 7x + \frac{7}{2},$$

woraus sich die zwei Wurzeln 4 und 2 ergeben.

Nehmen wir

$$\mathfrak{p} = -7,$$

also

$$\mathfrak{K} = -\frac{7}{2},$$

so folgen aus der Gleichung

$$x^2 + x + \frac{23}{2} = -7x - \frac{7}{2}$$

die beiden anderen Wurzeln -5 und -3.

Wir erhalten somit genau dieselben Resultate wie bei der ersten Substitution. Auf gleiche Weise lässt sich dieses für die dritte Substitution von $\mu = 1$ zeigen.

Es ist klar, dass auf dem hier eingeschlagenen Wege noch mehre Auflösungen der biquadratischen Gleichungen können erzielt werden.

XXVIII.

Ueber periodische Kettenbrüche.

Von

Herrn Dr. *O. Simon*,

ordentlichem Lehrer am königl. Joachimsthal'schen Gymnasio zu Berlin.

Die vom Prof. Oettinger im 44. Bande des Crelle'schen Journals veröffentlichten Resultate über periodische Kettenbrüche sind von zu grossem Interesse, als dass nicht statt der umständ lichen Induction ein analytisches Verfahren gesucht werden sollte, durch welches jene Ergebnisse mit grösserer Allgemeinheit und Einfachheit abzuleiten wären. In den folgenden Untersuchungen, die, von einigen Sätzen Möbius' und Clausen's ausgehend, dieses Ziel verfolgen, sollen überdiess die allgemeinen Ausdrücke für unendliche periodische Kettenbrüche in geschlossener Form gegeben, und daraus specielle Resultate für die Darstellung von Quadratwurzeln gezogen werden.

1.

Wird der allgemeine Kettenbruch

$$x = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \dots + \cfrac{b_n}{a_n + \cfrac{\beta}{\alpha}}}}$$

durch das Symbol $\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_n}{a_n}, \frac{\beta}{\alpha}\right)$ dargestellt, so ergibt sich zunächst die Beziehung:

(A) $$\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots \frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{b_1}{a_1 + \left(\frac{b_2}{a_2}, \ldots \frac{\beta}{\alpha}\right)},$$

und hieraus folgende Gleichung für den letzten Nenner α:

$$\alpha = -\left(\frac{\beta}{a_n}, \frac{b_n}{a_{n-1}}, \ldots \frac{b_2}{a_1}, -\frac{b_1}{x}\right).$$

Da einem Werthe von α nur ein Werth von x entspricht, und umgekehrt, so führt der Kettenbruch zu der Gleichung

(X) $$x = \frac{A + B\alpha}{C + D\alpha};$$

um A, B, C, D, Functionen von b und α, zu bestimmen, setze man

$$\alpha = 0, \quad \alpha = \infty, \quad x = 0, \quad x = \infty,$$

wodurch sich folgende Relationen ergeben:

$$\frac{A}{C} = \left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right), \quad \frac{B}{D} = \left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_n}{a_n}\right), \quad \frac{A}{B} = \left(\frac{\beta}{a_n}, \frac{b_n}{a_{n-1}}, \ldots \frac{b_3}{a_2}\right),$$

$$\frac{C}{D} = \left(\frac{\beta}{a_n}, \frac{b_n}{a_{n-1}}, \ldots \frac{b_2}{a_1}\right),$$

und daher durch Gleichsetzung der beiden Werthe von $\frac{A}{D}$:

$$\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)\left(\frac{\beta}{a_n}, \ldots \frac{b_2}{a_1}\right) = \left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_n}{a_n}\right)\left(\frac{\beta}{a_n}, \ldots \frac{b_3}{a_2}\right).$$

Die Gleichung (X) nimmt hiernach folgende Form an:

$$[x - \left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_n}{a_n}\right)][\alpha + \left(\frac{\beta}{a_n}, \ldots \frac{b_2}{a_1}\right)]$$

$$= -\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_n}{a_n}\right)\left(\frac{\beta}{a_n}, \ldots \frac{b_2}{a_1}\right) + \left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)\left(\frac{\beta}{a_n}, \ldots \frac{b_2}{a_1}\right)$$

$$= -\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_n}{a_n}\right)\left(\frac{\beta}{a_n}, \ldots \frac{b_2}{a_1}\right) + \left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_n}{a_n}\right)\left(\frac{\beta}{a_n}, \ldots \frac{b_3}{a_2}\right).$$

Wird nunmehr für α und β resp. a_{n+1} und b_{n+1} und für $a_{n+1} + \left(\frac{b_{n+1}}{a_n}, \ldots \frac{b_2}{a_1}\right)$ der reciproke Werth von $\left(\frac{1}{a_{n+1}}, \frac{b_{n+1}}{a_n}, \ldots \frac{b_2}{a_1}\right)$ gesetzt, so resultirt zunächst:

$$\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) - \left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_n}{a_n}\right)$$

$$= -b_{n+1}\left(\frac{1}{a_{n+1}}, \ldots \frac{b_2}{a_1}\right)\left(\frac{1}{a_n}, \frac{b_n}{a_{n-1}}, \ldots \frac{b_2}{a_1}\right)\left[\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_n}{a_n}\right) - \left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)\right]$$

und durch Wiederholung dieser Gleichung:

$$\left(\frac{b_1}{a_1},\dots\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)-\left(\frac{b_1}{a_1},\dots\frac{b_n}{a_n}\right)$$
$$=(-1)^n b_1 b_2\dots b_{n+1}\left(\frac{1}{a_{n+1}},\dots\frac{b_2}{a_1}\right)\left(\frac{1}{a_n},\dots\frac{b_2}{a_1}\right)^2\left(\frac{1}{a_{n-1}},\dots\frac{b_2}{a_1}\right)^2\dots\left(\frac{1}{a_1}\right)^2.$$

Da dieselbe Differenz aber auch gleich

$$-b_1\left(\frac{1}{a_{n+1}},\dots\frac{b_2}{a_1}\right)\left(\frac{1}{a_1},\frac{b_2}{a_2},\dots\frac{b_n}{a_n}\right)\left[\left(\frac{b_{n+1}}{a_n},\dots\frac{b_2}{a_1}\right)-\left(\frac{b_{n+1}}{a_n},\dots\frac{b_3}{a_2}\right)\right],$$

so findet man für sie nach ähnlicher Berechnung der sich hier darbietenden Differenz den Ausdruck:

$$(-1)^n b_1 b_2\dots b_{n+1}$$
$$\times\left(\frac{1}{a_{n+1}},\dots\frac{b_2}{a_1}\right)\cdot\left(\frac{1}{a_1},\frac{b_2}{a_2},\dots\frac{b_n}{a_n}\right)^2\left(\frac{1}{a_2},\dots\frac{b_n}{a_n}\right)^2\dots\left(\frac{1}{a_{n-1}},\frac{b_n}{a_n}\right)^2\left(\frac{1}{a_n}\right)^2.$$

Aus der Gleichstellung beider Werthe der Differenz folgt die wichtige Relation:

$$\left(\frac{1}{a_1},\frac{b_2}{a_2},\dots\frac{b_n}{a_n}\right)\left(\frac{1}{a_2},\dots\frac{b_n}{a_n}\right)\dots\left(\frac{1}{a_n}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{a_n},\frac{b_n}{a_{n-1}},\dots\frac{b_2}{a_1}\right)\left(\frac{1}{a_{n-1}},\dots\frac{b_2}{a_1}\right)\dots\left(\frac{1}{a_1}\right).$$

Der reciproke Werth des links stehenden Productes ist für die weitere Untersuchung von grösster Bedeutung und mag, obwol von b_1 unabhängig, durch $\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\dots\frac{b_n}{a_n}\right)$ bezeichnet werden. Unmittelbar erhellen folgende Gleichungen:

$$\frac{1}{\varphi\left(\frac{b_2}{a_2},\dots\frac{b_n}{a_n}\right)}=\left(\frac{1}{a_2},\dots\frac{b_n}{a_n}\right)\left(\frac{1}{a_3},\dots\frac{b_n}{a_n}\right)\dots\left(\frac{1}{a_n}\right),$$

$$\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\dots\frac{b_n}{a_n}\right)=\varphi\left(\frac{b_1}{a_n},\frac{b_n}{a_{n-1}},\dots\frac{b_2}{a_1}\right).$$

Aus der Verbindung der ersten Gleichung mit der für $b_1\cdot\frac{1}{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\dots\frac{b_n}{a_n}\right)}$ aufzustellenden resultirt der Ausdruck für den Kettenbruch:

$$\left(\frac{b_1}{a_1},\dots\frac{b_n}{a_n}\right)=b_1\frac{\varphi\left(\frac{b_2}{a_2},\dots\frac{b_n}{a_n}\right)}{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\dots\frac{b_n}{a_n}\right)}.$$

Um den Character der Function φ zu erkennen, setze man dieselbe in (A) ein, woraus sogleich folgt, dass

$$\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right) = a_1 \varphi\left(\frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right) + b_2 \varphi\left(\frac{b_3}{a_3}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right),$$

d. h. φ eine ganze Function der b und a ist, und demnach $b_1 . \varphi\left(\frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)$ den Zähler, $\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)$ den Nenner des Kettenbruchs $\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)$ darstellt. Daher führt die zweite der obigen Gleichungen zu dem Satze, dass die Werthe der beiden Kettenbrüche $\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)$ und $\left(\frac{b_1}{a_n}, \frac{b_n}{a_{n-1}}, \dots \frac{b_2}{a_1}\right)$ gleiche Nenner haben, die Gleichheit der Nenner dagegen für die Kettenbrüche $\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)$ und $\left(\frac{b_n}{a_n}, \dots \frac{b_1}{a_1}\right)$ nur dann stattfindet, wenn sämmtliche Zähler b einander gleich sind. — Die Gleichung (X) führt demnach zu dem Resultat:

$$\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right) - \left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right) = (-1)^{n-1} \frac{b_1 b_2 \dots b_n}{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right) \varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)},$$

welches durch Einsetzung der Functionen φ übergeht in:

$$(\varphi)$$

$$\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right) \varphi\left(\frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right) - \varphi\left(\frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right) \varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)$$
$$= (-1)^n b_2 b_3 \dots b_n.$$

2.

Nimmt man nunmehr an, dass der Kettenbruch aus $n+m+1$ Quotienten besteht:

$$x = \left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}, \frac{B_1}{A_1}, \dots \frac{B_m}{A_m}, \frac{\beta}{\alpha}\right),$$

so lässt sich diess auf die frühere Gleichung durch die Substitutionen zurückführen:

$$\xi = \left(\frac{B_1}{A_1}, \dots \frac{B_m}{A_m}, \frac{\beta}{\alpha}\right), \quad a_n + \xi = \eta,$$

wonach:

$$x=\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_n}{\eta}\right).$$

Indem man für die beiden Werthe von x und für den von ξ die der Gleichung (X) analogen aufstellt und η, ξ aus x und α bestimmt, erhält man:

$$(\alpha)\quad \alpha+\left(\frac{\beta}{A_m},\ldots\frac{b_2}{a_1}\right)=(-1)^{n+m}\frac{b_1\ldots b_n B_1\ldots B_m\beta}{\varphi^2\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)}\cdot\frac{1}{x-\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)},$$

$$(\eta)\quad \eta+\left(\frac{b_n}{a_{n-1}},\ldots\frac{b_2}{a_1}\right)=(-1)^{n-1}\frac{b_1 b_2\ldots b_n}{\varphi^2\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)}\cdot\frac{1}{x-\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)},$$

$$(\xi)\quad \xi-\left(\frac{B_1}{A_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)=(-1)^m\frac{B_1 B_2\ldots B_m\beta}{\varphi^2\left(\frac{B_1}{A_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)}\cdot\frac{1}{\alpha+\left(\frac{\beta}{A_m},\ldots\frac{B_2}{A_1}\right)}.$$

Aus (α) resultirt die Zusammengehörigkeit der Werthe

$$x=\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right),\quad \alpha=\infty \text{ und } x=\infty,\quad \alpha=-\left(\frac{\beta}{A_m},\ldots\frac{b_2}{a_1}\right),$$

sowie aus (ξ) und (η) die von

$$x=\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right),\quad \alpha=-\left(\frac{\beta}{A_m},\ldots\frac{B_2}{A_1}\right).$$

Die letzteren, in (α) eingesetzt, ergeben die Gleichung:

$$\left[\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)-\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)\right]\left[\left(\frac{\beta}{A_m},\ldots\frac{b_2}{a_1}\right)-\left(\frac{\beta}{A_m},\ldots\frac{B_2}{A_1}\right)\right]$$
$$=(-1)^{n+m}\frac{b_1\ldots B_m\beta}{\varphi_2\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)};$$

ebenso folgt durch Substitution der ersteren Werthepaare in die Differenz von (ξ) und (η):

$$a_n+\left(\frac{b_n}{a_{n-1}},\ldots\frac{b_2}{a_1}\right)+\left(\frac{B_1}{A_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{b_1\ldots b_n}{\varphi^2\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)}\cdot\frac{1}{\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)-\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)}$$
$$=(-1)^m\frac{B_1\ldots B_m\beta}{\varphi^2\left(\frac{B_1}{A_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\beta}{A_m},\ldots\frac{b_2}{a_1}\right)-\left(\frac{\beta}{A_m},\ldots\frac{B_2}{A_1}\right)},$$

und aus dieser Doppelgleichung, nach Benutzung der vorigen Gleichung und Ausziehung der Quadratwurzel:

$$\text{(S)}\qquad a_n+\left(\frac{b_n}{a_{n-1}},\ldots\frac{b_2}{a_1}\right)+\left(\frac{B_1}{A_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)$$

$$=\frac{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)}{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{B_1}{A_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)}.$$

Mit Hülfe dieser Relation ergeben sich aus eben jener Doppelgleichung:

$$\text{(D}_1\text{)}\qquad \left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)-\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)$$

$$=(-1)^{n-1}b_1\ldots b_n.\frac{\varphi\left(\frac{B_1}{A_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)}{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)},$$

$$\text{(D}_2\text{)}\qquad \left(\frac{1}{A_m},\ldots\frac{b_2}{a_1}\right)-\left(\frac{1}{A_m},\ldots\frac{B_2}{A_1}\right)$$

$$=(-1)^m B_1\ldots B_m.\frac{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)}{\varphi\left(\frac{B_1}{A_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)}.$$

Wendet man die Beziehung 1. (A) auf (S) an, sowie die Gleichheit

$$\varphi\left(\frac{1}{a_n},\ldots\frac{b_2}{a_1}\right)=\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_n}{a_n}\right)$$

auf (S) und (D_2), so erhält man folgende von einander unabhängige Hauptgleichungen:

$$\text{(I)}\qquad \varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_n}{a_n}\right)\varphi\left(\frac{B_1}{A_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)$$

$$+B_1.\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{B_2}{A_2},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)=\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right).$$

$$\text{(II)}\qquad \varphi\left(\frac{b_2}{a_2},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)$$

$$-\varphi\left(\frac{b_2}{a_2},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)=(-1)^{n-1}b_2\ldots b_n.\varphi\left(\frac{B_1}{A_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right).$$

(III) $$\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_{m-1}}{A_{m-1}}\right)\varphi\left(\frac{B_1}{A_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)$$

$$-\varphi\left(\frac{B_1}{A_1},\ldots\frac{B_{m-1}}{A_{m-1}}\right)\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)=(-1)^m B_1\ldots B_m.\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right).$$

3.

Ist nun der Kettenbruch $\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_m}{A_m},\frac{\beta}{\alpha}\right)$ ein aus λ Perioden bestehender, in welchem die n Quotienten einer Periode $\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_n}{a_n}$ heissen, und wird derselbe durch $\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_n}{a_n}\right)_\lambda$ bezeichnet, so ist $\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)=\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_\lambda$, wo nur in der letzten Periode der Quotient $\frac{b_n}{a_n}$ fehlt, und (I) nimmt daher die Form an:

$$\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_\lambda=\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_n}{a_n}\right)\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_{\lambda-1}$$
$$+b_1\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{b_2}{a_2},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_{\lambda-1},$$

wo im letzten φ der erste Quotient $\frac{b_1}{a_1}$ nur in der ersten Periode fehlt. Zur weitern Umformung dieser Gleichung nehme man an, dass für (II) $\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{B_m}{A_m}\right)$ einen Kettenbruch nur von $\lambda-1$ Perioden darstelle, so dass (II) übergeht in:

$$b_1\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{b_2}{a_2},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_{\lambda-1}$$
$$=b_1\varphi\left(\frac{b_2}{a_2},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_{\lambda-1}$$
$$+(-1)^{n-1}b_1\ldots b_n.\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_{\lambda-2},$$

und hiernach aus obiger Gleichung resultirt:

(IV) $$\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_\lambda$$
$$=\left[\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_n}{a_n}\right)+b_1\varphi\left(\frac{b_2}{a_2},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)\right]\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_{\lambda-1}$$
$$+(-1)^{n-1}b_1\ldots b_n.\varphi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_{\lambda-2}.$$

Setzt man nun in (III) für $\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}$ $\lambda-1$ Perioden, deren jede aus den Quotienten $\frac{B_1}{A_1}, \dots \frac{B_m}{A_m}$ besteht, so erhält man nach Vertauschung von B, A und m mit b, a und n:

$$\text{(V)} \quad \varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)_\lambda = \frac{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)}{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)} \varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_\lambda$$

$$+(-1)^{n-1} \cdot \frac{b_1 \dots b_n}{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)} \cdot \varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_{\lambda-1}.$$

Werden endlich in (I) für $\frac{B_1}{A_1}, \dots \frac{B_m}{A_m}$ λ Perioden $\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}$ gesetzt, so ist nach Anwendung der Gleichung (IV):

$$\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right) \varphi\left(\frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)_\lambda$$

$$= \frac{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_\lambda}{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)} \left\{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right) \varphi\left(\frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right) + (-1)^{n-1} b_2 \dots b_n\right\},$$

also durch Transformation des in der Parenthese befindlichen Ausdruckes nach der Relation 1. (φ):

$$\text{(VI)} \quad \varphi\left(\frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)_\lambda = \frac{\varphi\left(\frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)}{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)} \cdot \varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_\lambda.$$

Aus der Combination von (V) und (VI) ergiebt sich unmittelbar:

$$\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)_\lambda$$

$$= \frac{b_1 \cdot \varphi\left(\frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right) \varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_\lambda}{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right) \varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_\lambda + (-1)^{n-1} b_1 \dots b_n \cdot \varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_{\lambda-1}}$$

als Werth des aus λ Perioden bestehenden Kettenbruches.

Um zunächst für $\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_\lambda$ einen geschlossenen Ausdruck zu finden, bedient man sich der Gleichung (IV), indem man die dort vorkommende, von λ unabhängige Summe

$$\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_n}{a_n}\right) + b_1\varphi\left(\frac{b_2}{a_2}, \ldots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)$$

mit Φ bezeichnet; setzt man:

$$\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_\lambda = \varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right).S^\lambda,$$

so nimmt (IV) die Form an:

$$S^2 - \Phi S + (-1)^n b_1 b_2 \ldots b_n = 0,$$

daher

$$S_1 = \frac{\Phi}{2} + \sqrt{\frac{\Phi^2}{4} - (-1)^n b_1 \ldots b_n}, \quad S_2 = \frac{\Phi}{2} - \sqrt{\frac{\Phi^2}{4} - (-1)^n b_1 \ldots b_n},$$

$$S_1 S_2 = (-1)^n b_1 \ldots b_n.$$

Jetzt nehme man der Allgemeinheit wegen:

$$\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_\lambda = \varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)(\mu_1 S_1{}^\lambda + \mu_2 S_2{}^\lambda),$$

so erhält man für $\lambda = 0$, $\mu_2 = -\mu_1$ und für $\lambda = 1$:

$$\mu_1 = \frac{1}{S_1 - S_2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\Phi^2}{4} - (-1)^n b_1 \ldots b_n}},$$

weshalb

$$\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_\lambda = \frac{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)}{2\sqrt{\frac{\Phi^2}{4} - (-1)^n b_1 \ldots b_n}}(S_1{}^\lambda - S_2{}^\lambda),$$

und schliesslich:

(K)

$$\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_n}{a_n}\right)_\lambda = \frac{b_1\varphi\left(\frac{b_2}{a_2}, \ldots \frac{b_n}{a_n}\right)(S_1{}^\lambda - S_2{}^\lambda)}{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_n}{a_n}\right)(S_1{}^\lambda - S_2{}^\lambda) + (-1)^{n-1} b_1 \ldots b_n (S_1{}^{\lambda-1} - S_2{}^{\lambda-1})}.$$

Nennt man die den Kettenbrüchen $\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_n}{a_n}\right)_\lambda$ und $\left(\frac{b_1}{a_1}, \ldots \frac{b_n}{a_n}\right)_{\lambda-1}$

zugehörigen Nenner N_λ und $N_{\lambda-1}$, so ergiebt sich die Differenz beider Kettenbrüche als

$$(-1)^{\lambda n-n} b_1 . (b_1 \dots b_n)_{\lambda-1} . \frac{\varphi\left(\frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)}{N_\lambda . N_{\lambda-1}}.$$

Werden die den Kettenbrüchen $\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)_\lambda$ und $\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_\lambda$ entsprechenden Nenner mit N_n und N_{n-1} bezeichnet, so ist die Differenz beider Kettenbrüche:

$$(-1)^{\lambda n+1} . \frac{(b_1 \dots b_n)^\lambda}{N_n . N_{n-1}}.$$

Zur Berechnung des unendlichen $n$gliedrig periodischen Kettenbruches dient die Gleichung (K), aus welcher durch die Annahme $\lambda = \infty$ resultirt:

$$\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)_\infty = \frac{1}{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)}$$

$$\times\left[\sqrt{\frac{\Phi^2}{4} - (-1)^n b_1 \dots b_n} - \frac{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right) - b_1 . \varphi\left(\frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)}{2}\right],$$

in welcher Φ, wie oben angegeben, die Summe

$$\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right) + b_1 . \varphi\left(\frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)$$

bezeichnet.

Durch Vergleichung dieses Resultates mit dem leicht zu findenden Werthe eines unendlichen ein-, resp. zweigliedrig periodischen Kettenbruches erhält man folgende Sätze:

1. n ungerade.

Jeder unendliche $n$gliedrig periodische Kettenbruch $\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)_\infty$ kann auf einen unendlichen eingliedrig periodischen k, dessen Zähler das Product $b_1 \dots b_n$ und dessen Nenner Φ ist, zurückgeführt werden vermittelst der Gleichung

$$\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)_\infty = \left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right) + \frac{1}{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)} . k.$$

2. n gerade.

Jeder unendliche $n$gliedrig periodische Kettenbruch kann auf einen unendlichen zweigliedrig periodischen k, dessen Zähler der Reihe nach

$$b_1 \dots b_n + \sqrt{b_1 \dots b_n(b_1 \dots b_n - 1)} \text{ und } b_1 \dots b_n - \sqrt{b_1 \dots b_n(b_1 \dots b_n - 1)},$$

dessen Nenner 1 und $\Phi - 2b_1 \dots b_n$ sind, zurückgeführt werden, so dass

$$\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)_\infty = \left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)$$

$$+ \frac{1}{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)} \cdot [k - b_1 \dots b_n - \sqrt{b_1 \dots b_n(b_1 \dots b_n - 1)}].$$

Da im letztbezeichneten zweigliedrig periodischen Kettenbruch die Zähler im Allgemeinen irrational sind, so empfiehlt sich die Transformation in einen Kettenbruch mit negativen Vorzeichen. Werden für einen solchen die den φ analogen Functionen mit ψ bezeichnet, so genügen sie der Relation

$$\psi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots\right) = a_1 \psi\left(\frac{b_2}{a_2}, \dots\right) - b_2 \psi\left(\frac{b_3}{a_3}, \dots\right).$$

Man findet alsdann für gerade n, dass

> jeder unendliche $n$gliedrig periodische Kettenbruch mit positiven Vorzeichen sich in einen eingliedrig periodischen k mit negativen Vorzeichen, dessen Zähler $b_1 \dots b_n$ und dessen Nenner Φ ist, verwandeln lässt, so dass
>
> $$\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)_\infty = \left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right) - \frac{1}{\varphi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)} k.$$

Allgemein aber ergiebt sich:

Jeder unendliche $n$gliedrig periodische Kettenbruch mit negativen Vorzeichen

$$\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right)^-_\infty = \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \dots}}$$

kann auf einen eingliedrig periodischen k mit negativen Vorzeichen, dessen Zähler $b_1 \dots b_n$ und dessen Nenner

$$\psi\left(\frac{b_1}{a_1}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right) - b_1 \cdot \psi\left(\frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)$$

ist, zurückgeführt werden vermittelst der Gleichung

$$\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_n}{a_n}\right)_\infty^- = \left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)_\infty^- + \frac{1}{\psi\left(\frac{b_1}{a_1},\ldots\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)}.k.$$

Eine einfachere Gestalt nehmen diese Relationen an, wenn sämmtliche Zähler b gleich 1 gesetzt werden; bezeichnet man alsdann den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}$$

mit $(a_{1\ldots n})$, sowie die Function φ mit $\varphi(a_{1\ldots n})$, so ergiebt sich zunächst:

$$\varphi(a_{1\ldots n}) = \varphi(a_{n\ldots 1}),$$

$$\frac{(a_{1\ldots n})\lambda}{(a_{n\ldots 1})\lambda} = \frac{\varphi(a_{2\ldots n})}{\varphi(a_{1\ldots n-1})},$$

$$\Phi = \varphi(a_{1\ldots n}) + \varphi(a_{2\ldots n-1}),$$

$$(a_{1\ldots n})_\infty = \frac{1}{\varphi(a_{1\ldots n-1})}\left[\sqrt{\frac{\Phi^2}{4}-(-1)^n}-\frac{\varphi(a_{1\ldots n})-\varphi(a_{2\ldots n-1})}{2}\right].$$

Sehr vereinfacht wird die Reduction dieses speciellen Kettenbruches, dessen Periode eine grade Anzahl von Nennern hat, auf einen zweigliedrig periodischen k; denn die Nenner des letzteren heissen der Reihe nach 1 und $\Phi-2$, während die Zähler 1 bleiben, so dass

$$(a_{1\ldots n})_\infty = (a_{1\ldots n-1}) + \frac{1}{\varphi(a_{1\ldots n-1})}.(k-1).$$

4.

Der Werth der Quadratwurzel, die hiernach durch den Kettenbruch mit den Zählern 1 dargestellt wird, hängt davon ab: 1) ob die Anzahl der Stellen in einer Nennerperiode und 2) ob der Ausdruck Φ grade oder ungrade ist. Nach dem Bisherigen darf aber der Fall nicht ausgeschlossen werden, dass der Radikand

$$\frac{\Phi^2}{4}-(-1)^n$$

einen quadratischen Factor enthält. Es bleibt daher zu untersuchen, wann die Gleichung

$$\frac{\Phi^2}{4} - (-1)^n = \alpha^2 L$$

stattfindet, vorausgesetzt, dass L nur aus ersten Primzahlpotenzen besteht. Es erhellen daraus die Bedingungen, unter welchen eine irrationale Quadratwurzel durch einen Kettenbruch von einer graden oder ungraden Stellenzahl der Periode dargestellt wird. Die Resultate dieser Untersuchung vergegenwärtigt die folgende Tabelle, in welcher zu jeder Form von L die Form des quadratischen Factors α, sowie die von $\frac{1}{2}\Phi$, und endlich die Beschaffenheit von n angegeben ist.

L v. d. Form	α v. d. Form	n	$\frac{1}{2}\Phi$ v. d. Form
$4h+1$	$4l$	grade	$8k \pm 1$
$8h+1$ . . .	$4l+1$ . . .	ungrade	$4k$
$8h+5$ . . .	$4l+1$ . . .	„	$\frac{2k+1}{2}$ oder $8k \pm 2$
„ . . .	$2l+1$ . . .	grade	$\frac{2k+1}{2}$
$4h+3$	$4l$	grade	$8k \pm 1$
$8h+3$ . . .	$4l \pm 1$ . . .	„	$4k+2$
$8h+7$ . . .	$4l \pm 1$ . . .	„	$4k$
$2(4h+1)$ . . .	$4l$ resp. $4l+2$	grade	$16k \pm 1$ resp. $16k \pm 3$
$2(8h+1)$ . .	$4l+1$ . . .	ungrade	$8k \pm 1$
$2(8h+5)$ . .	$4l+1$ . . .	„	$8k \pm 3$
$2(4h+3)$ . . .	$4l$ resp. $4l+2$	grade	$16k \pm 1$ resp. $16k \pm 3$

XXIX.

Integration der Gleichung

$$(ax+by+c)\frac{d^2z}{dxdy}+a\lambda\frac{dz}{dy}+b\mu\frac{dz}{dx}=0.$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie zu Wien.

Differenzirt man diese Gleichung bezüglich x $m$mal, so hat man:

$$(ax+by+c)\frac{d^{m+2}z}{dx^{m+1}dy}+a(m+\lambda)\frac{d^{m+1}z}{dx^m dy}+b\mu\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}}=0,$$

und setzt man

$$m=-\lambda,$$

so vereinfacht sich dieselbe und gibt durch Integration:

$$\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}}=\frac{\varphi(x)}{(ax+by+c)^\mu} \quad \text{und somit:} \quad z=\frac{d^{\lambda-1}}{dx^{\lambda-1}}\left[\frac{\varphi(x)}{(ax+by+c)^\mu}\right],$$

wenn $\varphi(x)$ eine willkührliche Function von x bedeutet. Da man einen ganz ähnlichen Ausdruck, mit einer willkührlichen Function von y versehen, gewinnen kann, so ergibt sich für das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung:

$$z=\frac{d^{\lambda-1}}{dx^{\lambda-1}}\left[\frac{\varphi(x)}{(ax+by+c)^\mu}\right]+\frac{d^{\mu-1}}{dy^{\mu-1}}\left[\frac{\psi(y)}{(ax+by+c)^\lambda}\right].$$

Anmerkung. Wird derselbe Weg eingeschlagen bei der Integration der Gleichung

$$[x+\varphi_1(y)]\frac{d^2z}{dxdy}+\varphi_2(y)\frac{dz}{dx}+m\frac{dz}{dy}=0,$$

so erhält man:

$$z=\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left[F(x).e^{-\int\frac{\varphi_2(y)dy}{x+\varphi_1(y)}}\right],$$

unter $F(x)$ eine willkührliche Function von x verstanden.

XXX.

Die Brennpunkte eines Kegelschnitts als solche Punkte der Ebene aufgefasst, in welchen je zwei entsprechende Punkte zweier kreisverwandter Systeme vereinigt sind.

Von

Herrn Doctor *H. Siebeck*,

Director der Provinzial-Gewerbeschule zu Liegnitz.

1.

In einem Aufsatze im 55. Bande des Crelle'schen Journals habe ich u. A. nachgewiesen, dass bei Zugrundelegung der von Gauss gegebenen graphischen Darstellung imaginärer Zahlen, die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{A+Bv}{1+v}$ völlig mit der des gleichlautenden Ausdrucks im barycentrischen Calcül übereinstimmt. Sind nämlich A und B beliebige constante complexe Zahlen, durch welche also zwei beliebige feste Punkte einer Ebene dargestellt werden und ist v eine beliebige reelle Zahl, so ist $\frac{A+Bv}{1+v}$ Ausdruck eines in der Geraden AB liegenden Punktes P, und zwar des so liegenden Punktes, dass das Schnittverhältniss $\frac{AP}{PB}=v$ ist. Nimmt man daher v als veränderlich an, so kann $\frac{A+Bv}{1+v}$ als Ausdruck der Geraden AB betrachtet werden, wobei nicht zu übersehen ist, dass v einen positiven oder negativen Werth hat, jenachdem der durch jenen Ausdruck dargestellte Punkt in der zwischen A und B liegenden Strecke, oder ausserhalb derselben liegt.

Untersuchen wir nun, ob auch der allgemeinere Ausdruck $\frac{Au+Bv+Cw}{u+v+w}$, in welchem ABC wieder beliebige feste Punkte (die sogenannten Fundamentalpunkte), uvw aber beliebige reelle Zahlen sind, hier dieselbe Bedeutung hat, wie im barycentischen Calcül. Setzen wir zu dem Ende

$$\frac{Au+Bv+Cw}{u+v+w}=P, \quad \text{(s. Taf. II. Fig. 9.)}$$

so folgt hieraus:

$$\frac{Au+Bv}{u+v}=\frac{P(u+v+w)-Cw}{(u+v+w)-w}.$$

Bezeichnen wir den durch diese einander gleichen Ausdrücke repräsentirten Punkt durch X, so liegt in Folge des Obigen X sowohl in AB, als auch in PC, und es ist somit $\frac{Au+Bv}{u+v}$ Durchschnittspunkt von AB und PC. Ebenso beweist man, dass $Y=\frac{Bv+Cw}{v+w}$ Durchschnittspunkt von BC und AP, endlich $Z=\frac{Au+Cw}{u+w}$ Durchschnittspunkt von AC und BP ist. Hierbei sind die Schnittverhältnisse $\frac{AX}{XB}$, $\frac{BY}{YC}$, $\frac{CZ}{ZA}$ offenbar dem Obigen zufolge resp. $=\frac{v}{u}, \frac{w}{v}, \frac{u}{w}$. Somit ist $P=\frac{Au+Bv+Cw}{u+v+w}$ derjenige Punkt der Ebene, welcher so liegt, dass die Geraden AP, BP, CP verlängert die Seiten des Dreiecks ABC resp. nach den Schnittverhältnissen $\frac{v}{u}, \frac{w}{v}, \frac{u}{w}$ theilen, und es hat somit der Ausdruck

$$\frac{Au+Bv+Cw}{u+v+w}$$

in der That von unserem Standpunkte aus völlig dieselbe Bedeutung wie der gleichlautende im barycentrischen Calcül, und es können überhaupt alle im barycentrischen Calcül gezogenen Resultate, in soweit sie sich nur auf eine Ebene beziehen, auch als unmittelbar für den Punktcalcül mit imaginären Zahlen gültig angesehen werden.

2.

Muss nun der Punktcalcül mit imaginären Zahlen dem barycentrischen in so weit nachstehen, als ersterer sich vorläufig nur auf die Ebene beschränkt, so übertrifft er ihn doch andererseits

innerhalb dieses beiden gemeinsamen Gebietes an Tragweite, weil durch ihn nicht nur die Addition und Subtraction von Punkten, wie bei jenem, sondern auch die Multiplication, Division etc. unmittelbar in die Rechnung eingeführt werden kann, so dass hierdurch ermöglicht wird, nicht bloss Ausdrücken von der Form $\frac{Au+Bv+Cw}{u+v+w}$, sondern überhaupt jedem beliebigen algebraischen oder transscendenten Ausdruck einen planimetrischen Sinn beizulegen.

Wenn wir nun unternehmen, die so eben aufgestellte Behauptung durch Entwickelung einer neuen Anschauungsweise, mittelst deren die Brennpunkte der Kegelschnitte mit der Kreisverwandtschaft in Beziehung gesetzt werden, zu rechtfertigen, so müssen wir noch einige Vorbemerkungen vorausschicken, theils behufs leichterer Orientirung des Lesers, theils auch um einige Punkte zu erörtern, welche im barycentrischen Calcül nicht so ausführlich erörtert sind, als es für den vorliegenden Zweck nöthig erscheint.

Zunächst ist aus dem barycentrischen Calcül bekannt, dass, wenn ABC drei Fundamentalpunkte einer Ebene, $A'B'C'$ drei Fundamentalpunkte einer zweiten Ebene, abc, $a'b'c'$ beliebige reelle constante Zahlen und uvw beliebige reelle veränderliche Zahlen sind, $\frac{Aau+Bbv+Ccw}{au+bv+cw}$ und $\frac{A'a'u+B'b'v+C'c'w}{a'u+b'v+c'w}$ Ausdrücke collineärer Punktsysteme sind, sofern wir diejenigen Punkte beider Ebenen als entsprechende betrachten, zu welchen dieselben Werthe der Variabeln gehören. Hierbei entsprechen sich offenbar A und A', B und B', C und C'. Das vierte zur Feststellung der collineären Beziehung nöthige Paar entsprechender Punkte wird am einfachsten gefunden, wenn man $u=v=w$ setzt, wodurch man $\frac{Aa+Bb+Cc}{a+b+c}=D$ und $\frac{A'a'+B'b'+C'c'}{a'+b'+c'}=D'$ als entsprechende Punkte erhält. Sind die Schnittverhältnisse, nach welchen die entsprechenden Seiten der beiden Fundamentaldreiecke durch die von den Ecken aus resp. nach D und D' gehenden Geraden geschnitten werden, in beiden Systemen dieselben, ist also $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$, so sind beide Systeme affin. Fallen dagegen beide Ebenen auf einander und ist $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$, so haben beide Systeme diese drei Punkte und also auch die drei Richtungen, welche durch diese drei Punkte gehen, mit einander gemein. Ist ausserdem noch $\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}$, hat man also die beiden Sy-

steme $\frac{Aau+Bbv+Ccw}{au+bv+cw}$ und $\frac{Aau+Bb'v+Ccw}{au+b'v+cw}$, so giebt dies den Fall der perspektivischen Collineation, welcher, obwohl an Folgerungen der fruchtbarste, im barycentrischen Calcül nicht abgehandelt ist. Bezeichnet man nämlich zwei beliebige entsprechende Punkte beider Systeme resp. durch P und P', so ist $\frac{cw}{au}$ der Werth des Schnittverhältnisses, nach welchem die Strecke AC sowohl durch die Gerade BP, als auch durch BP' getheilt wird, und es liegen somit je zwei entsprechende Punkte beider Systeme mit B in gerader Linie. Bezeichnen wir nun den Punkt, in welchem die Gerade AC von den beiden auf einander liegenden Geraden BP und BP' geschnitten wird, durch L, so dass also

$$L=\frac{Aau+Ccw}{au+cw},$$

so folgen aus dieser und den beiden nachfolgenden Gleichungen:

$$P=\frac{Aau+Bbv+Ccw}{au+bv+cw},$$

$$P'=\frac{Aau+Bb'v+Ccw}{au+b'v+cw}$$

die beiden Gleichungen:

$$P=\frac{L(au+cw)+Bbv}{au+cw+bv},$$

$$P'=\frac{L(au+cw)+Bb'v}{au+cw+b'v}.$$

Somit sind $\frac{bv}{au+cw}$ und $\frac{b'v}{au+cw}$ resp. die Werthe der Schnittverhältnisse $\frac{LP}{PB}$ und $\frac{LP'}{P'B}$, und es ist daher das Doppelschnittverhältniss

$$\frac{LP}{PB}:\frac{LP'}{P'B}=\frac{b}{b'},$$

also constant.

Die beiden Systeme $\frac{Aau+Bbv+Ccw}{au+bv+cw}$ und $\frac{Aau+Bb'v+Ccw}{au+b'v+cw}$ sind somit perspektivisch collineär und zwar ist B das Collineationscentrum, AC die Collineationsaxe; $\frac{b}{b'}$ aber ist der Modulus

der Collineation (vergl. Paulus, Neuere Geometrie). Ist insbesondere $b' = -b$ und folglich der Collineations-Modul $= -1$, so hat man den Fall der involutorischen Collineationssysteme, je zwei entsprechende Punkte werden dann durch das Centrum B und die Hauptaxe harmonisch getrennt.

Betrachten wir nun den durch $\frac{Aa + 2Bbx + Ccx^2}{a + 2bx + cx^2}$ vorgestellten Kegelschnitt (wo ABC die Fundamentalpunkte, abc beliebige constante reelle Zahlen, x eine reelle Variable bedeutet), so ersieht man aus dem Vorhergehenden sogleich, dass je zwei zu gleichen, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Werthen von x gehörige Punkte dieses Kegelschnitts entsprechende Punkte zweier involutorischen Collineationssysteme, und dass mithin B und AC Pol und Polare des Kegelschnitts sind. Da nun aber der Kegelschnitt durch die Punkte A und C geht (als welche Punkte den Werthen 0 und ∞ der Variabeln x entsprechen), so sind A und C die Durchschnittspunkte des Kegelschnitts und der Polare von B.

Somit ist $\frac{Aa + 2Bbx + Ccx^2}{a + 2bx + cx^2}$ Ausdruck eines Kegelschnitts, von welchem die Seiten AB und CB des Fundamentaldreiecks Tangenten und zwar A und C die Berührungspunkte der letzteren sind.

Betrachten wir nun den Ausdruck $\frac{Aa + Bb(x + \xi) + Ccx\xi}{a + b(x + \xi) + cx\xi}$, welcher zwei unabhängige Variabele x und ξ enthält und in den obigen Kegelschnittausdruck übergeht, wenn $\xi = x$ gesetzt wird, und bezeichnen wir denselben durch $F(x, \xi)$, so ist $F(x', \xi)$, wenn x' ein bestimmter Werth von x und ξ variabel ist, Ausdruck einer Geraden, da der Zähler sowohl, als der Nenner lineäre Funktionen von ξ sind. Die Variable ξ wird aber während ihrer stetigen Veränderung einmal $= x'$, und da $F(x', x')$ ein Punkt des Kegelschnitts ist, so ist $F(x', x')$ ein jener Geraden und dem Kegelschnitt gemeinsamer Punkt. Es lässt sich aber leicht beweisen, dass jene Gerade $F(x', \xi)$ nicht noch einen zweiten Punkt mit dem Kegelschnitt gemein haben kann. Denn wäre $F(x', \xi')$ dieser zweite Punkt, so müsste es einen Werth x'' von x geben, für welchen $F(x'', x'') = F(x', \xi')$ wäre. Somit wäre dann

$$\frac{a}{a} = \frac{b(x' + \xi')}{2bx''} = \frac{cx'\xi'}{cx''x''}$$

oder

$$1 = \frac{x' + \xi'}{2x''} = \frac{x'\xi'}{x''x''},$$

welchen Gleichungen aber nur genügt werden kann, wenn $x'' = \xi' = x'$.

Somit ist bewiesen, dass die Gerade $F(x', \xi)$ nur einen Punkt mit dem Kegelschnitt gemein haben kann und folglich eine Tangente ist, deren Berührungspunkt sich in $F(x', x')$ befindet. Eben so ist natürlich $F(x, \xi')$, wenn ξ' constant und x variabel ist, eine Tangente und ihr Berührungspunkt in $F(\xi', \xi')$. Nun liegt aber der Punkt $F(x', \xi')$ sowohl in der Geraden $F(x', \xi)$, als auch in der Geraden $F(x, \xi')$; somit ist allgemein $F(x', \xi')$ der Pol der Geraden, welche die beiden Kegelschnittpunkte $F(x', x')$ und $F(\xi', \xi')$ verbindet.

Man kann hieraus mit grosser Leichtigkeit eine charakteristische Eigenschaft des Kegelschnitts nachweisen. Ist nämlich in Taf. II. Fig. 10. $G = F(x', x')$ und folglich $F(x', \xi)$ Ausdruck der Tangente in G, so ist es leicht, die Durchschnittspunkte der letzteren mit AB und AC zu bestimmen. Setzt man nämlich in $F(x', \xi)$ die Variable $\xi = 0$, so erhält man den in AB liegenden Punkt derselben:

$$F(x', 0) = Z = \frac{Aa + Bbx'}{a + bx'}. \qquad (\varDelta)$$

Ebenso ist:

$$F(x', \infty) = Z' = \frac{Bb + Ccx'}{b + cx'}. \qquad (\varDelta')$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber, dass

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{bx'}{a},$$

$$\frac{BZ'}{Z'C} = \frac{cx'}{b},$$

und folglich:

$$\frac{AZ}{ZB} : \frac{BZ'}{Z'C} = \frac{b^2}{ac},$$

also constant ist. Dies Ergebniss congruirt aber mit dem bekannten Gesetz, dass auf zwei beliebige Tangenten eines Kegelschnitts die Durchschnittspunkte aller übrigen Tangenten conforme Punktreihen bilden. Der Modulus der anharmonisch proportionalen Theilung aber ist $\frac{b^2}{ac}$, welche Bemerkung uns über die Bedeutung der Constanten $a\,b\,c$ einen bemerkenswerthen Aufschluss giebt.

Es seien nun λ und μ die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$a+2bx+cx^2=0, \qquad (I)$$

und folglich $F(\lambda, \lambda)$ und $F(\mu, \mu)$ die beiden unendlich entfernten Punkte des Kegelschnitts, so ist $F(\lambda, \mu)$ der Pol der Verbindungslinie dieser beiden Punkte, also der Mittelpunkt des Kegelschnitts. Nun ist aber in Folge der Gleichung (I):

$$\lambda+\mu=-\frac{2b}{c}, \quad \lambda\mu=\frac{a}{c};$$

folglich:

$$F(\lambda, \mu)=\frac{2Bb^2-(A+C)ac}{2b^2-2ac},$$

wofür man, wenn man die Mitte der Sehne AC, d. i. $\frac{A+C}{2}$, durch N bezeichnet, auch setzen kann:

$$F(\lambda, \mu)=\frac{Bb^2-Nac}{b^2-ac}.$$

Aus dieser Gleichung geht aber hervor, dass der Mittelpunkt M des Kegelschnitts mit B und N in gerader Linie liegt, und zwar ist $-\frac{b^2}{ac}$ der Werth des Schnittverhältnisses $\frac{NM}{MB}$.

Ist $b^2-ac=0$, so liegt der Mittelpunkt im Unendlichen und der Kegelschnitt ist eine Parabel. Nebenbei ersieht man zugleich, dass der Kegelschnitt eine Hyperbel oder Ellipse ist, jenachdem die Gleichung $a+2bx+cx^2=0$ zwei reelle Wurzeln hat, oder nicht; jenachdem also $b^2-ac>0$ oder <0 ist.

3.

Nach vorstehender kurzen Entwickelung, welche die Collineation zum Ausgangspunkte hatte und in welcher von keinerlei Mitteln Gebrauch gemacht ist, die nicht auch dem barycentrischen Calcül zu Gebote ständen, können wir dem oben von mir angedeuteten Ziele näher treten. In dem oben erwähnten Aufsatze im Crelle'schen Journale habe ich nachgewiesen, dass die Brennpunkte einer durch eine Funktion von beliebiger Form $F(x)$ gegebenen Curve diejenigen Punkte sind, welche man erhält, wenn man die Wurzeln der Gleichung

$$F'(x)=0$$

in $F(x)$ für x einsetzt.

Die unmittelbare Anwendung dieses Gesetzes auf den Kegelschnittausdruck $\frac{Aa+2Bbx+Ccx^2}{a+2bx+cx^2}$ würde aber etwas umständlich sein, weshalb wir einen kürzeren Weg einschlagen wollen.

Ist der Zähler des Bruchs $\frac{Aa+2Bbx+Ccx^2}{a+2bx+cx^2}$ ein vollständiges Quadrat, so giebt es offenbar einen Werth von x, welcher zugleich den beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= 0, \\ F'(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\Theta)$$

genügt. Dem Obigen zufolge muss also dann ein Brennpunkt des Kegelschnitts in den Nullpunkt der Ebene fallen. Umgekehrt muss $Aa+2Bbx+Ccx^2$ ein vollständiges Quadrat und folglich

$$B^2b^2 - ACac = 0 \qquad (\mathrm{Y})$$

sein, wenn ein Brennpunkt des Kegelschnitts in den Nullpunkt fällt. Denn es genügt alsdann ein und derselbe Werth von x den beiden Gleichungen (Θ), was nur möglich ist, wenn $Aa+2Bbx+Ccx^2$ zwei gleiche Faktoren hat.

Ist nun aber der Nullpunkt nicht ein Brennpunkt des gegebenen Kegelschnitts und bezeichnen wir einen der beiden Brennpunkte durch Z, so können wir doch den Nullpunkt nach Z verlegen, was, wenn wir es thun, zur Folge hat, dass wir für die Fundamentalpunkte resp. $A-Z$, $B-Z$, $C-Z$ schreiben müssen, so dass nun die Bedingungsgleichung (Y) folgende Gestalt annimmt:

$$(B-Z)^2b^2 - (A-Z)(C-Z)ac = 0. \qquad (\mathrm{L})$$

Dies also ist die Gleichung für die Brennpunkte des in Rede stehenden Kegelschnitts, von deren Richtigkeit man sich theilweise schon dadurch überzeugen kann, dass man sie auf die Form

$$Z^2 - 2MZ + R = 0$$

bringt, wo denn M die halbe Summe der beiden Brennpunkte, also der Mittelpunkt des Kegelschnitts sein muss. In der That erhält man für M den Werth $\frac{2Bb^2-(A+C)ac}{2b^2-2ac}$, was mit dem schon vorhin auf anderem Wege gefundenen Mittelpunktsausdruck übereinstimmt.

4.

Setzt man zwischen zwei veränderlichen Punkten Z und Z' einer Ebene eine solche Abhängigkeit fest, dass

$$(B-Z)(B-Z')b^2-(A-Z)(C-Z')ac=0, \qquad \text{(M)}$$

so stehen die beiden Punkte Z und Z' in Kreisverwandtschaft. Denn die Gleichung (M) lässt sich leicht auf die Form $Z'=\frac{G+HPZ}{1+PZ}$ bringen, welche, wie ich in dem mehrerwähnten Aufsatze (§. 14.) gezeigt habe, dasjenige Abhängigkeitsverhältniss zweier Punkte darstellt, welches Kreisverwandtschaft genannt wird. Da nun die Gleichung (M) in die Gleichung (L) übergeht, wenn $Z'=Z$ gesetzt wird, so sind die Brennpunkte des Kegelschnitts $\frac{Aa+2Bbx+Ccx^2}{a+2bx+cx^2}$ diejenigen Punkte der Ebene, in welchen je zwei einander nach der durch die Gleichung (M) ausgedrückten Kreisverwandtschaft entsprechende Punkte auf einander fallen, welche letzteren wir nach einer bekannten Analogie die Hauptpunkte der kreisverwandten Systeme nennen wollen.

Eliminiren wir andererseits aus den Gleichungen (Δ) und (Δ') des vorigen Paragraphen x', so erhalten wir, wie man sich leicht überzeugt, ebenfalls die Gleichung (M). Hier aber sind Z und Z' die Durchschnittspunkte, welche eine Tangente des Kegelschnitts mit Z und Z' bildet. Sonach erhalten wir den merkwürdigen Satz:

Betrachtet man zwei in zwei sich schneidenden Geraden befindliche projektivische Punktreihen zugleich als kreisverwandt, so fallen die Hauptpunkte der beiden kreisverwandten Systeme in die Brennpunkte desjenigen Kegelschnitts, von welchem die Verbindungslinien je zweier entsprechender Punkte jener projektivischen Geraden eingehüllt werden.

Versuchen wir es, aus vorstehendem allgemeinen Gesetz diejenigen Nutzanwendungen zu ziehen, welche aus der Theorie der Kreisverwandtschaft am leichtesten hergeleitet werden können, so gelangen wir theils zu den schon bekannten, theils aber auch zu neuen, nicht weniger bemerkenswerthen Eigenschaften der Brennpunkte.

a) Seien in Taf. II. Fig. 11. K und L die Brennpunkte eines Kegelschnitts, AB und BC aber Tangenten, so sind die vier

Punkte $AKLB$ den vier Punkten $BKLC$ kreisverwandt. Nach den bekannten Eigenschaften der Kreisverwandtschaft muss daher sein:

$$\frac{KA}{AL}:\frac{KB}{BL}=\frac{KB}{BL}:\frac{KC}{CL}. \qquad \text{(I)}$$

Ferner muss die Winkelbeziehung Statt finden:

$$KAL - KBL = KBL - KCL. \qquad \text{(II)}$$

Aus (I) folgt der neue Satz:

Das Verhältniss der Entfernungen der Brennpunkte eines Kegelschnitts von einem beliebigen Punkte der Ebene ist die mittlere Proportionale zu den Verhältnissen der Entfernungen der Brennpunkte von den Berührungspunkten der Tangenten, welche von jenem Punkte aus an den Kegelschnitt gelegt werden können.

Die Gleichung II. dagegen liefert den Satz:

Der Winkel, unter welchem die Strecke zwischen den Brennpunkten eines Kegelschnitts von einem beliebigen Punkte der Ebene aus gesehen wird, ist gleich der Summe der Winkel, unter denen dieselbe Strecke von den Berührungspunkten derjenigen Tangenten aus gesehen wird, welche von jenem Punkte aus an den Kegelschnitt gezogen werden können.

b) Es muss ferner sein:

$$\frac{BL}{LK}:\frac{BA}{AK}=\frac{CL}{LK}:\frac{CB}{BK}$$

oder

$$AB:BC=\frac{AK}{KB}:\frac{CL}{LB}. \qquad \text{(III)}$$

Hieraus erhalten wir den Satz:

Die beiden Tangenten, welche man von einem beliebigen Punkte der Ebene an einen Kegelschnitt legen kann, verhalten sich zu einander, wie das Verhältniss der Entfernungen des einen Brennpunkts von den Endpunkten der einen Tangente zu dem Verhältniss der Entfernungen des anderen Brennpunkts von der anderen Tangente.

Andererseits muss aber auch die Winkelbeziehung Statt finden:

$$CLK - BLK = CBK - BAK.$$

Aus dieser Gleichung findet man aber durch eine leichte Entwickelung:

$$CLB + BKA = 2R - ABC. \qquad (IV)$$

Dies giebt den Satz:

Der von zwei Tangenten eines Kegelschnitts gebildete Winkel ist der Supplementswinkel desjenigen Winkels, welchen man erhält, wenn man den Winkel, unter welchem man die eine Tangente von dem einen Brennpunkt aus sieht, addirt zu dem Winkel, unter welchem man die andere Tangente von dem anderen Brennpunkte aus sieht.

Der bekannte Satz, nach welchem man von einem beliebigen der beiden Brennpunkte aus jede der beiden Tangenten unter gleichem Winkel sieht, sowie noch andere dergleichen Winkelbeziehungen lassen sich aus a) und b) leicht herleiten.

c) Verstehen wir mit **Möbius** unter dem Centralpunkt eines Systems denjenigen Punkt, welcher dem unendlich entfernten Punkte des ihm kreisverwandten Systems entspricht, so fallen die beiden Centralpunkte offenbar mit den Gegenpunkten der conformen Geraden AB und BC (Taf. II. Fig. 12.) zusammen, also mit den Punkten M und N', in welchen diese Tangenten von den ihnen parallelen Tangenten MF und FN' geschnitten werden. Nun ist aber bekanntlich das Produkt aus den Entfernungen zweier entsprechenden Punkte der kreisverwandten Systeme von den Centralpunkten constant. Da nun der Punkt L dem Punkte L, der Punkt B dem Punkte C entspricht, so ist folglich:

$$ML.N'L = N'C.MB.$$

Betrachten wir andererseits ganz ebenso B und F als Centralpunkte der kreisverwandten Tangenten $N'B$ und $N'F$, so muss aus demselben Grunde

$$BL.FL = BC.FN'$$

sein. Aus der Addition dieser beiden Gleichungen und unter Berücksichtigung, dass $FN' = MB$, ergiebt sich:

$$ML.N'L + BL.FL = BN'.BM.$$

Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

Das Produkt zweier benachbarter Seiten eines einem Kegelschnitt umschriebenen Parallelogramms ist gleich der Summe der Produkte der Entfernungen

eines beliebigen der beiden Brennpunkte von je zwei gegenüberstehenden Ecken des Parallelogramms. (Ist der Kegelschnitt ein Kreis, so giebt dies den Pythagoräischen Lehrsatz.)

Andererseits bilden aber auch in zwei kreisverwandten Systemen je zwei vom Centralpunkte des einen Systems ausgehende Gerade denselben Winkel, wie die ihnen entsprechenden im anderen Systeme. Hiernach ist also

$$BML = LN'C,$$

und ebenso

$$MBL = LFM \text{ u. s. w.}$$

Dies giebt den Satz:

Ist ein Parallelogramm einem Kegelschnitt umschrieben, so wird jede der Verbindungslinien der Ecken mit einem Brennpunkte von zwei gegenüberstehenden Ecken des Parallelogramms aus unter gleichen Winkeln gesehen.

d) Liegen zwei Punkte D und F der Tangente AB mit den Brennpunkten K und L in einem Kreise und sind D' und F' resp. die Durchschnittspunkte der von D und F aus gezogenen Tangenten mit BC, so müssen auch die Punkte D' und F' mit den Brennpunkten in einem Kreise liegen. Dies giebt den Satz:

Schneiden zwei Tangenten (DD' und FF') eines Kegelschnitts eine dritte Tangente (AB) desselben in zwei solchen Punkten (D und F), welche mit den Brennpunkten in einem Kreise liegen, so schneiden sie überhaupt jede Tangente (z. B. BC) des Kegelschnitts in zwei Punkten (D' und F'), welche mit den Brennpunkten in einem Kreise liegen.

e) Schneidet ein beliebiger Kreis (Taf. II. Fig. 13.) die beiden Kegelschnitts-Tangenten MB und MF in den Punkten $DEGH$, und sind $D'E'G'H'$ resp. die Punkte, in welchen die Tangenten $N'B$ und $N'F$ von denjenigen Tangenten geschnitten werden, welche noch von D, E, G, H an den Kegelschnitt gezogen werden können, so liegen auch die vier Punkte D', E', G', H' in einem Kreise, und zwar in demjenigen, welcher dem zuerst gegebenen entspricht. In beiden Kreisen haben resp. M und N' eine ähnliche Lage. Geht der eine Kreis durch M, so wird der andere Kreis zu einer Geraden u. s. w.

f) Ist der gegebene Kegelschnitt eine Hyperbel und sind A und C die unendlich entfernten Punkte derselben, so fallen die

Centralpunkte M und N' zugleich mit B in den Mittelpunkt der Hyperbel. Die Kreisverwandtschaft ist dann eine involutorische. Man leitet hieraus leicht die bekannten Eigenschaften der Asymptoten u. s. w. ab.

Der Satz unter e) gewinnt hier folgende Gestalt: Zieht man von den vier Durchschnittspunkten eines Kreises mit den Asymptoten einer Hyperbel Tangenten an die letztere, welche die Asymptoten abermals in vier Punkten schneiden, so liegen auch die letzteren vier Punkte in einem Kreise. Der Mittelpunkt der Hyperbel ist ein Aehnlichkeitspunkt beider Kreise.

g) Ist der gegebene Kegelschnitt eine Parabel, so fällt der eine Hauptpunkt der beiden kreisverwandten Systeme in's Unendliche und die Kreisverwandtschaft geht in die Aehnlichkeit über.

XXXI.

Darstellung des unendlichen Kettenbruchs

$$\psi(x) = n(2x+1) + \cfrac{m}{n(2x+3) + \cfrac{m}{n(2x+5)+\dots}}$$

in geschlossener Form.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie zu Wien.

Es ist, wie man leicht sieht:

$$\psi(x) = n(2x+1) + \frac{m}{\psi(x+1)},$$

und setzt man:

$$\psi(x) = n(2x+1) + \cfrac{m}{n(2x+3) + \cfrac{m}{n(2x+5) + \dots}}$$

$$\psi(x) = \frac{F(x)}{F(x+1)},$$

so kömmt man zu der Gleichung:

$$mF(x+2) + n(2x+1)\,F(x+1) - F(x) = 0.$$

Wird dieselbe nach meiner Methode gelöst, so erhält man:

$$F(x) = \left\{ \frac{d^x}{dr^x}\left[C_1 e^{+\sqrt{\frac{2r}{n}}} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{2r}{n}}}\right] \right\}_{\frac{m}{2n}},$$

somit:

$$\psi(x) = \frac{\left\{ \frac{d^x}{dr^x}\left[C_1 e^{+\sqrt{\frac{2r}{n}}} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{2r}{n}}}\right] \right\}_{\frac{m}{2n}}}{\left\{ \frac{d^{x+1}}{dr^{x+1}}\left[C_1 e^{+\sqrt{\frac{2r}{n}}} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{2r}{n}}}\right] \right\}_{\frac{m}{2n}}}.$$

Da für $m=1$, $n=1$ $C_1 = C_2$ ist, so erhält man als Werth des vorgelegten Kettenbruches:

$$\psi(x) = \frac{\left\{ \frac{d^x}{dr^x}\left[e^{+\sqrt{\frac{2r}{n}}} + e^{-\sqrt{\frac{2r}{n}}}\right] \right\}_{\frac{m}{2n}}}{\left\{ \frac{d^{x+1}}{dr^{x+1}}\left[e^{+\sqrt{\frac{2r}{n}}} + e^{-\sqrt{\frac{2r}{n}}}\right] \right\}_{\frac{m}{2n}}}.$$

Will man nun den Werth des Kettenbruches

$$n + \cfrac{1}{3n + \cfrac{1}{5n + \cfrac{1}{7n + \dots}}}$$

haben, welchen Euler bestimmte (siehe Euler's vollständige Anleitung zur Integralrechnung, deutsch von Salomon, 4. Band, Seite 391.), so hat man bloss in der gefundenen allgemeinen Formel

$$m = 1, \quad x = 0$$

zu setzen; man erhält dann als Werth des obigen Kettenbruches:

$$\frac{e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}}.$$

XXXII.

Integration der partiellen Differentialgleichung

$$(x+y)^2 \frac{d^2z}{dxdy} + m_1(x+y)\frac{dz}{dx} + m_2(x+y)\frac{dz}{dy} + nz = 0. \quad (1)$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie zu Wien.

Euler behandelt diese Differentialgleichung (Vollständige Anleitung zur Integralrechnung, deutsch von Salomon, 3. Band, Seite 221.) in dem speciellen Falle, wo $m_1 = m_2$ ist, und findet für das Integral derselben eine in speciellen Fällen abbrechende Reihe. Ich will für die Gleichung (1) einen anderen Integrationsweg einschlagen, welcher mich in sehr vielen Fällen mit dem besten Erfolge zum Integrale führte.

Ich setze nämlich:

$$z = (x+y)^\lambda Z,$$

unter Z eine, einstweilen noch unbekannte Function von x und y und unter λ eine constante Zahl verstanden; alsdann ist:

$$\frac{dz}{dx} = (x+y)^\lambda \frac{dZ}{dx} + \lambda(x+y)^{\lambda-1} Z,$$

$$\frac{dz}{dy} = (x+y)^\lambda \frac{dZ}{dy} + \lambda(x+y)^{\lambda-1} Z,$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} = (x+y)^\lambda \frac{d^2Z}{dxdy} + \lambda(x+y)^{\lambda-1}\left(\frac{dZ}{dx} + \frac{dZ}{dy}\right) + \lambda(\lambda-1)(x+y)^{\lambda-2} Z,$$

und werden diese Werthe in die Gleichung (1) substituirt, so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$(x+y)^2 \frac{d^2Z}{dxdy} + (\lambda+m_1)(x+y)\frac{dZ}{dx} + (\lambda+m_2)(x+y)\frac{dZ}{dy}$$
$$+ [\lambda^2 + (m_1+m_2-1)\lambda + n] Z = 0.$$

$$(x+y)^2\frac{d^2z}{dx\,dy}+m_1(x+y)\frac{dz}{dx}+m_2(x+y)\frac{dz}{dy}+nz=0.$$

Wird nun λ so gewählt, auf dass

$$\lambda^2+(m_1+m_2-1)\lambda+n=0$$

wird, so hat man:

$$(x+y)\frac{d^2Z}{dx\,dy}+(\lambda+m_1)\frac{dZ}{dx}+(\lambda+m_2)\frac{dZ}{dy}=0, \qquad (2)$$

welche Gleichung offenbar von einfacherem Baue ist, als die Gleichung (1). Ich differenzire nun die Gleichung (2) μmal nach x, unter μ eine ganz beliebige Zahl verstanden, und erhalte hierdurch, die Liouville'sche fonction complementaire ausser Acht lassend:

$$(x+y)\frac{d^{\mu+2}Z}{dx^{\mu+1}dy}+(\lambda+m_1)\frac{d^{\mu+1}Z}{dx^{\mu+1}}+(\lambda+m_2+\mu)\frac{d^{\mu+1}Z}{dx^{\mu}dy}=0.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich, wenn man μ so wählt, auf dass

$$\lambda+m_2+\mu=0$$

ist, und gestaltet sich dann folgendermassen:

$$(x+y)\frac{d^{\mu+2}Z}{dx^{\mu+1}dy}+(\lambda+m_1)\frac{d^{\mu+1}Z}{dx^{\mu+1}}=0;$$

hieraus folgt nun:

$$\frac{d^{\mu+1}Z}{dx^{\mu+1}}=\frac{\varphi(x)}{(x+y)^{\lambda+m_1}},$$

unter $\varphi(x)$ eine willkührliche Function von x verstanden; und da

$$\mu=-\lambda-m_2$$

ist, so hat man:

$$Z=\frac{d^{\lambda+m_2-1}}{dx^{\lambda+m_2-1}}\left[\frac{\varphi(x)}{(x+y)^{\lambda+m_1}}\right].$$

Ganz auf ähnliche Weise erhält man aber auch:

$$Z=\frac{d^{\lambda+m_1-1}}{dy^{\lambda+m_1-1}}\left[\frac{\psi(y)}{(x+y)^{\lambda+m_2}}\right],$$

folglich ist:

$$Z=(x+y)^{\lambda}\left\{\frac{d^{\lambda+m_2-1}}{dx^{\lambda+m_2-1}}\left[\frac{\varphi(x)}{(x+y)^{\lambda+m_1}}\right]+\frac{d^{\lambda+m_1-1}}{dy^{\lambda+m_1-1}}\left[\frac{\psi(y)}{(x+y)^{\lambda+m_2}}\right]\right\},$$

unter λ eine Wurzel der Gleichung $\lambda^2+(m_1+m_2-1)\lambda+n=0$, unter $\varphi(x)$ eine willkührliche Function von x und unter $\psi(y)$ eine willkührliche Function von y verstanden. In dem Falle, als $\lambda+m_1$ oder $\lambda+m_2$ eine ganze Zahl ist, lässt sich die angezeigte Differentiation leicht ausführen, und man kömmt dann zu den von Euler gefundenen Ausdrücken.

XXXIII.

Demonstratio theorematis Lambertini de sectoribus parabolicis quadrandis.

Auctore

D^re^. *Christiano Fr. Lindman*,

Lect. Strengnesensi.

Si litteris x, y et x', y' notamus coordinatas orthogonales punctorum parabolae, cujus aequatio est $y^2=2px$, constat, superficiem figurarum, quae curva et ordinata axique abscissarum continentur, esse $\frac{2}{3}xy$, $\frac{2}{3}x'y'$ resp. Positis y et y' positivis et $y'>y$, differentia superficierum evadit $\frac{2}{3}(x'y'-xy)$. Si reperire volumus sectorem $(=S)$, cujus vextex est focus, deducendum est Δ^{um} $\frac{1}{2}y'(x'-\frac{p}{2})$ et addendum Δ^{um} $\frac{1}{2}y(x-\frac{p}{2})$. Ita fit

$$S=\tfrac{1}{6}(x'y'-xy)+\frac{p}{4}(y'-y)=\sqrt{2p}\{\tfrac{1}{6}(x'\sqrt{x'}-x\sqrt{x})+\frac{p}{4}(\sqrt{x'}-\sqrt{x})\}$$

$$=\tfrac{1}{6}\sqrt{\frac{p}{2}}(\sqrt{x'}-\sqrt{x})\{2(x'+\sqrt{x'x}+x)+3p\}. \quad . \quad (1)$$

Chorda $(=k)$, quae puncta conjungit, datur aequatione

$$k^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2=(\sqrt{x'}-\sqrt{x})^2\{(\sqrt{x'}+\sqrt{x})^2+2p\}. \quad (2)$$

Radii vectores (r, r'), sectorem terminantes, sunt

$$r'=x'+\frac{p}{2}, \quad r=x+\frac{p}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

unde invenitur

$$p=r'+r-(x'+x), \quad x'-x=r'-r.$$

In (2) $r'+r-(x'+x)$ pro p substituto, habebimus

$$k^2=(\sqrt{x'}-\sqrt{x})^2\{(\sqrt{x'}+\sqrt{x})^2+2(r'+r)-2(x'+x)\},$$

vel, quia est

$$2(x'+x)-(\sqrt{x'}+\sqrt{x})^2=(\sqrt{x'}-\sqrt{x})^2,$$

$$k^2=(\sqrt{x'}-\sqrt{x})^2\{2(r'+r)-(\sqrt{x'}-\sqrt{x})^2\},$$

unde facillime invenimus

$$\sqrt{x'}-\sqrt{x}=\sqrt{r'+r\pm\sqrt{(r'+r)^2-k^2}}.$$

Quia est $\sqrt{x'}+\sqrt{x}>\sqrt{x'}-\sqrt{x}$, necesse est, sit

$$\frac{r'-r}{\sqrt{r'+r\pm\sqrt{(r'+r)^2-k^2}}}>\sqrt{r'+r\pm\sqrt{(r'+r)^2-k^2}},$$

quod nisi sumto signo inferiore fieri non potest. Itaque est

$$\sqrt{x'}-\sqrt{x}=\sqrt{r'+r-\sqrt{(r'+r)^2-k^2}}=\frac{\sqrt{r'+r+k}-\sqrt{r'+r-k}}{\sqrt{2}}.$$

Si pro $3p$ in (1) substituitur $3(r'+r)-3(x'+x)$, evadit

$$S=\tfrac{1}{6}\sqrt{\frac{p}{2}}(\sqrt{x'}-\sqrt{x})\{3(r'+r)-(\sqrt{x'}-\sqrt{x})^2\},$$

introductoque valore quantitatis $\sqrt{x'}-\sqrt{x}$:

$$S=\frac{\sqrt{p}}{12}(\sqrt{r'+r+k}-\sqrt{r'+r-k})\{2(r'+r)-\sqrt{r'+r+k}.\sqrt{r'+r-k}\}$$

vel, quia secundum formulam $\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ est

$$2(r'+r)-\sqrt{r'+r+k}.\sqrt{r'+r-k}=\frac{(r'+r+k)^{\frac{3}{2}}-(r'+r-k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{r'+r+k}-\sqrt{r'+r-k}},$$

$$S=\frac{\sqrt{p}}{12}\{(r'+r+k)^{\frac{3}{2}}-(r'+r-k)^{\frac{3}{2}}\}; \quad . \; . \; . \quad (4)$$

quae tamen formula non valet, nisi sunt y' et y positivae et $y'>y$ vel nisi est $r'>r$ et uterque supra axem abscissarum.

Quod si r' est supra axem et r infra, patet, esse y negativam et $=-\sqrt{2px}$. Itaque est

$$S=\tfrac{1}{6}\sqrt{\frac{p}{2}}(\sqrt{x'}+\sqrt{x})\{2(x'-\sqrt{x'x}+x)+3p\}$$

$$=\tfrac{1}{6}\sqrt{\frac{p}{2}}(\sqrt{x'}+\sqrt{x})\{3(r'+r)-(\sqrt{x'}+\sqrt{x})^2\}. \quad . \; . \quad (5)$$

Jam vero, quia est $y=-\sqrt{2px}$, evadit

$$k^2=(\sqrt{x'}+\sqrt{x})^2\{(\sqrt{x'}-\sqrt{x})^2+2p\}$$

vel substituendo $2(r'+r)-2(x'+x)$ pro $2p$:

$$k^2=(\sqrt{x'}+\sqrt{x})^2\{2(r'+r)-(\sqrt{x'}+\sqrt{x})^2\},$$

unde facillime invenitur

$$\sqrt{x'}+\sqrt{x}=\sqrt{r'+r\pm\sqrt{(r'+r)^2-k^2}},$$

ubi restat, ut dijudicemus, utrum signum eligendum sit, id quod nunc aliquanto difficilius est quam antea. Ope aequationis $x'-x=r'-r$ invenimus

$$\sqrt{x'}=\frac{2r'\pm\sqrt{(r'+r)^2-k^2}}{2\sqrt{r'+r\pm\sqrt{(r'+r)^2-k^2}}},\quad \sqrt{x}=\frac{2r\pm\sqrt{(r'+r)^2-k^2}}{2\sqrt{r'+r\pm\sqrt{(r'+r)^2-k^2}}}.$$

Fieri potest, ut sit $\frac{\sqrt{x'}}{r'}\gtreqless\frac{\sqrt{x}}{r}$, et signa ita sumenda sunt, ut huic conditioni satisfiat. Si igitur est $\frac{\sqrt{x'}}{r'}>\frac{\sqrt{x}}{r}$, necesse est, sit

$$\frac{2r'\pm\sqrt{(r'+r)^2-k^2}}{2r'\sqrt{r'+r\pm\sqrt{(r'+r)^2-k^2}}}>\frac{2r\pm\sqrt{(r'+r)^2-k^2}}{2r\sqrt{r'+r\pm\sqrt{(r'+r)^2-k^2}}}$$

vel

$$\pm r\sqrt{(r'+r)^2-k^2}>\pm r'\sqrt{(r'+r)^2-k^2}$$

vel

$$0>\pm(r'-r)\sqrt{(r'+r)^2-k^2}.$$

Itaque signum inferius aut superius eligendum est, prout erit $r'\gtrless r$. Contra faciendum est, si erit $\frac{\sqrt{x'}}{r'}<\frac{\sqrt{x}}{r}$. Si denique est $\frac{\sqrt{x'}}{r'}=\frac{\sqrt{x}}{r}$, patet, esse $r'+r=k$. Jam ut antea invenitur

$$S=\frac{\sqrt{p}}{12}\{(r'+r+k)^{\frac{3}{2}}\pm(r'+r-k)\}^{\frac{3}{2}}. \quad . \quad . \quad (6)$$

Signum inferius sumendum est

1) si r' et r ambo aut supra aut infra axem jacent;
2) si r' supra axem est et r infra, quum

$$r'\gtrless r,\quad \frac{\sqrt{x'}}{r'}\gtrless\frac{\sqrt{x}}{r};$$

signum superius eligendum est;

si r' supra axem, r infra jacet, quum

$$r' \gtrless r, \quad \frac{\sqrt{x'}}{r'} \lessgtr \frac{\sqrt{x}}{r}.$$

Omnia hac regula comprehenduntur: superius signum sumendum est, si, axi radiis vectoribus interjacente, angulus eorum a parte verticis parabolae 180° superat; sin minus signo inferiore utendum.

XXXIV.

Ueber den Werth von e^{a+bi}.

Von

Herrn Professor Doctor *J. Dienger*

am Polytechnikum in Karlsruhe.

Es ist mir nicht bekannt, ob die nachstehende Ermittelung jenes Werthes schon veröffentlicht wurde. Falls dies nicht geschehen sein sollte, mag sie hier mitgetheilt werden. Ich füge noch Betrachtungen über den Gränzwerth von $(1+\frac{1}{m})^m$ hinzu, die vielleicht nicht unerwünscht sind.

I.

Wenn in der (endlichen oder unendlichen) Reihe

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m^2}+\frac{c}{m^3}+\ldots. \tag{1}$$

$a, b, c, \ldots.$ endliche Zahlen sind, so kann man immer einen Werth

von m, gross genug, angeben so, dass das erste Glied seinem absoluten Werthe nach mehr beträgt, als alle übrigen Glieder zusammen.

Ist g der grösste der Koeffizienten $b, c, \ldots.$ (immer absolut genommen), so genügt hiezu, dass

$$\frac{a}{m} > g\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\ldots.\right), \quad \text{d. h. } a > g\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\ldots. \text{ in inf.}\right),$$

oder da jedenfalls $m > 1$:

$$a > g\frac{1}{m-1}, \quad m > 1+\frac{g}{a}.$$

Da diese Bedingung immer erfüllt werden kann, so ist unser Satz erwiesen.

Ist $a > 0$, so ist alsdann die Summe der Reihe (1) kleiner als $\frac{2a}{m}$, aber positiv; für $a < 0$ ist diese Summe negativ, aber $> \frac{2a}{m}$.

II.

Der binomische Satz giebt, wenn m positiv und ganz:

$$(1+\frac{1}{m})^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}(1-\frac{1}{m})+\frac{1}{1.2.3}(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{1}{1.2\ldots.n-1}(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\ldots.(1-\frac{n-2}{m})+\ldots. \quad (2)$$

Da alle Glieder positiv sind, so folgt hieraus (wenn $n < m$):

$$(1+\frac{1}{m})^m > 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}(1-\frac{1}{m})+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{1}{1.2\ldots.n-1}(1-\frac{1}{m})(1-\frac{n-2}{m}). \quad (3)$$

Die Grösse zweiter Seite giebt ausmultiplizirt:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots.+\frac{1}{1.2\ldots.n-1}-\frac{a}{m}+\frac{b}{m^2}+\ldots.,$$

wo a positiv ist. Nach I. ist es nun möglich, m gross genug zu wählen, dass diese Grösse mehr sei als

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots.+\frac{1}{1.2\ldots.n-1}-\frac{2a}{m},$$

so dass alsdann

$$(1+\frac{1}{m})^m > 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n-1}-\frac{2a}{m}. \quad (4)$$

Die nach dem letzten Gliede von (3) folgenden Glieder in (2) geben:

$$\frac{1}{1.2\ldots n}(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\ldots(1-\frac{n-1}{m})$$

$$\times[1+\frac{1}{n+1}(1-\frac{n}{m})+\frac{1}{(n+1)(n+2)}(1-\frac{n}{m})(1-\frac{n+1}{m})+\ldots],$$

welche Grösse jedenfalls kleiner ist als

$$\frac{1}{1.2\ldots n}[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots \text{ in inf.}],$$

d. h.

$$<\frac{1}{1.2\ldots n}[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots]$$

oder

$$<\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{n+1}{n}.$$

Demnach

$$(1+\frac{1}{m})^m < 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n-1}+\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{n+1}{n}. \quad (5)$$

Aus (4) und (5) folgt, dass

$$(1+\frac{1}{m})^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n-1}+s, \quad s>-\frac{2a}{m}, \quad <\frac{1}{1\ldots n}\frac{n+1}{n},$$

und mithin für $m=\infty$, wenn man $(1+\frac{1}{m})^m$ alsdann mit e bezeichnet:

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n-1}+R, \quad R>0, \quad <\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{n}{n+1}.$$

Dass damit die Berechnung von e gegeben ist, ist bekannt.

III.

Wie auch immer m gegen einen unendlichen Werthe wachse, so ist

$$\mathrm{Gr}(1+\frac{1}{m})^m = e,\quad \mathrm{Gr}(1+\frac{x}{m})^m = e^x, \tag{6}$$

wenn x einen reellen Werth hat. Den Beweis dieser zwei Sätze übergehe ich, da er allbekannt ist.

IV.

Es soll der Werth von $(1+\frac{a+bi}{m})^m$ für $m=\infty$ angegeben werden.

Man setze $1+\frac{a+bi}{m}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, so ist

$$r=[1+\frac{2a}{m}+\frac{a^2+b^2}{m^2}]^{\frac{1}{2}},\quad \cos\varphi=\frac{a+m}{mr},\quad \sin\varphi=\frac{b}{mr};$$

also (wenn m positiv und ganz):

$$(1+\frac{a+bi}{m})^m=[1+\frac{2a}{m}+\frac{a^2+b^2}{m^2}]^{\frac{m}{2}}(\cos m\varphi+i\sin m\varphi). \tag{7}$$

Nun ist, wenn $a^2+b^2=k^2$:

$$[1+\frac{2a}{m}+\frac{k^2}{m^2}]^m=[1+\frac{2a}{m}]^m[1+\frac{k^2}{m^2+2am}]^m;$$

ferner

$$[1+\frac{k^2}{m^2+2am}]^m$$

$$=1+\frac{1}{1}\frac{k^2}{m+2a}+\frac{1}{1.2}(1-\frac{1}{m})\left(\frac{k^2}{m+2a}\right)^2+\frac{1}{1.2.3}(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\left(\frac{k^2}{m+2a}\right)^3+\ldots$$

Ist nun $a>0$, so ist die zweite Seite

$$<1+\frac{1}{1}\frac{k^2}{m}+\frac{1}{1.2}\left(\frac{k^2}{m}\right)^2+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{k^2}{m}\right)^3+\ldots;$$

ist dagegen $a<0$, so kann man m immer gross genug annehmen, dass $m+2a$ beliebig gross und positiv, so dass $m+2a-\alpha$ noch positiv ist, und da

$$\frac{k}{m+2a}<\frac{k}{m+2a-\alpha},$$

so ist die zweite Seite kleiner als

$$1+\frac{1}{1}\frac{k^2}{m+2a-\alpha}+\frac{1}{1.2}\left(\frac{k^2}{m+2a-\alpha}\right)^2+\ldots$$

Da die zweite Seite immer >1 und $\frac{k^{2n}}{1.2....n}$ endlich ist, so ist nach I.:

$$(1+\frac{k^2}{m^2+2am})^m \begin{matrix} >1 \\ <1+\frac{2k^2}{m}, \end{matrix} \text{ wenn } a>0;$$

$$(1+\frac{k^2}{m^2+2am})^m \begin{matrix} >1 \\ <1+\frac{2k^2}{m+2a-\alpha} \end{matrix}, \text{ wenn } a<0.$$

Lässt man m unbegränzt wachsen, so werden $1+\frac{2k^2}{m}$ und $1+\frac{2k^2}{m+2a-\alpha}$ zu 1, so dass also

$$(1+\frac{k^2}{m^2+2am})^m=1 \text{ für } m=\infty.$$

Da alsdann nach III. $(1+\frac{2a}{m})^m=e^{2a}$, so ist für $m=\infty$:

$$[1+\frac{2a}{m}+\frac{a^2+b^2}{m^2}]^m=e^{2a}, \quad [1+\frac{2a}{m}+\frac{a^2+b^2}{m^2}]^{\frac{m}{2}}=e^a.$$

Ferner ist, wenn m gross und $b>0$, der Winkel φ positiv und klein. Daneben ist

$$\varphi \begin{matrix} >\sin\varphi \\ <\operatorname{tg}\varphi \end{matrix}, \text{ d. h. } \varphi \begin{matrix} >\frac{b}{mr} \\ <\frac{b}{m+a} \end{matrix}, \quad m\varphi \begin{matrix} >\frac{b}{r} \\ <\frac{b}{1+\frac{a}{m}} \end{matrix}.$$

Für $b<0$ ist $\varphi<0$ und

$$-\varphi \begin{matrix} >-\sin\varphi \\ <-\operatorname{tg}\varphi \end{matrix}, \text{ woraus wieder } -m\varphi \begin{matrix} >-\frac{b}{r} \\ <\frac{-b}{1+\frac{a}{m}} \end{matrix}.$$

Lässt man m wachsen, so nähert sich r der Einheit, also $\frac{b}{r}$ der Grösse b, der sich auch $\frac{b}{1+\frac{a}{m}}$ nähert, so dass für ein unendliches m: $m\varphi=b$. Die Gleichung (7) giebt also für $m=\infty$:

$$(1+\frac{a+bi}{m})^m = e^a(\cos b + i\sin b). \qquad (8)$$

Setzt man die erste Seite $=e^{a+bi}$, so hat man also zur Erklärung dieser Grösse:

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\sin b). \qquad (9)$$

Setzt man hier $a=0$, so ist:

$$e^{bi} = \cos b + i\sin b. \qquad (10)$$

Aus (9) und (10) folgt:

$$e^a e^{bi} = e^{a+bi},$$

so wie auch leicht zu erweisen ist, dass

$$e^{-(a+bi)} = \frac{1}{e^{a+bi}}, \quad e^{a+bi}e^{c+di} = e^{a+c+(b+d)i}, \quad \frac{e^{a+bi}}{e^{c+di}} = e^{a-c+(b-d)i}.$$

XXXV.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Auctore Dre. Christiano Fr. Lindman, Lect. Strengnesensi.

I. Uno latere $(=a)$ Δ^i rectilinei et angulo $(=A)$ opposito datis, ceteris autem lateribus augulisque variantibus, invenire locum geometricum

1) punctorum, ubi altitudines intersecantes conveniant

$$x^2 + (y + \frac{a}{2}\operatorname{Cot} A)^2 = \frac{a^2}{4\operatorname{Sin}^2 A};$$

2) centri circulorum inscriptorum

$$x^2 + (y + \frac{a}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A)^2 = \frac{a^2}{4\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}A};$$

3) centri gravitatis

$$x^2+(y-\frac{a}{6}\operatorname{Cot}A)^2=\frac{a^2}{36\operatorname{Sin}^2A}.$$

Nota. Latus a est axis abscissarum ejusque punctum medium origo coordinatarum orthogonalium *).

II. Invenire minimum conum rectum, quem circa sphaeram datam describere liceat.

III. Demonstrare formulam integralem

$$\int_0^{\operatorname{Arc}\operatorname{Sin}\frac{1}{k}}\frac{\psi d\psi}{\operatorname{Sin}\psi\sqrt{1-k^2\operatorname{Sin}^2\psi}}=\frac{\pi}{8}\,\mathrm{l}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2. \quad (k^2>1)$$

Cayley hat folgende Relation zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks gefunden:

$$\sin b\sin c+\cos b\cos c\cos A=\sin B\sin C-\cos B\cos C\cos a.$$

Wie lässt sich dieselbe beweisen? (Ich nehme diese Notiz aus einem Aufsatze von Airy in dem Philosophical Magazine.)

G.

Zwei Lehrsätze.

Von Herrn Dr. H. Siebeck, Director der Provinzial-Gewerbeschule zu Liegnitz.

Lehrsätze. I. Bewegt sich ein Punkt E (Taf. II. Fig. 14.) so auf einem Kreise, dessen Radius $=1$ ist, dass seine Geschwindigkeit stets gleich seiner Entfernung von einem beliebigen festen Punkte A der Ebene ist, der sich in der Entfernung k vom Mittelpunkte befindet, und ist u der Winkel, welchen der der Bewegung folgende Radius vector AE mit dem Radius OA bildet, so findet folgende Gleichung statt:

$$u=\operatorname{am}(t,k),$$

---

*) Aufgaben der vorstehenden Art scheinen mir sehr geeignet für Schüler und verdienen daher vermehrt zu werden. Herrn Lindman danke ich recht sehr für deren Mittheilung. G.

wenn t die Zeit ist, während welcher der Bogen BE zurückgelegt wird.

II. Zieht man einen zweiten Kreis von der Beschaffenheit, dass die Polaren von A in Bezug auf beide Kreise identisch sind, und sind L, F, G, H, u. s. w. Punkte des zuerst gegebenen Kreises von solcher Lage, dass die Verbindungslinien LF, FG, GH, u. s. w. den zweiten Kreis berühren, so werden unter Festhaltung der oben rücksichtlich der Bewegung gemachten Voraussetzung die Bogen LF, FG, GH etc. in gleichen Zeiten zurückgelegt.

XXXVI.

Miscellen.

Schreiben des Herrn Doctor Zinken, gen. Sommer, zu Braunschweig an den Herausgeber.

In Band 31. Heft 4. Seite 476. Ihres geschätzten Archives finde ich eine neue Construction der mittleren Proportionale von Gouzy aus den Nouvelles Annales de Mathématiques von Terquem, für welche Sie auch sogleich einen Beweis mittheilen. Ein solcher dürfte sich vielleicht noch anschaulicher mit Hülfe der Bemerkung liefern lassen, dass die dort in Frage kommenden Dreiecke AEB und CEA einander ähnlich sind, indem sie gleichschenklig sind und einen gemeinsamen, je an der Basis liegenden Winkel bei A haben. Aus dieser Aehnlichkeit folgt dann sogleich:

$$CA:AE=AE:AB.$$

q. e. d.

Druckfehler Theil XXXIII. Heft 1.

S. 124. Z. 26. statt $\theta \Delta x$ setze man $\theta \Delta Q$.

„ 135. „ 5. u. 2. v. u. statt q stelle man 9.

„ 162. „ 12. v. o. anstatt $\frac{1}{2}a$ stelle man $\frac{1}{2}h$.

Literarischer Bericht
CXXIX.

Mechanik.

Einleitung in die Mechanik. Zum Selbstunterricht mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens von H. B. Lübsen. I. Theil: Gleichgewicht (Statik) fester Körper. Mit 89 Figuren im Text. II., III. Theil: Gleichgewicht der tropfbar flüssigen und luftförmigen Körper. Mit 22 Figuren im Text. IV. Theil: Bewegung fester Körper. Mit 36 Figuren im Text. Hamburg. O. Meissner. 1858.

Dieses Büchlein enthält nach unserer Meinung eine recht gute und sehr deutliche Darstellung der Grundlehren der Statik und Mechanik fester und flüssiger Körper, mit Zugrundelegung bloss derjenigen mathematischen Vorkenntnisse, welche jetzt in jeder guten Schule gelehrt werden, also ganz ohne Voraussetzung der sogenannten höheren Analysis, selbst nur mit Anwendung einiger ganz einfachen trigonometrischen Formeln in der eigentlichen Bewegungslehre bei der Lehre von der Wurfbewegung, wo dieselben natürlich gar nicht zu entbehren waren, überall mit besonderer Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. In der Statik nimmt der Herr Verfasser seinen Auslauf von dem Parallelogramm der Kräfte, welches er, ganz zweckmässig in einem solchen Buche, in bekannter Weise auf Principien zurückführt, die nicht rein statisch sind, sondern schon den Begriff der Bewegung und Geschwindigkeit in Anspruch nehmen; er giebt aber späterhin auch noch einen rein statischen Beweis, ungefähr so wie Poinsot, im siebenten Buche unter den Ergänzungen zum ersten Buche. Der Lehre vom Schwerpunkte, von der Stabilität, der Reibung und den

einfachen und zusammengesetzten Maschinen ist die gebührende Berücksichtigung, so weit alle diese Dinge in ein solches Buch gehören, zu Theil geworden, und eine Reihe von Uebungsaufgaben ist der Statik beigegeben. In der Hydrostatik sind die sämmtlichen Grundgesetze, auch das Gesetz des Drucks auf die Seitenwände, was sonst oft in ähnlichen Büchern fehlt, in einfacher Weise gehörig mathematisch begründet worden, was in gleicher Weise von der Aerostatik gilt, wo auch die verschiedenen, im gemeinen Leben am häufigsten vorkommenden, auf dem Luftdrucke beruhenden Maschinen deutlich erklärt und die wesentlichen Umstände, auf die es bei deren zweckmässiger Anlegung in der Praxis ankommt, erörtert worden sind. Zweckmässig gewählte Aufgaben sind auch hier überall eingereihet worden. Den verschiedenen Methoden, das specifische Gewicht zu bestimmen, mit Rücksicht auf die verschiedenen dabei in Betracht kommenden Correctionen, hätten wir eine etwas eingehendere Erörterung gewünscht, wenn auch dieser Gegenstand mehr dem Gebiete der Physik als der eigentlichen Mechanik anheimfällt. Die eigentliche Bewegungslehre für feste Körper enthält ebenfalls die gewöhnlichen Lehren in sehr fasslicher Darstellung mit steter Rücksicht auf praktische Anwendung. Ob noch ein der Hydraulik gewidmeter Theil folgen wird, ist aus den bis jetzt vorliegenden Theilen nicht ersichtlich; wir wünschen es aber.

Besonders erkennen wir bei diesem Büchlein an, dass nur so viel in demselben gegeben worden ist, als sich mit den vorausgesetzten geringen mathematischen Hülfsmitteln mit vollständiger Deutlichkeit begründen und zum Verständniss bringen liess. Oft ist uns bei Büchern dieser Art, namentlich auch solchen, die einem praktischen Bedürfnisse in der Maschinenlehre in elementarer Weise entsprechen sollen, das Bestreben entgegengetreten, auf allgemeinere mechanische Gesetze von einer höheren Natur zurückzugehen und deren Anwendung in der Maschinenlehre zu zeigen. Ein solches Bestreben halten wir für verfehlt. Denn einmal zeigen die Verfasser solcher Bücher oft nur zu deutlich, dass ihnen selbst kein ganz vollständiges Verständniss dieser Gesetze zur Seite steht, und anderntheils gehen dieselben meistens über den Gesichtskreis des Publikums, welches solche Bücher im Auge haben, hinaus und führen daher nur zu leicht Missverständnisse herbei. Dies hat der Herr Verfasser des vorliegenden Büchleins, wie schon gesagt, mit sehr richtigem Takte dadurch vermieden, dass er nicht weiter zu gehen gestrebt hat, als die vorausgesetzten mathematischen Grundlehren nur eben gestatteten. Dies loben wir neben seinen übrigen oben schon hervorgehobenen

Vorzügen noch besonders an diesem Elementarbuche und empfehlen es auch deshalb vor vielen anderen Büchern einer ähnlichen Tendenz allen denen recht sehr, die sich für die gewöhnlichen Geschäfte des praktischen Lebens, welche von den bewegenden Naturkräften Gebrauch machen, eine hinreichende Kenntniss der Grundlehren der Mechanik verschaffen wollen. In keiner anderen mathematischen Wissenschaft sind durch unklare, der gehörigen Begründung entbehrende Vorstellungen herbeigeführte Missverständnisse leichter möglich wie in der Mechanik, nirgends führen dieselben leichter zu falschen und verfehlten Anwendungen. Das vorliegende Büchlein wird dazu wenigstens keine Veranlassung geben, was wir nochmals als einen besonderen Vorzug desselben erkennen. Wer weiter in der Mechanik gehen will, muss sich vorerst weiter in der sogenannten reinen Mathematik umsehen, wozu es Hülfsmittel genug giebt; das ist nun einmal bei einem solchen Bestreben unerlässlich.

Astronomie.

Physische Zusammenkunft der Planeten 1 bis 42*) während der nächsten Jahre. Von Karl v. Littrow, wirklichem Mitgliede der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mit zwei Tafeln. (Aus dem XVI. Bande der Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften besonders abgedruckt). Wien. 1859. 4.

Eine vorläufige kurze Anzeige dieser wichtigen Arbeit ist schon im Archiv. Thl. XXXII. Heft 3. S. 357. aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie von uns geliefert worden, und wir freuen uns sehr, jetzt das Erscheinen der wirklichen Abhandlung anzeigen zu können. Worauf es bei der betreffenden Aufgabe ankommt und was dieselbe erstrebt, kann im Allgemeinen als hinreichend bekannt angenommen werden. Eben so ist die Methode, deren sich Herr v. Littrow bei den hier zur Sprache kommenden Ermittelungen bedient hat, aus seinen früheren hierher gehörenden verdienstlichen Arbeiten bekannt. Dieselbe verbindet in sehr zweckmässiger Weise Zeichnung und Rechnung mit einander, und ist in der vorliegenden Abhandlung von Neuem

---

*) Diese Zahlen sind in Kreise einzuschliessen.

in der Kürze wieder aus einander gesetzt worden. Welchen Aufwand von Zeit und Mühe aber bei aller Zweckmässigkeit der Methode Untersuchungen dieser Art erfordern, und wie sehr die Wissenschaft Herrn v. Littrow zu Dank verpflichtet ist, dass er sich derselben unterzogen hat, kann nur der richtig beurtheilen, wer sich selbst schon mit solchen Arbeiten beschäftigte. Alles ist in der Abhandlung mitgetheilt worden, was in theoretischer und praktischer Rücksicht nöthig ist, um zu einer vollständig deutlichen Einsicht in die ganze mühevolle Arbeit zu gelangen, so dass in dieser Beziehung gar nichts zu wünschen übrig geblieben ist. Ebenso sind die gewonnenen Resultate mit der grössten nichts zu wünschen übrig lassenden Vollständigkeit und Genauigkeit mitgetheilt worden. Es fanden sich zwischen den betrachteten 42 Asteroiden 549 Bahnnähen unter 0,1 (der halben grossen Erdbahnaxe) gegenseitiger Entfernung, und darunter 157 von besonderer Enge. Die grosse Anzahl von Bahnnähen überhaupt, etwa zwei Drittheile der 861 Paare, welche im Ganzen durchzusehen waren, darf bei dem weiten Sinne, der dem Worte „Bahnnähen" hier gegeben wurde, nicht überraschen. Mit dem vorliegenden Material liess sich eine weitere Frage von Interesse, nämlich ob irgend besondere Anhäufungen von Bahnnähen an gewissen Punkten des Weltsystems sattfinden, leicht beantworten. Um in dieser Beziehung einen Ueberblick zu gewinnen, wurden sämmtliche Bahnnähen nach ihren Längen, projicirten Radien-Vectoren und Lothen auf ein Blatt gezeichnet, wie aus Taf. II. ersichtlich ist. Der Ueberblick dieser Zusammenstellung lehrte, dass keine besondere Anordnung sich geltend macht, man im Gegentheile zu der Annahme berechtigt ist, dass bei zunehmender Zahl von Asteroiden die jetzt schon nahezu vorhandene Gleichförmigkeit der Vertheilung sich immer mehr einstellen werde. Für 1858 bis 1867 hat Herr v. Littrow folgende Zusammenkünfte gefunden:

Euterpe-Lutetia	1858	Mitte October.
Bellona-Metis	1858	„ November.
Polyhymnia-Vesta . . .	1858	„ „
Massalia-Psyche . . .	1859	Ende October.
Eunomia-Metis	1860	„ Jänner.
Eunomia-Irene	1860	Anfangs März.
Irene-Metis	1860	Mitte März.
Hebe-Parthenope . . .	1860	Ende November.
Fides-Vesta	1861	Anfangs März.
Metis-Polyhymnia . . .	1863	Ende April.

Euterpe-Polyhymnia .	1864 Mitte Juni.
Hebe-Parthenope . . .	1864 „ September.
Melpomene-Parthenope	1864 Ende November.
Iris-Pomona	1865 Mitte October.
Fides-Fortuna	1866 Ende Jänner.
Calliope-Egeria . . .	1866 Mitte October.
Flora-Melpomene . .	1867 „ Februar.
Euterpe-Proserpina . .	1867 Ende April.
Pomona-Vesta . . .	1867 „ November.

Herr v. Littrow hatte seine Arbeit, bei welcher die Herren Hornstein und Oeltzen die erspriesslichste Hülfe leisteten, ganz beendigt und war eben mit der Zusammenstellung der Resultate beschäftigt, als er von einer ähnlichen Arbeit des Herrn Karl Linser in Sonneberg bei Coburg Nachricht erhielt. Die von demselben angewandte Methode, die nur auf Rechnung beruhet, wird nebst den erhaltenen Resultaten von Herrn v. Littrow mitgetheilt und die befriedigende Uebereinstimmung beider Arbeiten nachgewiesen. Dadurch wird die vorliegende interessante und wichtige Abhandlung zugleich zu einem Repertorium alles dessen, was bis jetzt namentlich in praktischer Rücksicht mit Erfolg auf diesem Felde gearbeitet worden ist.

Wir müssen uns leider begnügen, durch die vorhergehende kurze Anzeige auf die in wissenschaftlicher Rücksicht grosse Wichtigkeit der vorliegenden Abhandlung, die jedenfalls zu den bedeutendsten neueren Erscheinungen auf astronomischem Gebiete gehört, und das grosse Interesse, welches dieselbe in so vielen Beziehungen darbietet, im Allgemeinen hingewiesen und unseren Lesern zur sorgfältigsten Beachtung empfohlen zu haben, und können zum Schluss dem geehrten Herrn Verfasser zu deren Vollendung nur noch aufrichtig Glück wünschen.

In dem Jahrgange 1859 des immer viel Lehrreiches enthaltenden Kalenders für alle Stände, welchen Herr von Littrow herausgiebt, befindet sich:

1. Eine ungemein vollständige, auf die neuesten Bestimmungen gegründete Uebersicht des Sonnensystems, in welcher auch das Historische in sehr lehrreicher Weise ausführlich mitgetheilt ist.

2. Ein Aufsatz über den Einfluss des Vorrückens der Nachtgleichen auf die Stellung der Gestirne,

welchen wir namentlich auch wegen der ihm angehängten eilf Tafeln Liebhabern der Astronomie recht sehr empfehlen. Taf. I. bis Taf. X. enthalten den Hundertjährigen Betrag des Vorrückens der Nachtgleichen in gerader Aufsteigung; und Taf. XI. giebt den Hundertjährigen Betrag des Vorrückens der Nachtgleichen in Abweichung.

3. Die Fortsetzung der im Jahrgange 1858. S. 111. angefangenen Geschichte der beobachtenden Astronomie, vorzüglich betreffend die Erfindung des Mikrometers, die Verbindung des Fernrohrs mit winkelmessenden Instrumenten und die grossen Verdienste, welche der berühmte dänische Astronom Olaus Römer, ausser auf anderen astronomischen Gebieten, sich hauptsächlich durch die Einführung des Passagen-Instruments in die beobachtende Astronomie erworben hat.

Wir wünschen sehr, dass Herr von Littrow diese nicht bloss für Laien lehrreiche Geschichte der beobachtenden Astronomie in den folgenden Jahrgängen seines Kalenders weiter führen möge, und sind im Allgemeinen überzeugt, dass dieser Kalender in sehr erspriesslicher Weise zur Verbreitung astronomischer Kenntnisse unter einem grösseren Publikum mitzuwirken geeignet ist.

Andere, von der Wiener Sternwarte ausgegangene verdienstliche neuere Arbeiten sind die folgenden Bahnberechnungen einiger Planeten und Cometen:

Ueber die Bahn der Eugenia. Von M. Löwy. Wien. 1858. 8.

Ueber die Bahn des Cometen V 1858. Von Demselben. Wien. 1858. 8.

Elemente der Bahn des von Bruhns am 21. Mai 1858 in Berlin entdeckten Cometen. Von Demselben.

Ueber die Bahn des Cometen Donati. Von Demselben. Wien. 1859. 8.

Natürlich müssen wir uns hier mit der blossen Titel-Anzeige solcher vorzugsweise nur calculatorischen Arbeiten begnügen, wodurch aber deren Verdienstlichkeit durchaus kein Eintrag gethan werden kann und soll.

Vergleichung des „Catalogus generalis pro 1830" in Struve's Stellarum fixarum imprimis duplicium et mul-

tiplicium positiones mediae. Petropoli 1852." mit den beiden Katalogen aus Bessel's Zonen-Beobachtungen. Von Dr. Max. Weisse, Director der Sternwarte zu Krakau. Wien 1858. 8.

Herr Director Weisse, der sich durch die Bearbeitung der beiden aus Bessel's Zonenbeobachtungen abgeleiteten Sterncataloge, von denen auch der zweite, an welchem rasch gedruckt wird, bald in den Händen der Astronomen sein wird, so grosse Verdienste erworben hat, liefert in dieser aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie der Wissenschaften, Band XXXII. Jahrgang 1858. besonders abgedruckten Abhandlung eine Vergleichung von Struve's „Positiones mediae" mit seinen beiden Catalogen, für welche ihm die Astronomen gleichfalls zu besonderem Danke verpflichtet sein werden.

Nautik.

Ueber die Berechnung des Widerstandes der Dampfschiffe. Von Dr. Eckhardt, Grossherzoglichem Geheimerath in Darmstadt. (Aus dem englischen Journal „Artizan" März und April 1858, in's Deutsche übertragen und mitgetheilt von dem Verfasser). Extra-Abdruck aus der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins für das Königreich Hannover. 4°.

Wir glauben auf diese Abhandlung aufmerksam machen zu müssen. Der Herr Verfasser unterscheidet in derselben den mittleren Schiffstheil, das Vordertheil und das Hintertheil, und berechnet, immer ein an seinen Enden mit zwei Prismen versehenes Parallelepiped betrachtend, gestützt auf die im Archiv. Thl. XXV. S. 116. entwickelte, an die Versuche der französischen Mathematiker angeschlossene Formel, auf S. 8. seiner Abhandlung eine Tafel für den Widerstand des Wassers am Vorschiff und Achterschiff, welche als das Haupt-Resultat dieser Abhandlung zu betrachten ist, indem er zugleich die Anwendung derselben durch ein interessantes Beispiel erläutert, welchem die Dimensionen des Great Eastern oder Leviathan zu Grunde gelegt worden sind. Für dieses Beispiel ist der Widerstand des Vordertheils 943,353 Pfund und der Rückstoss des Hintertheils 390,598 Pfund; also der verminderte Widerstand des ganzen Schiffs 552,955 Pfund. In lehrreicher Weise beschäftigt

der Herr Verfasser sich auch noch mit der Lösung der Aufgabe: „Wenn zwei Prismen von gleicher Basis zusammengefügt werden, deren Längen veränderlich sind, aber, zusammen addirt, eine constante Summe geben, dasjenige Verhältniss der Längen zu finden, für welches die Widerstandsverminderung, welche durch das vereinigte Vorder- und Hintertheil hervorgebracht wird, ein Maximum oder der Widerstand selbst ein Minimum wird" und schliesst mit einigen besonderen Betrachtungen über die Dampfschiffe. Wir glauben, dass diese wenigen Bemerkungen, mit denen wir uns an diesem Orte begnügen müssen, hinreichend sein werden, um auf die Wichtigkeit der vorliegenden Abhandlung für die weitere Entwickelung des in ihr behandelten Gegenstandes aufmerksam zu machen. G.

Vermischte Schriften.

Jahresbericht für die Mitglieder der hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse. Fastnacht 1859. 4.

Wir haben schon mehrmals die Freude gehabt, in unseren literarischen Berichten auf das so sehr verdienstliche Wirken der genannten, im Jahre 1690 von zwei achtungswerthen Männern und Lehrern in Hamburg, deren Namen noch jetzt in dankbarer Erinnerung fortleben:

Heinrich Meissner, Director der St. Jacobi-Schule (gest. 1716) und

Valentin Heins, Director der Schule zu St. Michaelis (gest. 1704)

ursprünglich unter dem Namen der

Die Kunst-Rechnung lieb- und übenden Societät

gestifteten Gesellschaft, welcher auch der Herausgeber des Archivs als Ehrenmitglied anzugehören sich zur ganz besonderen Ehre rechnet, hinzuweisen, und sehen aus diesem neuen Jahresberichte, dessen Inhalt wir im Folgenden angeben werden, dass das Wirken der Gesellschaft im 169sten Jahre ihres Bestehens an Ausbreitung und Bedeutung nur gewonnen hat.

Seit 1853, wo der letzte Jahresbericht erstattet wurde, hat die Gesellschaft zehn Mitglieder durch den Tod verloren, von denen wir neben anderen verdienten Namen nur Gauss, Crelle, A. C. Petersen nennen wollen; vierzehn neue Mitglieder, fast

nur einheimische oder in den benachbarten Städten Altona, Lübeck, Cuxhaven ansässige, sind in dem Zeitraume von 1853—1859 aufgenommen worden. Werthvolle Geschenke sind der Gesellschaft von mehreren Seiten zugegangen.

Der vorliegende Jahresbericht enthält mehrere schätzenswerthe Aufsätze, die wir im Folgenden namhaft machen.

1. Versuch, angestellt zur Bestimmung des Ausfluss-Coefficienten für neben einander liegende Schützenöffnungen und Ausfluss unter Wasser. Von Herrn Ingenieur **F. H. Reitz** in Hamburg.

2. **Aufgabe:** Ein Faden ist mit einem Ende befestigt, das andere Ende ist über eine lose und darauf über eine feste Rolle geführt; welche Curve wird bei'm Aufziehen des Fadens über die feste Rolle die mit einem Gewichte belastete lose Rolle beschreiben? Von Herrn Wasserbau-Inspector **J. Dalmann** in Hamburg, jetzigem Jahrverwalter.

3. **Aufgabe:** Es sind ein Seil, dessen Länge l ist, und zwei in einer horizontalen Linie liegende Punkte gegeben. An dem einen Punkte A wird das Seil fest gedacht, läuft von A über eine mit dem Gewichte P belastete Rolle C, geht von C über B und kehrt von B zur losen Rolle C zurück, wo es befestigt wird; es soll der Punkt gefunden werden, an welchem die Rolle im Falle des Gleichgewichts sich befindet. Von **Demselben.**

4. Jedermann kennt die einfache geometrische Lösung der Aufgabe: Wenn eine gerade Linie und zwei Punkte gegeben sind, in dieser geraden Linie einen Punkt so zu bestimmen, dass die Summe seiner Entfernungen von den beiden gegebenen Punkten ein Minimum werde. Herr C. W. Plath beschäftigt sich nun mit der Lösung der folgenden Aufgabe:

Wenn eine Gerade und drei Punkte gegeben sind: in der Geraden einen Punkt so zu bestimmen, dass die Summe seiner Entfernungen von den drei gegebenen Punkten ein Minimum werde.

Legt man den Anfang der rechtwinkligen Coordinaten in die gegebene Gerade als Axe der x dahin, wo dieselbe von der auf sie von dem einen der drei gegebenen Punkte gefällten Senkrechten getroffen wird, und bezeichnet demzufolge die Coordinaten

der drei gegebenen Punkte durch 0, a; b, c; d, e; die Abscisse des gesuchten Punktes durch x; so liefert die Differentialrechnung zur Bestimmung von x leicht die Gleichung:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}-\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+e^2}}=0,$$

welche Herr Plath rational gemacht hat, wodurch er zu einer sehr weitläufigen Gleichung des zwölften Grades, deren Entwickelung ihm gewiss nicht geringe Mühe gemacht hat, gelangt ist. Auch hat er sich die Mühe nicht verdriessen lassen, diese Gleichung auf ein numerisches Beispiel anzuwenden. Halten wir diese Entwickelung schon an sich für verdienstlich*), so glauben wir vom Standpunkte unseres Journals aus alle Herausgeber von Sammlungen allgebraischer Aufgaben auf diesen Aufsatz des Herrn Plath schon deshalb aufmerksam machen zu müssen, weil dieselben wohl schwerlich anderwärts ein besseres vollständig ausgerechnetes Beispiel für das Rationalmachen der Gleichungen finden dürften, welches zugleich geeigneter wäre, die grosse Weitläufigkeit, in welche diese Operation meistens führt, nachzuweisen.

Möge die Hamburgische Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse die Wissenschaft noch oft mit gleich verdienstlichen Mittheilungen erfreuen, und, was wir besonders wünschen, die vorwiegend praktische Tendenz ihres Wirkens, wie bisher, auch fernerhin stets festhalten, was am besten geeignet sein wird, der ungemein grossen Wichtigkeit strenger mathematischer Theorien, neben ihrem grossen intellectuellen Werthe an sich, für alle Gebiete praktischer Anwendung im weitesten Sinne immer mehr Geltung und Anerkennung zu verschaffen.

---

*) Die rein geometrische Lösung der betreffenden Aufgabe möchte eines Versuchs nicht unwerth sein.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXIX.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

K. Breymann, Lehrbuch der reinen Elementarmathematik für angehende Forstleute überhaupt und zum Gebrauche als Leitfaden bei den Vorträgen über Mathematik in forstl. Lehranstalten. I. Thl.: Arithmetik und Algebra. gr. 8°. geh. Wien. 1½ Thlr.

F. G. Mehler, Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien und Realschulen. gr. 8°. geh. Berlin. 12½ Ngr.

Arithmetik.

K. H. M. Aschenborn, Lehrbuch der Arithmetik mit Einschluss der Algebra und niederen Analysis. Zum Gebrauch bei den Vorträgen an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und zum Selbstunterrichte. gr. 8°. geh. Berlin. 1½ Thlr.

F. A. v. Heidenreich, Die Elemente der reinen Arithmetik. I. Cursus. 8°. geh. Leipzig. 10 Ngr.

— — Dasselbe II. Cursus. 8°. geh. Ebendas. 12 Ngr.

A. Löffler, Ueber die Methode, die grössten und kleinsten Werthe unbestimmter Integralformeln zu finden. Lex.-8°. geh. Wien. 8 Ngr.

J. Petzval, Integration der linearen Differentialgleichungen mit constanten und veränderlichen Coefficienten. 6. Lief. gr. 4°. geh. Wien. 2⅔ Thlr.

M. Rühlmann, Logarithmisch-trigonometrische und andere für Rechner nützliche Tafeln. Zunächst für Schüler technischer Bildungsanstalten, sowie für praktische Rechner überhaupt. 6. Ster.-Ausg. 16°. geh. ⅔ Thlr.

M. Sadebeck, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Gymnasien und Realschulen. gr. 8°. geh. Breslau. 16 Ngr.

H. Scheffler, Die Auflösung der algebraischen und transzendenten Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten, in reellen und complexen Zahlen nach neuen und zur praktischen Anwendung geeigneten Methoden. gr. 8°. geh. Braunschweig. 24 Ngr.

H. Schwarz, Grundzüge einer Elementar-Arithmetik. Ein Lehrbuch für Gymnasien und höhere Bürgerschulen. 2. Abth. gr. 8°. geh. Hagen. 1 Thlr.

G. W. Strauch, Anwendung des sogenannten Variationscalculs auf zweifache und dreifache Integrale. gr. 4°. geh. Wien. 2⅔ Thlr.

Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques; par Briot et Bouquet. Paris. 8°. 2 Thlr.

G. v. Vega, Logarithmisch-trigonometr. Handbuch. 43. Aufl. Bearbeitet von C. Bremiker. gr. 8°. geh. Berlin. 1¼ Thlr.

A. Wiegand, Lehrbuch der Mathematik für den Schul- und Privatunterricht bearbeitet. Allgemeine Arithmetik. 4. Aufl. gr. 8°. geh. Halle. 12½ Ngr.

Geometrie.

Jos. Balogh, De quadratura circuli, secundum legem intersectionis dupli; et de polygonis regularibus. Pest. 8°. Mit 8 Steintaf. 2 Thlr. 20 Ngr.

F. W. Becker, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. I. Thl.: Planimetrie. 2. Abtheil. gr. 8°. geh. Oppenheim a. R. 16 Ngr.

F. A. v. Heidenreich, Elemente der niedern Geometrie. I. Cursus. 8°. geh. Leipzig. 12 Ngr.

J. J. J. von Hoffmann, Das eilfte Axiom der Elemente des Euklides, neu bewiesen mit erläuternden und erweiternden Bemerkungen versehen. gr. 8°. geh. Halle. ⅓ Thlr.

Praktische Mechanik.

Mahistre, Cours de mécanique appliquée. Paris. 8°. 2⅔ Thlr.

Optik.

Die gebräuchlichen mikrometrischen Maasse in Decimalbrüchen und in gemeinen Brüchen. gr. 8°. geh. Braunschweig. ⅓ Thlr.

Astronomie.

Astronomische Beobachtungen auf der königl. Universitäts-Sternwarte zu Königsberg. 32. Abth. Fol. Königsberg. 2⅔ Thlr.

M. Löwy, Ueber die Bahn des Cometen V 1858. Lex.-8°. geh. Wien. 2 Ngr.

E. Sander, Handbuch der mathematischen Erdkunde, ein Buch für Schule und Haus. gr. 8°. geh. Wien. 2⅔ Thlr.

H. Schröder, Die Elemente des Cometen VI 1857 berechnet. 4°. geh. Tübingen. 4 Ngr.

Nautik.

M. F. Maury, Explanations and Sailing Directions to accompany the Wind and Current Charts, approved by Cpt. D. N. Ingraham, and published by Authority of Hon. Isaac Toucey, Secretary of the Navy. Vol. I. Eighth edition, enlarged and improved. Washington. 4°. Mit Abbildungen und Karten.

Physik.

Corréspondance météorologique. Publication annuelle de l'administration des mines de Russie, rédigée par A. T. Kupffer. Années 1855 et 1856. St. Pétersbourg. (Leipzig, Voss.) 4°. Mit 4 Steintaf. 5 Thlr. [Bilden Nr. 2 der „Annales de l'observatoire physique central de Russie. Années 1854 et 1855."]

F. C. J. Crüger, Grundzüge der Physik mit Rücksicht auf Chemie, als Leitfaden für die mittlere physikalische Stufe methodisch bearbeitet. 6. Aufl. gr. 8°. geh. Erfurt. ½ Thlr.

Mch. Faraday, Experimental Researches in Chemistry and Physics. Reprinted from the „Philosophical Transactions" of 1821—1857, the „Journal of the Royal Institution", the „Philosophical Magazine", and other publications. London. 8°. 6 Thlr.

J. Gavarret, Lehrbuch der Electricität. Deutsch bearbeitet von R. Arendt. 2. Lief. 8°. geh. Leipzig. 1 Thlr.

J. Grailich, Ueber symmetrische Functionen, welche zur Darstellung gewisser physikalischer Verhältnisse krystallisirter Körper dienen können. Lex.-8°. geh. Wien. 6 Ngr.

K. W. Knochenhauer, Ueber den Strom der Nebenbatterie. Lex.-8°. geh. Wien. 3 Ngr.

V. von Lang, Einige Bemerkungen zu Herrn Dr. J. Stefan's Abhandlung: Ueber die Transversalschwingungen des elastischen Stabes. Lex.-8°. geh. Wien. 2 Ngr.

V. von Lang, Die Aenderung der Krystallaxen des Aragonites durch die Wärme, gerechnet aus Rudberg's Beobachtungen. Lex.-8°. geh. Wien. 3 Ngr.

A. Murmann und L. Rotter, Untersuchungen über die physikalischen Verhältnisse krystallisirter Körper. Lex.-8°. geh. Wien. ⅔ Thlr.

Reitlinger, Ueber flüssige Isolatoren der Electricität. Lex.-8°. geh. Wien. 4 Ngr.

A. und E. **Weiss**, Untersuchungen über den Zusammenhang in den Aenderungen der Dichten und Brechungs-Exponenten in Gemengen von Flüssigkeiten. Lex.-8°. geh. Wien. ½ Thlr.

H. **Westberg**, Grundzüge der Physik für Kreisschulen des Dorpatschen Lehrbezirks. 2. Aufl. gr. 8°. cart. Reval. ⅔ Thlr.

Vermischte Schriften.

Bulletin de la Classe physico-mathématique de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. Tome XVI. St.-Pétersbourg. (Leipzig, Voss.) 4°. Mit 5 Taf. 3 Thlr.

Inhalt: Mémoires. — **Werner**, Einige neue Theoreme von den Polygonen und daraus hervorgehende arithmetische und goniometrische Sätze. — Elegante Ableitung der Formeln für den sphärischen Excess. — **Mention**, Sur le cercle focal des sections coniques. — **Jacobi**, Sur la nécessité d'exprimer la force des courants électriques et la résistance des circuits en unités unanimement et généralement adoptées. — **Struve**, Sur la nébulaise d'Orion. — **Tchébychef**, Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions. — **Lenz**, Ueber den Einfluss der Geschwindigkeit des Drehens auf den durch magnetoelectrische Maschinen erzeugten Inductionsstrom. 3. Abth. Mit 5 Taf. — **Tchébychef**, Sur l'interpolation des valeurs fournies par les observations.

Denkschriften der k. k. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 16. Bd. gr. 4°. cart. Wien. 8⅔ Thlr.

Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Jahrg. 1859. No. 1—5. Lex.-8°. geh. Wien. Preis für den vollst. Jahrg. 16 Thlr.

Berichte über die königl. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Classe. 1858. 2. und 3. Hft. gr. 8°. Leipzig. ⅔ Thlr.

Literarischer Bericht
CXXX.

Durch Mittheilung eines Necrologs des zum grossen Schaden der Wissenschaft derselben so früh entrissenen Professors

Lejeune-Dirichlet

in Göttingen würde mich der Einsender zu ganz besonderem Danke verpflichten. Grunert.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Eine Arabeske aus dem Jugendleben berühmter Naturforscher. Von Professor Doctor H. Emsmann in Stettin. (Pädagogisches Archiv 1859. Band I. Nr. 7, S. 545—570.)

Wir halten es für unsere Pflicht, unsere Leser auf diesen in mehrfacher Rücksicht interessanten Aufsatz aufmerksam zu machen, der ihnen jedenfalls eine angenehme Lectüre gewähren wird, wobei wir noch besonders bemerken, dass hauptsächlich die mathematischen Naturforscher: Gauss, Ampère, Thomas Young, Clairaut, Sauveur, Fresnel, Carnot, Monge, Huyghens, Gassendi, Fourier, Pascal, vor Allem Newton, Kepler und viele andere; auch die mathematischen Frauen: Hypatia, Maria Gätana Agnesi, Laura Maria Catharina Bassi, Madame Lepaute (die Gehülfin Lalande's), Hevel's Gattin, Herschel's Schwester, Mademoiselle Sophie Germain und andere Beachtung gefunden haben. Möge Herr Emsmann weitere Früchte auf diesem Gebiete der Geschichte der Mathematik und Physik sammeln und sie dem Publikum mittheilen!

Arithmetik.

Erklärung.

Nachdem ich vom Herrn Regierungsrath von **Ettingshausen** zu Wien benachrichtigt bin, dass Herr Professor **Spitzer** daselbst sich darüber beschwere, dass ich in meiner vor Kurzem erschienenen Schrift über die Auflösung der Gleichungen seiner früheren Arbeiten über diesen Gegenstand, welche in einigen, der k. k. Akademie der Wissenschaften überreichten Abhandlungen, insbesondere aber in der Schrift über die **allgemeine Auflösung der Zahlengleichungen** vom Jahre 1851 niedergelegt seien, nicht erwähne, obgleich ihm doch für gewisse Operationen das Prioritätsrecht der Erfindung gebühre; so beeile ich mich, hierauf folgende Erklärung abzugeben.

Die fraglichen Arbeiten des Herrn Professors **Spitzer** waren mir nicht bloss ihrem Inhalte nach völlig unbekannt; ich hatte auch nicht einmal Kenntniss von ihrer Existenz überhaupt. Ob diess mehr durch eine unvollkommene buchhändlerische Verbreitung jener Schriften oder durch eine ephemere Besprechung in den Journalen oder durch die allgemeine Ablenkung der Aufmerksamkeit in jenen politisch bewegten Zeiten veranlasst ist, muss ich dahin gestellt sein lassen, und kann nur bedauern, dass es unter solchen Umständen für mich eine Unmöglichkeit war, die Verdienste des Herrn Professors **Spitzer** hervorzuheben.

Was die Sache selbst betrifft, so überzeuge ich mich durch die mir jetzt vorliegende oben erwähnte Schrift, dass in Beziehung auf die Verallgemeinerung der **Horner**'schen Methode behufs Berechnung der komplexen Wurzeln einer Gleichung mit einer Unbekannten und der Wurzeln eines Systems von Gleichungen mit mehreren Unbekannten dem Herrn Professor **Spitzer** die Priorität gebührt. Ob nun die Unbekanntschaft mit den Untersuchungen des gedachten Herrn hinsichtlich derjenigen Partien meiner Schrift, welche mit jenen Untersuchungen in den Grundgedanken kongruiren, für die Wissenschaft insofern von Nutzen gewesen sei, als zwei selbstständige Forschungen auf demselben Gebiete eigenthümliche Details der Entwickelung darbieten, überlasse ich der kritischen Vergleichung der Sachkenner.

Braunschweig, den 9. Juni 1859.

Dr. H. **Scheffler**.

Upsala Sternwarte 1859, Mai 25.

Herr Professor!

Erlauben Sie mir, Ihre Aufmerksamkeit auf eine etwas grosse Arbeit zu richten, welche vor einigen Jahren herausgekommen ist, die aber der Bestrafung der deutschen Kritiker entgangen zu sein scheint, vielleicht desshalb, weil man in Deutschland die englische wissenschaftliche Litteratur wenig studirt. Es ist eine Abhandlung über die Auflösung der algebraischen Gleichungen der höheren Ordnungen von **Dr. Schnuse.** Diese Arbeit ist gar nichts anderes als eine Uebersetzung von „Theory and Solution of Algebraical Equations of the higher Orders. By **S. R. Young**", welche Herr Schnuse übersetzt und als seine eigene Arbeit ausgegeben hat.

Mit ausgezeichneter Hochachtung

ergebenst

A. J. D. Wackerbarth.

Für den vorstehenden, zum Abdruck im Archiv mir mitgetheilten Brief des Herrn A. J. D. Wackerbarth an der Sternwarte in Upsala danke ich dem Herrn Einsender recht vielmals, weil man dadurch das schon oft gerügte literarische Treiben des Herrn Dr. Schnuse immer mehr und mehr und immer besser kennen lernt. Traurig ist es nur, dass durch solches Treiben die Achtung vor der deutschen mathematischen Literatur im Auslande nur sinken kann, namentlich in einem Lande wie in Schweden, wo so viele treffliche, wenn auch theilweise weniger durch Schriften bekannte Mathematiker leben, in deren Augen wahrhafte Gründlichkeit die erste Bedingung einer guten mathematischen Schrift ist, und die von solcher Schnuse'schen, auf blossen Gelderwerb speculirenden Fabrikarbeit, namentlich wenn in derselben von ihnen ein Plagiat erkannt wird, wenigstens in ihrem Lande keine Ahnung und keine Vorstellung haben, wenn ihnen dieselbe nicht so unmittelbar wie im vorliegenden Falle entgegentritt, wobei übrigens bemerkt wird, dass uns selbst eine nähere Kenntniss der in Rede stehenden Schnuse'schen Schrift abgeht, und wir den obigen Brief nur so mittheilen, wie er uns zugesandt worden ist. Grunert.

Geometrie.

Berichtigung.

Mein in Thl. XXXII. Nr. II. S. 68—82. abgedruckter Aufsatz: „Ueber die Relation zwischen der Entfernung der

Mittelpunkte und den Halbmessern zweier Kreise, von denen der eine um und der andere in dasselbe Vieleck beschrieben ist", der übrigens, was ich ausdrücklich bemerke, wenn dies auch schon seine ganze Form deutlich erkennen lässt, zunächst und hauptsächlich nur den Zweck hatte, zu einer weiteren Beschäftigung mit dem fraglichen Gegenstande anzuregen, keineswegs denselben zu erschöpfen, bedarf in doppelter Weise einer Berichtigung, die ich, schon vor geraumerer Zeit auf dieselbe aufmerksam geworden, in diesem literarischen Berichte gebe, um sie nicht bis zur Ausgabe des vierten Heftes dieses Theils, an welchem jetzt schon gedruckt wird, aufschieben zu müssen, wenn ich auch sehr wohl einsehe, dass sie mehr in das Archiv selbst, als in die literarischen Berichte gehört hätte.

Erstens ist es nicht allgemein richtig, wenn es auf S. 75. heisst: „Zuerst erhellet nun auf der Stelle, dass im vorliegenden Falle, wo das $n$eck um den einen, in den anderen Kreis beschrieben ist, der im Obigen hervorgehobene Umstand, dass die Mittelpunkte der beiden Kreise auf verschiedenen Seiten einer der n, das Vieleck einschliessenden Seiten läge, gar nicht vorkommen kann, indem vielmehr die Mittelpunkte der beiden Kreise auf einer Seite jeder der n, das Vieleck einschliessenden Seiten liegen müssen, u. s. w." Hierbei ist aber zu bemerken, dass, wenn die Mittelpunkte beider Kreise auf verschiedenen Seiten einer Seite des Vielecks liegen sollten, für diese Seite unter den positiven Winkeln $\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_0)$, $\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)$, $\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_2)$, ... der betreffende Winkel zwischen 90^0 und 180^0 liegen, sein Cosinus also negativ sein würde, man also nach den auf S. 73. (unten) gegebenen Regeln in der betreffenden Gleichung wieder das obere, nämlich das positive Zeichen nehmen müsste. Mit Bezug auf diese Bemerkung wird der folgende Inhalt des Aufsatzes keiner weiteren Berichtigung bedürfen.

Zweitens beruhet das Raisonnement auf S. 74., durch welches nachgewiesen werden soll, dass man immer eine Ecke des Vielecks in die durch die Mittelpunkte beider Kreise gehende Gerade legen könne, ohne der Allgemeinheit der Betrachtung zu schaden, auf einer unrichtigen Anschauungsweise von meiner Seite und kann nicht als stichhaltig angesehen werden. Daher wird man, um die in Rede stehende Behauptung zu rechtfertigen, immer etwa auf den von Poncelet im Traité des propriétés projectives des figures pg. 361. bewiesenen Satz zurückgehen müssen, den er auf folgende Art ausdrückt: „Quand un polygone quelconque est à la fois inscrit à une section conique

et circonscrit à une autre il en existe une infinité de semblables qui jouissent de la même propriété à l'égard des deux courbes; ou plutôt tous ceux qu'on essaierait de décrire, à volonté, d'après ces conditions, se fermeraient d'eux mêmes sur ces courbes."

„Et réciproquement, s'il arrive qu'en essayant d'inscrire à volonté, à une section conique, un polygone dont les cotés en touchent une autre, ce polygone ne se ferme pas de luimême, il ne saurait nécessairement y en avoir d'autres qui jouissent de cette propriété."

So schön aber dieser Satz auch ist, so muss man doch im Interesse der Elemente wünschen, noch eine näher liegende Begründung der in Rede stehenden Behauptung zunächst und speciell für den Kreis zu besitzen, und es wäre, da mein eigenes erwähntes Raisonnement nicht genügt, zu wünschen, dass eine solche elementare Darstellung gegeben würde, die gern im Archiv Aufnahme finden würde.

Alle übrigen Entwickelungen in meinem Aufsatze sind, insofern sie nur den Fall betreffen, wenn eine Ecke des Vielecks in der durch die Mittelpunkte beider Kreise gehenden Geraden liegt, richtig, und werden zur Erfüllung ihres Zwecks, eine weitere Beschäftigung mit diesem nicht uninteressanten Gegenstande in elementarer Rücksicht anzuregen, geeignet sein, so wie überhaupt die vorstehenden nur kurzen Bemerkungen zur Verständigung über diesen Gegenstand hinreichen werden.

Grunert.

Physik.

Lehrbuch der Physik und Mechanik für gewerbliche Fortbildungsschulen von Ludwig Blum, Oberreallehrer in Stuttgart. Leipzig und Heidelberg. Winter. 1859.

Die württembergische Regierung hat in dem letzten Jahrzehnte eine Reihe von Instituten in's Leben gerufen, welche die thätige Fürsorge derselben für die Hebung des Gewerbewesens bekunden. Eine hervorragende Stelle unter diesen Anstalten nimmt die gewerbliche Fortbildungsschule in Stuttgart ein, welche sich einer namhaften Frequenz von Seiten der Angehörigen der Gewerbe erfreut, wie sich auch das allgemeine Interesse für Realbildung darin ausspricht, dass die dortige Realschule den bedeutendsten derartigen Anstalten in Deutschland gleich gestellt werden

darf. Der Verfasser, dessen Lehrthätigkeit eine sehr ausgedehnte ist, wurde von der K. Commission für Fortbildungsschulen beauftragt, seine Vorträge im Druck zu veröffentlichen, und diesem Umstande verdankt das obige Werk seine Entstehung, welches die wichtigsten Lehren der Physik und Mechanik in populärer Darstellung enthält; der Stoff ist in 42 Vorlesungen abgetheilt, wovon jede etwa die Dauer von 2 Stunden in Anspruch nehmen würde. Bei oberflächlichem Durchblättern des Buchs fällt zunächst die grosse Reichhaltigkeit der Figuren angenehm in's Auge, welche bei einem Werke von verhältnissmässig so geringem Umfange selten anzutreffen sein wird, worunter Referent namentlich aufmerksam macht auf diejenigen, welche sich auf die Construction der Uhren beziehen, der Wasserräder, der Dampfmaschinen und der Telegraphen. Die Ausführung dieser in den Text eingedruckten Figuren, deren Zahl sich auf 365 beläuft, ist fast ohne Ausnahme musterhaft zu nennen. Wenn ein solches Werk, welches für einen bestimmten Leserkreis berechnet ist, als Handbuch für die Lehrer an gewerblichen Fortbildungsschulen zunächst um eine praktische und übersichtliche Eintheilung des vorliegenden Stoffs zu geben, die eine abgerundete und vollständige Darstellung in einem Cursus von vorgeschriebener Dauer ermöglicht, auf weitere Verbreitung und spezielles Interesse Anspruch machen soll, so wird man eine Berücksichtigung der Forschungen auf dem Gebiete der Physik auch bis in die neueste Zeit herein erwarten dürfen. In dieser Beziehung sind insbesondere anzuführen die Darstellung der Bewegungen in der Atmosphäre und im Wasser in Folge der ungleichen Vertheilung der Wärme, nach Maury, die umfassenden und detaillirten Angaben über Dampfmaschinen mit Zugrundelegung der vom Verfasser während seines Aufenthalts in Paris und London zur Zeit der dortigen Weltausstellungen gesammelten Notizen über die neuesten Verbesserungen und die sehr in's Einzelne gehende Darstellung der Telegraphie. Selbst die neueren Forschungen von Fizeau, die Geschwindigkeit des Lichts auf direkte Weise zu messen, sind berücksichtigt worden.

Weniger einverstanden kann sich Referent mit dem Verfasser erklären hinsichtlich der Behandlung von gewissen theoretischen Fragen. Das bekannte Beispiel mit dem Schiffe, welches quer über einen Fluss fahren soll und durch die Bewegung des Wassers eine schräge Richtung erhält, genügt dem Verfasser, um hierauf unmittelbar den Satz vom Parallelogramm der Kräfte zu begründen; nach der ganzen Anlage des Buchs sollte man eine mehr detaillirte Berücksichtigung der verschiedenen, noch in neuester Zeit gemachten Versuche erwarten, diese Lehre streng wis-

senschaftlich und zugleich verständlich für ein solches Publikum zu begründen, bei dem mathematische Vorkenntnisse nicht vorauszusetzen sind. Poinsot hat durch die Einführung des Begriffs der Gegenpaare in der Mechanik ein wesentliches und neues Element geschaffen; die ganze Theorie der Drehung der Körper gewinnt dadurch ungemein an Klarheit und Uebersichtlichkeit; der Verfasser hat nun allerdings diesen Begriff erwähnt und erklärt, ohne jedoch spezielle Beispiele anzuführen, welche die fruchtbare und nützliche Anwendung desselben zeigen. Doch ist natürlicherweise die Auffassung der Bedeutung des Worts „populäre Darstellung" subjektiv, und wenn auch die nächste Veranlassung zur Ausarbeitung des Buchs die war, den Lehrern an gewerblichen Fortbildungsschulen eine übersichtliche Darstellung an die Hand zu geben, so dürfte dasselbe den Schülern an solchen Anstalten nicht minder zu empfehlen sein. Dr. Böklen.

Die Potentialfunction und das Potential. Ein Beitrag zur mathematischen Physik von Dr. R. Clausius, Professor der Physik an der Universität und am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Leipzig. Barth. 1859. 8.

Es war jedenfalls ein Bedürfniss, einen kurzen, aber doch möglichst vollständigen Lehrbegriff der Potentialtheorie zu besitzen, da dieselbe in neuerer Zeit immer mehr an Wichtigkeit gewinnt, je mehr es gelingt, die physikalischen Erscheinungen aus den Wirkungen von Elementarkräften zu erklären und sie dadurch auf einfache mechanische Principien zurückzuführen. Herr Professor Clausius hat sich daher durch Herausgabe der vorliegenden Schrift jedenfalls ein sehr dankenswerthes Verdienst erworben, was um so mehr Anerkennung verdient, je mehr man bis jetzt genöthigt war, bei'm Studium der in Rede stehenden wichtigen Theorie auf eine nicht geringe Anzahl einzelner Abhandlungen und Aufsätze zurückzugehen. Der Herr Verfasser hat hauptsächlich die Arbeiten von Green und Gauss benutzt, ist aber bei der Beweisführung in verdienstlicher Weise häufig seinen eigenen Weg gegangen, und hat dadurch seiner Arbeit auch ein eigenthümliches Verdienst gesichert. Dabei hat er der Grösse der mechanischen Arbeit, welche man aus der ursprünglich in der Potentialtheorie betrachteten Function durch Integration erhält, die bei Green gar nicht, bei Gauss nur gelegentlich berücksichtigt wird, besondere Aufmerksamkeit gewidmet, und hat deshalb zwischen Potentialfunction und Potential, so wie ferner zwischen Potential einer Masse auf eine

andere und Potential einer Masse auf sich selbst unterschieden, weshalb auch die Schrift aus den beiden I. Die Potentialfunction. II. Das Potential überschriebenen Hauptabschnitten besteht. Auf Anwendungen, namentlich in der Lehre von der Electricität und Magnetismus, ist der Herr Verfasser in dieser Schrift nicht eingegangen; jedenfalls ist aber zu wünschen, dass er der vorliegenden verdienstlichen Arbeit, welche, wie gesagt, die allgemeine Potentialtheorie enthält, bald eine den genannten Anwendungen gewidmete Schrift folgen lasse. Indem wir mit diesem Wunsche von dem Herrn Verfasser scheiden, empfehlen wir die verdienstliche Schrift der Beachtung unserer Leser in jeder Beziehung recht sehr.

Preisaufgabe der Akademie der Wissenschaften zu Paris.

Les géomètres connaissent actuellement des méthodes générales qui permettent de décider si deux surfaces données sont applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature, ou, en d'autres termes, s'il est possible de faire correspondre les points de la première à ceux de la seconde suivant une loi telle, que la longueur d'un arc de courbe quelconque tracé sur la première, soit égale à celle de l'arc formé par les points correspondants de l'autre. Les questions qui se rattachent à ce beau problème sont bien loin cependant d'avoir été traitées d'une manière complète, et la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée n'a été entreprise que dans de cas très-particuliers. L'Académie propose ce problème pour sujet du grand prix de Mathématiques en 1860, et met au concours la question suivante:

> „*Former l'équation ou les équations différentielles des surfaces applicables sur une surface donnèe, traiter le problème dans quelques cas particuliers, soit en cherchant toutes les surfaces applicables sur une surface donnée, soit en trouvant seulement celles qui remplissent, en outre, une seconde condition choisie de manière à simplifier la solution* “

L'Académie verrait avec intérêt l'application des formules générales à la détermination des surfaces applicables sur une surface du second degré, et sans en faire, pour les concurrents, une condition obligatoire, elle les invite particulièrement à traiter cette question.

(Le prix consistera dans une médaille d'or de la valeur de trois mille francs. Les Mémoires devront être remis avant le 1r. Novembre 1860.) *Comptes Rendus* — 14 *Mars* — 1859.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXX.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

L. Hoffmann, Mathematisches Wörterbuch. Alphabetische Zusammenstellung sämmtlicher in die mathematischen Wissenschaften gehörender Gegenstände. 8. Lief. gr. 8°. geh. Berlin. $^2/_3$ Thlr.

Arithmetik.

G. Boole, A Treatise on Differential Equations. London. 8°. 5 Thlr. 18 Ngr.

Fr. Faa de Bruno, Théorie générale de l'élimination. Paris. 8°. 2 Thlr. 15 Ngr.

J. Salomon, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 6. Aufl. gr. 8°. geh. Wien. $2^2/_3$ Thlr.

Geometrie.

A. E. Aderholdt, Lehrbuch der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und zum Selbstunterrichte. gr. 8°. geh. Weimar. 20 Ngr.

J. G. Fischer, Leitfaden zum Unterricht in der Elementar-Geometrie. 2. Cursus. 2. Aufl. gr. 8°. cart. Hamburg. 6 Ngr.

A. Stubba, Lehrbuch der Geometrie für Stadtschulen und Schullehrerseminare. 3. Aufl. gr. 8°. geh. Leipzig. 28 Ngr.

Geodäsie.

Die Triangulation von Thüringen. Ausgeführt in den Jahren 1851—1855 von der trigonometrischen Abtheilung des königl. preussischen Generalstabes. gr. 4°. In Leinw. cart. Berlin. 4 Thlr. $12^1/_2$ Ngr.

Mechanik.

F. V. Arminjon, Essai sur les boulets creux à percussion ou déscription et théorie d'une nouvelle fusée à percussion pour les projectiles sphériques. Gênes. 8°. Mit 1 Taf. 1 Thlr. 15 Ngr.

W. H. Besant, A Treatise on Hydrostatics and Hydrodynamics. 8°. London. Cloth. 9 s.

Astronomie.

Atlas des nördlichen gestirnten Himmels für den Anfang des

Jahres 1855, entworfen auf der königl. Sternwarte zu Bonn. 4. Lief. qu. Imp.-Fol. Bonn. 3 Thlr.

M. O. Ballo, Einfluss der atmosphärischen Ebbe und Fluth auf den Barometerstand und die astronomische Refraction. gr. 4°. geh. Königsberg. 20 Ngr.

J. F. Encke, Ueber die Erscheinungen der Kometen. Ein Vortrag. gr. 8°. geh. Berlin. $7\frac{1}{2}$ Ngr.

J. F. C. Hessel, Die merkwürdigen arithmetischen Eigenschaften der wichtigsten Näherungsreihe für die Sonnenabstände der Planeten und die ihnen entsprechenden astronomischen Entdeckungen. gr. 4°. geh. Marburg. 10 Ngr.

J. Kepleri, Astronomi, opera omnia ed. C. Frisch. Vol. II. Pars II. Lex.-8°. geh. Frankfurt a. M. 3 Thlr.

J. Clerk Maxwell, On the Stability of the Motions of Saturn's Rings: an Essay, which obtained the Adam's Prize. London. 4°. 2 Thlr. 12 Ngr.

A. Murmann, Ueber die Bahn der Europa. Lex.-8°. geh. Wien. 3 Ngr.

Physik.

M. Bequerel, Recherches sur les causes de l'électricité atmosphérique et terrestre et sur les effets chimiques produits en vertu d'actions lentes, avec ou sans le concours des forces électriques. In-4. Paris. (Extrait des Mémoires de l'Académie des sciences.) T. 27. 2 P.

Allgemeine Encyclopädie der Physik. Bearb. von C. W. Brix, G. Decher, v. Feilitzsch etc. Herausgegeb. von Karsten. 5. Lief. Lex.-8°. geh. Leipzig. $2\frac{2}{3}$ Thlr.

Manuel Fernandez de Figares, Manual de fisica y nociones de quimica. Granada. 4°. Mit 10 Taf. 4 Thlr. 16 Ngr.

J. Lamont, Untersuchungen über die Richtung und Stärke des Erdmagnetismus an verschiedenen Punkten des südwestlichen Europa. gr. 4°. München. geh. $4\frac{2}{3}$ Thlr.

Physikalisches Lexicon. 2. Aufl. Von O. Marbach. Fortgesetzt von C. S. Cornelius. 73. u. 74. Lief. Lex.-8°. geh. Leipzig. à $\frac{1}{3}$ Thlr.

F. Mann, Naturlehre für Mittelschulen in einer Reihe physikalischer Individuen. 1. Hft. gr. 8°. Frauenfeld. 8 Ngr.

J. Petzval, Ueber die Schwingungen gespannter Saiten. gr. 4°. Wien. geh. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Vermischte Schriften.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du bulletin physico-mathématique de l'académie imperiale des sciences de St. Petersbourg. Tome II. 6 Liv. Lex.-8°. St. Pétersbourg et Lipzig. geh. 20 Ngr.

Literarischer Bericht
CXXXI.

Der Begründer der französischen, ja man kann sagen, der ganzen neueren mathematischen Journalistik, der hochverdiente

Joseph Diez Gergonne,

ist in dem hohen Alter von 88 Jahren zu Montpellier gestorben. Er war am 19. Juni 1771 zu Nancy geboren und starb am 4. April 1859. Die von ihm begründeten Annales de Mathématiques pures et appliquées und viele überaus werthvolle eigene Arbeiten, sichern seinem Namen ein unvergängliches Andenken in den Annalen der Wissenschaft. Das Archiv wird sich bemühen, seinen Lesern bald einen ausführlichen Nekrolog des trefflichen Mannes aus kundiger Feder vorlegen zu können.

G.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Elementarny wykład matematyki von J. K. Steczkowski, Professor an der Jagiellonischen Universität zu Krakau, Thl. III. Geometrie.

Im vorigen Jahre ist in Krakau der III. Thl. des im Jahre 1851 *) begonnenen Werkes der elementaren Mathematik, von Herrn

*) Die Anzeige der beiden ersten arithmetischen Theile dieses der polnischen mathematischen Literatur jedenfalls zu besonderer Zierde gereichenden Lehrbuchs s. m. im Literar. Ber. Nr. XC. S. 4. Möge der geehrte Herr Verfasser Zeit finden, uns bald mit weiteren Fortsetzungen seines schönen Werkes zu erfreuen. Grunert.

Professor **Steczkowski** bearbeitet, erschienen, die zwei ersten Theile der Geometrie: die Planimetrie und Stereometrie enthaltend.

Wenn wir einerseits der auf dieses Werk gewandten Sorgfalt und Korrektheit unsere Anerkennung zollen müssen, so sind wir andererseits von der klaren und anschaulichen Darstellung, einer Aufgabe, die wohl für den Zweck, welchen der Verfasser verfolgte, nicht leicht zu erreichen sein dürfte, ganz besonders angenehm berührt worden, und mit Freuden geben wir zu, dass das Buch sich ganz vornämlich als Leitfaden für den Unterricht im Gymnasium eignen würde.

Eine vieljährige Praxis, während deren der Verfasser die allerdings gegründete Erfahrung gemacht hat, dass die Jugend nach Beendigung des Gymnasiums die Universität bezieht, ohne sich klare Begriffe von der mathematischen Wissenschaft angeeignet zu haben, dass vielmehr ihr gesammtes Wissen ein mechanisches sei, welches nicht nach dem Grunde, dem verständigen Beweise frägt, will ihm die Anregung zu einem Handbuche, das dem jetzigen Standpunkte der Wissenschaft entspräche, gewesen sein, und wir freuen uns des glücklichen Resultats.

Man kann sich nämlich aus diesem Werke mit allen nöthigen Lehrsätzen der Planimetrie und Stereometrie vertraut machen, und den Zweck derselben bei verschiedenen Aufgaben und Anwendungen gründlich und klar kennen lernen.

Der Verfasser bemüht sich dem Anfänger darzuthun, dass man die mathematischen Wahrheiten auf mannigfache Art darstellen und beweisen kann. Diese verschiedenen Arten von Beweisen haben einen doppelten Zweck; während sie einmal dem Anfänger die Ueberzeugung abgewinnen, dass dasjenige, was sich so mannigfach beweisen lässt, durchaus eine absolute Wahrheit sein muss, geben sie ausserdem noch Anregung zu eigenem Nachdenken und Versuchen, die schon bekannten und ausgemachten Thatsachen zu begründen, wodurch sich der Anfänger nicht ängstlich an sein Buch gebunden sieht, vielmehr den Anlass erhält, den gedachten Wahrheiten selbstständig nachzuforschen, um auf einem ihm eigenthümlichen Wege zum Beweise zu gelangen.

Des Verfassers Streben ist ferner darauf gerichtet, den Leser mit der synthetischen, so wie mit der analytischen Beweisart bekannt zu machen, und zeigt zugleich, wie die Arithmetik auf die Geometrie anwendbar ist.

Die Beweise sind theilweise von **Euklides**, theilweise von

andern berühmten Mathematikern neuerer Zeit, zum Theil aber auch dem Verfasser eigenthümlich, von denen einige den Lesern unseres Archivs schon bekannt sind.

Die Anwendungen und Beispiele sind glücklich gewählt und eignen sich vorzüglich, den Anfänger zu bilden, und ihn schon hier zu späteren eigenen Untersuchungen vorzubereiten.

Am ausführlichsten behandelt der Verfasser die Kreislehre, die Lehre von den dreiseitigen Ecken, vom sphärischen Dreieck und von der Kugel.

Bei der Kreislehre giebt Herr Professor Steczkowski mehre praktische Methoden zum Einschreiben regulärer Figuren in den Kreis an, ohne denselben Beweise beizufügen. Die praktische Methode, ein reguläres Fünfeck in den Kreis einzuschreiben, hat der Verfasser dem Almagest von Ptolemaeus (Συνταξις μεγαλη) entnommen.

Die anderen Methoden, reguläre Vielecke in den Kreis einzuschreiben, sind aus einem in Metall gestochenen Werke: „Anweisung zum Zirkel- und Linealgebrauch, sowohl für die Jugend als Professionisten und Handwerker. Verlegt in Augsburg von Johann Hertel.“ Der Verfasser macht aber gleich darauf aufmerksam, dass diese Methoden nur Näherungsmethoden sind, die mit den bis jetzt erlangten Kenntnissen noch nicht bewiesen werden können.

Jedenfalls verdient dieses treffliche Buch alle Empfehlung, auch rücksichtlich der Deutlichkeit und Bestimmtheit der sprachlichen Darstellung, und ist eine Zierde der polnischen mathematischen Literatur. S.

Arithmetik.

Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Herausgegeben von Dr. Heinrich Gottlieb Köhler. Sechste Stereotypausgabe. Leipzig. Verlag von Bernhard Tauchnitz. 1859.

Von diesen in vielen Beziehungen ausgezeichneten, äusserst correcten und auch äusserlich, wie alle Productionen der berühmten Verlagshandlung, in der trefflichsten Weise ausgestatteten Tafeln ist so eben die sechste Stereotypausgabe erschienen. Natür-

lich ist dies der beste Beweis für die weite Verbreitung des Buchs, wenigstens in Deutschland, und einer Anzeige bedarf es daher eigentlich im Archiv nicht mehr. Um aber dem trefflichen Buche auch im Auslande eine immer noch grössere Verbreitung und Bekanntwerdung zu sichern und zu verschaffen, scheint der berühmten Verlagshandlung und den Opfern, welche dieselbe fortwährend der schönen und im höchsten Grade zweckentsprechenden Ausstattung des vorliegenden Werkes bringt, unsere Zeitschrift es schuldig zu sein, ihre eigene grosse Verbreitung in den Ländern jeder Zunge nicht unbenutzt zu lassen, um durch eine kurze Anzeige der so eben erschienenen sechsten Stereotypausgabe das Ihrige zu deren Empfehlung im weitesten Kreise beizutragen, wobei wir uns freilich hauptsächlich auf die Angabe des reichen Inhalts werden beschränken müssen.

Die äussere Ausstattung ist, wie schon gesagt, in allen Beziehungen so vorzüglich und zweckmässig, dass sich das Werk in dieser Beziehung den besten englischen und französischen Werken ähnlicher Art nicht nur unbedingt an die Seite stellen kann, sondern dieselben noch vielfach übertrifft; und dabei ist der Preis von 27 Sgr. jedenfalls ein beispiellos billiger, welcher selbst dem ärmsten Schüler die Anschaffung gestattet. Der Inhalt nach seinen Hauptrubriken ist aber folgender:

Nach der gewöhnlichen Einleitung über den Gebrauch der Tafeln folgt:

Tafel der gemeinen oder briggischen Logarithmen aller natürlichen Zahlen bis 108000. Mit einem Zusatze vermehrt, wodurch die Logarithmen der Sinus, Tangenten u. s. w. für die drei ersten und letzten Grade des Quadranten bis auf Bruchtheile der Secunde mit Leichtigkeit gefunden werden. (Die Logarithmen sind, wie mit wenigen Ausnahmen immer in diesen Tafeln, siebenstellige).

Tafel der Gaussischen Logarithmen, um aus den Logarithmen zweier Zahlen den Logarithmus ihrer Summen oder Differenzen zu finden.

Briggische Logarithmen aller Primzahlen von 2 bis 1811, um die Logarithmen aller aus diesen zusammengesetzten Zahlen zu finden. (Die Logarithmen sind eilfstellige).

Einige beständige Logarithmen, um die gebräuchlichsten Längen-, Quadrat- und Cubik-Maasse in einander zu verwandeln.

(Beide vorhergehende Tafeln sind sehr vollständig und sehr zweckmässig für den praktischen Gebrauch.)

Tafel der gemeinen Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten, für die neun ersten und neun letzten Grade des Quadranten von zehn zu zehn Sekunden, für den übrigen Theil desselben aber von Minute zu Minute, nebst den Differenzen für eine Sekunde.

Goniometrische und trigonometrische Formeln. (Eine sehr vollständige Sammlung auf 21 Seiten, vollständiger als sonst gewöhnlich).

Tafel der natürlichen Logarithmen. (Von 0 bis 999, achtstellig.)

Tafel der natürlichen Logarithmen aller Primzahlen von 1000 an.

(Die beiden vorhergehenden Tafeln leisten in Verbindung mit einander auf geringem Raume vortreffliche Dienste bei dem Gebrauch der natürlichen Logarithmen).

Tafel der Potenzen von 2, 3 und 5.

Tafel der Potenzen von der Basis *e* der natürlichen Logarithmen.

Tafel der Potenzen aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100. (Der Grad der Potenzen steigt von 1 bis 9).

Tafel der Quadratzahlen von 1 bis 1000.

Tafel der Cubikzahlen von 1 bis 1000.

Quadrat- und Cubikwurzeln aller Zahlen von 1 bis 1000.

Tafel aller einfachen Factoren bis 21524.

Tafel, um die Minuten und Sekunden in Decimaltheile des Grades oder der Stunde, wie auch Fusse, Zolle, Linien und Punkte in Decimaltheile der Klafter oder des Fusses zu verwandeln.

Coefficienten der 1., 2., 3., 4. und 5. Differenz beim Einschalten nach dem Decimalsystem.

Tafel zur Entwickelung der Coefficienten von einigen unendlichen Reihen, welche in höheren Rechnungen öfters vorkommen.

Man wird aus dieser Inhaltsangabe sehen, wie viel des Nützlichen zu äusserst geringem Preise hier in der vortrefflichsten äusseren Ausstattung geboten wird.

Astronomie und verwandte Wissenschaften.

Zeitschrift für populäre Mittheilungen aus dem Gebiete der Astronomie und verwandter Wissenschaften. Herausgegeben von Professor Dr. C. A. F. Peters, Director der Sternwarte in Altona. Band I. Heft 2. Altona. 1859.

Das erste Heft dieser verdienstlichen Zeitschrift ist im Literar. Ber. Nr. CXXV. S. 1. angezeigt worden. Das vorliegende zweite Heft enthält die drei folgenden Aufsätze: Zur Kometenkunde. Von **J. H. Mädler**. S. 69 — S. 87. — Ueber die Eigenbewegung der Fixsterne, mit Bezug auf Herrn Staatsrath Mädlers Hypothese der Bewegung der Sterne um Alcyone als Centralsonne. Vom **Herausgeber**. S. 88.—S. 130. — Bemerkungen über einige Veränderliche von Dr. **Hencke** in Driesen.

Der Inhalt des ersten dieser drei Aufsätze ist aus seiner Ueberschrift hinreichend ersichtlich und betrifft hauptsächlich die neuesten in der Kometenkunde gemachten Entdeckungen und angestellten Rechnungen.

Für den zweiten überaus lehrreichen Aufsatz des Herrn Herausgebers sind wir demselben zu ganz besonderem Danke verpflichtet. Denn nirgends haben wir in möglichst allgemein verständlicher Weise so deutlich wie in diesem Aufsatze nachgewiesen gefunden, dass es mit Herrn Mädler's Centralsonne gar nichts, oder dass dieselbe vielmehr ein blosses Truggebilde ist, welches höchstens in dem Kopfe seines Urhebers in ganz verworrener Weise existirt. Wir stimmen dem Herrn Herausgeber vollkommen bei, wenn derselbe gegen das Ende seines Aufsatzes auf S. 127. sagt: „Ein solches Gewebe von willkührlichen Annahmen und Widersprüchen bildet Mädler's Theorie der Bewegungen der Fixsterne um Alcyone als Centralsonne! Man könnte sagen, weshalb ich in solcher Ausführlichkeit über die Unhaltbarkeit einer Hypothese mich ausgelassen habe, die in allen ihr zur Stütze dienenden Argumenten die Nichtigkeit schon in sich selber trägt. Mir erschien es jedoch schon durch den Umstand gerechtfertigt, weil jene Irrthümer, da ihr Urheber sich als populärer Schriftsteller einen*) Ruf erworben hat, eine weite Verbreitung gefunden

---

*) (gewissen).

haben. Auch hielt ich es der Würde der Wissenschaft angemessen, über die unwissenschaftliche Argumentationsweise, die Herr Staatsrath Mädler sich in dieser Sache erlaubt hat, indem er statt mathematisch begründeter Beweise*), unbegründete Redensarten vortrug, meine Meinung unumwunden auszusprechen."

Und dafür danken wir dem Herrn Herausgeber ganz besonders. Denn es ist in der That wahrhaft betrübend, wenn man sieht, wie in populären astronomischen Schriften, selbst in den neueren und besseren**), das Mädler'sche Truggebilde einer Centralsonne fast als ein Evangelium vorgetragen und damit das Publikum geradezu hintergangen wird, so dass es in der That sehr wünschenswerth war, dass den Verfassern solcher Bücher endlich einmal eine etwas nachdrückliche Aufklärung über diesen Gegenstand zu Theil wurde, wodurch der Herr Herausgeber sich jedenfalls sehr verdient gemacht hat.

Der letzte ganz kurze Aufsatz enthält nur einige wenige Notizen über einige veränderliche Sterne.

Möge der verdiente Herr Herausgeber uns noch oft mit so lehrreichen Aufsätzen wie der vorher näher besprochene erfreuen, und seine verdienstliche Zeitschrift immer den erfreulichsten Fortgang haben.

Die merkwürdigen arithmetischen Eigenschaften der wichtigsten Näherungsreihe für die Sonnenabstände der Planeten und die ihnen entsprechenden astronomischen Entdeckungen mit Rücksicht auf die Geschichte dieser Reihe und der auf sie gegründeten Folgerungen. Von Professor Dr. J. F. C. Hessel in Marburg. Elwert'sche Buchhandlung. 1859. 4°.

Am 17. April 1859 feierte ein würdiger Lehrer der Mathematik, Herr Carl Reinhard Müller, ausserordentlicher Professor der Mathematik an der Universität zu Marburg, nach neun und fünfzigjährigem segensreichen Wirken als Lehrer am Pädagogium

*) Die überhaupt nicht Herrn Mädler's starke Seite zu sein scheinen.

**) M. s. z. B. das neueste Buch dieser Art: Handbuch der mathematischen Erdkunde, ein Buch für Schule und Haus, von Eduard Sander, Grossherzoglich Hessischem Realschul-Director. Wien. 1859., worin das Mädlers'sche Truggebilde einer Centralsonne auf S. 48. u. s. w. fast als unumstössliche Wahrheit dargestellt wird.

und der Universität dortselbst, sein funfzigjähriges Doctorjubiläum, welcher erfreulichen Feier die vorliegende Beglückwünschungsschrift zunächst ihre Entstehung verdankt. Es ist bekannt, dass von mehreren Astronomen, z. B. von Titius, Bode, Wurm u. A. die Abstände der Planeten von der Sonne durch nach einem gewissen Gesetze regelmässig fortschreitende Zahlenreihen darzustellen versucht worden sind. Wurm z. B. drückte den Sonnenabstand des $n$ten Planeten durch die Formel

$$x_n = a + 2^{n-2} . b$$

aus und suchte dann die Constanten so zu bestimmen, dass durch obige Formel die Sonnenabstände der Planeten so genau als möglich numerisch dargestellt würden. Er findet, den mittleren Werth des Sonnenabstandes der Erde als Einheit angenommen, dass $a = 0,4$ und $b = 0,3$ brauchbare Näherungswerthe geben, hält aber $a = 0,387$ und $b = 0,293$ für zweckmässiger, und sagt, dass „die gegebene Formel allein für Mercur nicht anwendbar sei.“ Ueber diese und andere Reihen hat nun Herr Professor Hessel in der vorliegenden Schrift eine auch in allgemeiner arithmetischer Rücksicht sehr sorgfältige und lehrreiche Untersuchung angestellt, und zugleich alles Historische so ausführlich berücksichtigt, endlich auch die vielen neueren astronomischen Beobachtungen mit so viel Kenntniss und Einsicht in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen, dass wir diese Schrift unseren Lesern aus Ueberzeugung zur Beachtung nur recht sehr empfehlen können.

Maasse, Münzen und Gewichte.

On the construction of the new Imperial Standard Pounds; on the comparison of the new Standards with the Kilogramme des Archives; and the construction of secondary Standard Pounds, a Ten-Pounds weight, a Kilogramme ad a Series of troy ounce weights. By W. H. Miller, Professor of Mineralogy in the University of Cambridge. London. 1847. 4°.

Diese, 194 Seiten in gross Quart umfassende, aus den Philosophical Transactions. Part III. for 1856 als besonderes Werk abgedruckte Abhandlung ist leider erst jetzt zu unserer Kenntniss gekommen. Dessenungeachtet halten wir uns für verpflichtet, noch jetzt auf dieselbe aufmerksam zu machen, nicht bloss wegen der grossen praktischen Wichtigkeit der darin ent-

haltenen, auf dem ausführlichen Titel mit hinreichender Vollständigkeit angegebenen Gegenstände, sondern auch weil wir glauben, dass diese mit dem grössten Fleisse und der grössten Mühe ausgearbeitete Abhandlung für alle derartige Untersuchungen als ein wahres Muster betrachtet werden muss. Auf den Inhalt selbst können wir bei einem solchen Werke hier natürlich nicht näher eingehen, sondern müssen uns begnügen, unsere Leser auf das Werk selbst zu verweisen, danken aber dem namentlich auch als Krystallograph berühmten Herrn Verfasser recht sehr für das der Wissenschaft mit diesem wichtigen Werke gemachte höchst werthvolle Geschenk.

Vermischte Schriften.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CXXVIII. S. 8.)

N°. 2. (Marzo e Aprile 1859.) Intorno alle superficie della seconda classe inscritte in una stessa superficie sviluppabile della quarta classe. Nota del Prof. Luigi Cremona. p. 65. — La Teorica dei covarianti, e degli invarianti delle forme binarie e sue principali applicazioni. Monografia del Prof. Francesco Brioschi. p. 82. — Généralisation de la théorie de l'involution: applications géométriques. Par E. de Jonquières. p. 86. — Sur la courbure d'une serie de surfaces et de lignes. Par T. A. Hirst. p. 95. — Mémoire sur la figure de la terre, considerée comme peu differente d'une sphère. Par Mr. Ossian Bonnet. (Continuazione.) p. 113. — Extrait d'une lettre de M. Kronecker à M. Brioschi. p. 131.

Rivista bibliografica. Intorno ad una formola d'interpolazione: articolo del Prof. F. Brioschi. p. 132. — Sulle linee di curvatura della superficie delle onde. Articolo del Prof. F. Brioschi. p. 135. — Soggetto per premio proposto dall' academia delle scienze. p. 136. — Pubblicationi recenti. p. 62.

N°. 3. (Maggio e Giugno 1859.) Sulla partizione dei numeri, e sul numero degli Invarianti. Nota del Prof. Giusto Bellavitis. p. 137. — Sur la courbure d'une serie de surfaces et de lignes. Par T. A. Hirst. (Continuazione e fine.) p. 148. — Sur la surface qui est l'enveloppe des plans conduits par les points d'un ellipsoide perpendiculairement aux rayons menés par le centre. Par M. A. Cayley. p. 168. — Mémoire sur la figure de la terre considerée comme peu differente d'une sphère. Par Mr. Ossian

Bonnet. (Continuazione e fine.) p. 180. — Nouvelle méthode pour la détermination du reste de la formule de Taylor. Par le Dr. Ant. Winckler. p. 185. — Sulle figure inverse. Nota del Prof. Barnaba Tortolini. p. 189. — G. Lejeune Dirichlet. Articolo del Prof. Barnaba Tortolini. p. 196.

Rivista bibliographica. Théorie générale de l'élimination. Par Le François Faà de Bruno. Articolo di F. G. p. 197. — Pubblicazioni recenti. p. 200.

The Atlantis: a Register of Literature and Science. Conducted by Membres of the catholic University of Ireland. No. III. January 1859. London. 1859. 8.

Die beiden ersten Nummern dieses neuen empfehlenswerthen Journals sind im Literar. Ber. Nr. CXXVI. S. 8. angezeigt. Die vorliegende No. III. enthält die folgenden in den Kreis des Archivs gehörenden Aufsätze:

Art. VI. Note on the Laws which regulate the Distribution of Isothermal Lines. By Henry Hennessy, F. R. S. p. 201. (Dieser ganz mathematisch gehaltene Aufsatz über den fraglichen Gegenstand verdient schon deshalb besondere Beachtung.) — Art. VII. On Terrestrial Climate as influenced by the Distribution of Land and Water during different geological epochs. By Henry Hennessy, F. R. S. p. 208.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1858. Nr. 408—423. Mit 2 Tafeln. Bern. 1858. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CXX. S. 7.)

Auch dieses neueste Heft der verdienstlichen Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern enthält wieder mehrere sehr lesenswerthe Aufsätze mathematischen und physikalischen Inhalts, nämlich:

Chr. Müller: Ueber die aräometrische Milchprüfung. Nr. 408 und 409.

C. Brunner: Noch ein Wort über Milchprüfung. Nr. 410.

Hermann Kinkelin: Ueber Convergenz unendlicher Reihen. Nr. 415.

Brändli: Erzeugung der Cardioide aus zwei ungleichen Kreisen. Nr. 415.

Hermann Kinkelin: Ueber einige unendliche Reihen. Nr. 419 und 420.

Meteorologische Beobachtungen. Juni 1857 bis November 1857.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXI.

Arithmetik.

Hm. Scheffler, Die Auflösung der algebraischen und transzendenten Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten in reellen und komplexen Zahlen nach neuen und zur praktischen Anwendung geeigneten Methoden. Mit 35 in den Text gedruckten Holzschn. Braunschweig. 8°. 24 Ngr.

W. Simerka, Lösung zweier Arten von Gleichungen. Lex.-8°. geh. Wien. 2 Ngr.

A. Stubba, Sammlung algebraischer Aufgaben, nebst Anleitung zur Auflösung derselben durch Verstandesschlüsse. 4. Aufl. gr. 8°. geh. Sagan. $^2/_3$ Thlr.

G. von Vega, Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Ausg. in russ. Sprache. Neuer Abdr. Lex.-8°. geh. Berlin. 2 Thlr.

Geometrie.

C. Hechel, Die ebene analytische Geometrie mit zahlreichen Uebungsaufgaben für höhere Lehranstalten bearbeitet. gr. 8°. geh. Riga. 18 Ngr.

F. Mann, Das rechtwinkelige Parallelepiped. Eine mathematische Monographie. 4°. geh. Frauenfeld. 6 Ngr.

W. Schell, Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. gr. 8°. geh. Leipzig. 24 Ngr.

Trigonometrie.

C. Spitz, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie zum Gebrauch an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. gr. 8°. geh. Leipzig. 14 Ngr.

— — Anhang dazu. Die Resultate und Andeutungen zur Auflösung der in dem Lehrbuche befindlichen Aufgaben enthaltend. gr. 8°. geh. Ebendaselbst. 4 Ngr.

Mechanik.

L. Blum, Lehrbuch der Physik und Mechanik, für gewerbliche Fortbildungsschulen. Im Auftrage der Königl. Commission für gewerbliche Fortbildungsschulen in Württemberg ausgearbeitet. Leipzig und Heidelberg. 8°. Mit eingedr. Holzschn. 1 Thlr. 20 Ngr.

Astronomie.

Astronomische Beobachtungen auf der königl. Universitäts-Sternwarte zu Königsberg. 32. Abth. Königsb. u. Leipz. Fol. 2 Thlr.

Handatlas der Erde und des Himmels in 70 Lief. Neu red. Ausg. 36. u. 37. Lief. qu. Imp.-Fol. Weimar. à 10 Ngr.

Astronomische Nachrichten. Begründet von H. C. Schumacher, fortgesetzt von P. A. Hansen und C. A. Peters. 51. Bd. No. 1. gr. 4°. Altona. Preis des vollst. Bandes 5 Thlr.

C. Rümker, Neue Folge der mittleren Oerter von Fixsternen für den Anfang von 1850. Abgeleitet aus den Beobachtungen auf der Hamburger Sternwarte. Die 6. Stunde enth. qu. gr. 4°. geh. Hamburg. 8 Ngr.

H. Schultz, Declinations-Bestimmungen mit dem Dollondschen Durchgangs-Instrumente auf der Berliner Sternwarte. Berlin. 4°. 1 Thlr.

Nautik.

P. Cameron, The Variation and Deviation of the Compass rectified by Azimuth and Altitude Tables from the Equator to the Latitude of Eighty Degrees; also by the Azimuth and Altitude Tables are found in the true position of a Ship at Sea, the Error of the Chronometer and the Longitude; likewise a Treatise on Magnetism and the Deviation of the Compass in Iron Ships, and the method of Observing and Correcting them by Magnets. London. 8°. 4 Thlr. 6 Ngr.

Physik.

M. O. Ballo, Einfluss der atmosphärischen Ebbe und Fluth auf den Barometerstand und die astronomische Refraction. gr. 4°. geh. Königsberg. 20 Ngr.

L. Blum, Lehrbuch der Physik und Mechanik für gewerbliche Fortbildungsschulen. Im Auftrage der königl. Commission für gewerbliche Fortbildungsschulen in Würtemberg ausgearbeitet. Mit eingedr. Holzschn. 8°. Leipzig. 1 Thlr. 20 Ngr.

R. Clausius, Die Potentialfunction und das Potential. Ein Beitrag zur mathematischen Physik. Leipzig. 8°. 24 Ngr.

J. Lamont, Untersuchungen über die Richtung und Stärke des Erdmagnetismus in Norddeutschland, Belgien, Holland, Dänemark im Sommer des Jahres 1858 ausgeführt. gr. 4°. geh. München. 2⅔ Thlr.

B. Studer, Einleitung in das Studium der Physik und Elemente der Mechanik. gr. 8°. geh. Zürich. 24 Ngr.

Vermischte Schriften.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Als Fortsetzung des von Crelle gegründeten Journals herausgegeb. von C. W. Borchardt. 57. Bd. 1s Hft. gr. 4°. Berlin. Preis für den vollständigen Band 4 Thlr.

Literarischer Bericht
CXXXII.

Am 5. Februar 1859 starb zu Upsala der Professor emer.

Joh. Bredman,

früher Docent, dann Adjunct bei der dortigen philosophischen Facultät, 1811—41 ordentlicher Professor der Astronomie und Director der Sternwarte, im 88sten Lebensjahre. Er ist z. B. Verfasser des geschätzten Werkes: Theoretiska Astronomiens Grunder. Einen Nekrolog des verdienten Mannes würden wir gern in's Archiv aufnehmen. G.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Amtlicher Bericht über die zwei und dreissigste Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Wien im September 1856. Herausgegeben von den Geschäftsführern derselben Hyrtl und Schrötter. Mit 32 Tafeln. Wien. Hof- und Staatsdruckerei. (Karl Gerold). 1858. 4°.

Die beiden verdienten Geschäftsführer der 32sten Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte, welche im Jahre 1856 zu Wien tagte, haben jetzt den interessanten sehr ausführlichen Bericht über diese denkwürdige Versammlung, welcher 280 und XXXIV Seiten umfasst, veröffentlicht, und werden sich dadurch gewiss den grössten Dank nicht nur aller derer, welche jener schönen Versammlung beiwohnten, und sich gern von Neuem in die bei derselben empfangenen Eindrücke zurückversetzen, sondern überhaupt aller Naturforscher und Aerzte erwerben. Die

Anzahl der Mitglieder betrug 885, die Anzahl der Theilnehmer 798, im Ganzen also 1683. Wenn nun die Anzahl der Mitglieder und Theilnehmer bei der im Jahre 1832 in Wien stattgefundenen Versammlnng 418 betrug, so berechtigt die Vergleichung dieser Zahlen wohl zu dem höchst erfreulichen Schlusse, dass in den 24 Jahren, welche zwischen den beiden Wiener Versammlungen liegen, das Interesse an den Naturwissenschaften in bedeutendem Maasse gestiegen ist. Allen, welche wie der Unterzeichnete das Glück hatten, der 32sten Versammlung beizuwohnen, wird dieselbe immerdar unvergesslich bleiben, und Jeder wird sich auch stets dankbar der grossartigen Munificenz erinnern, mit welcher von der kaiserlichen Regierung und der Stadt Wien Alles aufgeboten worden war, um dieser Versammlung einen möglichst grossen Glanz zu verleihen, und die derselben Beiwohnenden in würdigster Weise zu empfangen. Einen Glanzpunkt aller Sitzungen bildete der feierliche Moment, wo am 17. September in der ersten allgemeinen Sitzung, die wie alle diese Sitzungen in dem von unzähligen Lichtern erleuchteten prachtvollen grossen Redoutensaale der k. k. Hofburg gehalten wurde, der zweite Geschäftsführer, Professor Schrötter, der Versammlung verkündete, „dass Se. k. k. apostolische Majestät zur Durchführung der Versammlung durch Anweisung so reichlicher Mittel gesorgt hätten, dass der ganze Betrag der Einlagegelder, der sich gegenwärtig — (nämlich bis zum 17. September) — auf ungefähr 8000 fl. belaufe, der Versammlung zur freien Disposition gestellt werden könnten.“ Ueber alle diese Ereignisse, welche als wesentliche Momente in der Geschichte der Naturwissenschaften für alle Zeiten zu betrachten sind, weshalb auch die vorliegende Anzeige von uns absichtlich unter die Rubrik: „Geschichte der Mathematik und Physik“ gestellt worden ist, enthält der vorliegende „Amtliche Bericht“ die interessantesten und merkwürdigsten Mittheilungen, weshalb wir denselben allen unseren Lesern dringend zur Beachtung empfehlen. Hier müssen wir uns mit einer kurzen Inhaltsanzeige desselben begnügen, in so weit die betreffenden Gegenstände entweder unmittelbar in den Kreis des Archivs gehören oder von so allgemeinem Interesse sind, dass eine Erwähnung derselben an diesem Orte gerechtfertigt erscheint.

Die schöne Eröffnungsrede des ersten Geschäftsführers, Professors Hyrtl, überschrieben: „Einst und Jetzt der Naturwissenschaft in Oesterreich“ giebt eine sehr interessante Darstellung der wahrhaft grossartigen Unterstützung und Förderung, welche in dem zwischen den beiden Wiener Versammlungen liegenden Zeitraume von 24 Jahren den Naturwissenschaften in

Oesterreich zu Theil geworden sind, wo natürlich die Stiftung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften das grösste Gewicht in die Wagschale legt, und in nächster Linie die Gründung der Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, des geologischen Reichs-Instituts u. s. w. zu erwähnen sind. Auf die Errichtung der Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus trug zuerst der Vice-Präsident der Akademie, der treffliche Baumgartner, an, und zwar in einer Weise, welche gestattete, ohne Verzug an die Ausführung selbst zu gehen, indem er der Anstalt sein ganzes Gehalt zur Verfügung stellte, eine Uneigennützigkeit und ein warmer Eifer für das Gedeihen der Wissenschaft, denen sich wohl nur wenige ähnliche Beispiele an die Seite stellen lassen. — Der Rede des zweiten Geschäftsführers, Professors Schrötter, ist schon oben gedacht worden. — Ausser diesen Reden heben wir nun noch die folgenden Aufsätze nach den beiden oben angegebenen Kategorien hervor: Ueber den Aetna und seine Ausbrüche. Von Prof. Sartorius von Waltershausen aus Göttingen. — Mittheilungen über die rothen, schwarzen und weissen Bevölkerer Nord- und Mittel-Amerika's. Von Dr. Karl Scherzer aus Wien. — Am meisten sind Geologie und Geognosie vertreten, wohin z. B. die ausführlichen Abhandlungen: Zur Geologie der Lombardei. Von Theodor Zollikofer und: Ueber die geognostischen Verhältnisse des westlichen Columbien. Von Dr. Hermann Karsten aus Berlin gehören. — Ueber die Anwendung des Elektromagnetes bei elektro-dynamischen Rotationen. Von Prof. Dr. Anian Jedlik aus Pesth. — Modification der Grove'schen und Bunsen'schen Batterie. Von Demselben. — Neuer Lichteinlass-Apparat. Von Dr. Schofka aus Reichenau in Böhmen. — Ueber die Veränderungen, welche der Capillarstand des Quecksilbers durch die Temperatur erleidet. Von Prof. Frankenheim aus Breslau. — Ueber die Wärme-Leitung des Quecksilbers und: Ueber die Verbindung heterogener Krystalle. Von Demselben. — Ueber Zodiakallichter, Nordlichter und Sternschnuppen. Von Prof. Heis aus Münster. — Ueber die Bestimmung von Tangenten und Krümmungshalbmessern auf elementarem Wege. Von Professor Gugler aus Stuttgart. — Skizze für Meteorologie und Erdkunde. Vorschlag zu einer verbesserten Art von Psychrometer-Beobachtungen. Vorschlag zum Entwurfe von natürlichen Karten. Von Dr. Friedmann aus München. — Ueber die mittlere Windrichtung über den mittel- und nordeuropäischen Ländern und Meeren, so wie über die geographische Darstellung der mittleren Windrichtung. Von Dr. Prestel aus Emden. — Ueber einige noch nicht ganz allgemeine meteorologische Beobachtungen. Von Georg Binder,

evangel. Pfarrer in Kaisd bei Schässburg in Siebenbürgen. — Gleiches Maass. Ein Vorschlag. Von Demselben.

Wir wünschen sehr, dass die beiden verdienten Geschäftsführer W. Eisenlohr und Volz der vorjährigen gleich wichtigen und schönen, unter dem unmittelbaren hohen Protectorat und fortwährender persönlicher Theilnahme Sr. Königl. Hoheit des Grossherzogs von Baden gehaltenen Carlsruher Versammlung uns bald mit einem ähnlichen, gleich ausführlichen Berichte erfreuen mögen, der sich an hohem Interesse dem vorliegenden, für welchen wir den Herren Hyrtl und Schrötter nochmals unsern wärmsten Dank aussprechen, gewiss in würdigster Weise wird an die Seite stellen können.

Arithmetik.

Exercices d'Analyse numérique. Extraits, Commentaires et Recherches relatifs à l'Analyse indéterminée et à la Théorie des Nombres. Par V. A. Le Besgue, Professeur honoraire de la Faculté des sciences de Bordeaux, Membre correspondant de l'Institut. Paris. Leiber et Faraguet. 1859. 8°.

Der Zweck des Herrn Verfassers, welcher sich bekanntlich auf dem Gebiete der höheren Zahlenlehre namhafte Verdienste erworben hat, bei der Herausgabe dieser „Exercices" ist, in deren verschiedenen Abtheilungen, so wie dieselben nach und nach erscheinen werden, einen „Traité élémentaire de la théorie des nombres" nach dem neuesten Zustande dieser Wissenschaft zu liefern. Die vorliegende erste Abtheilung enthält, wie der Herr Verfasser in der Vorrede sagt: l'analyse indéterminée du premier degré et des applications de nature à faire voir en quoi consiste la théorie des nombres, et à donner une idée des méthodes qu'elle emploie. Die zweite Abtheilung wird enthalten: la théorie des congruences binômes et en particulier de la congruence complète du second degré, qui s'y ramène immédiatement. Les applications seront la résolution de l'équation binôme et l'exposition de quelques théorèmes qui s'y rattachent.

Wir gestehen, dass uns die vorliegende erste Abtheilung mehrfach angesprochen hat, ungeachtet der vielfach nur aphoristischen Haltung und der Kürze der Darstellung, welche übrigens vielfach zu eigenem Nachdenken anregt und den Leser nöthigt, sich die Beweise nach kürzeren Andeutungen selbst zu ergänzen,

was übrigens Alles durch den Titel: „Exercices" vollständig gerechtfertigt erscheint. Wir empfehlen das Büchlein unsern Lesern, ohne auf eine in's Einzelne gehende Kritik uns einlassen zu können, die überhaupt im Allgemeinen nicht in dem Zwecke unserer literarischen Berichte liegt, und begnügen uns im Uebrigen mit der folgenden Angabe des Hauptinhalts: Observations préliminaires. (Du nombre. Objet de la théorie des nombres. Classification des nombres. De la congruence; sa notation. Mode de rédaction. De quelques identités. Fonctions entières; fonctions homogènes ou formes. Permutations. Puissance du polynôme, du binôme. Combinaisons. Nombres figurés. Nombres polygones) *). — Prémière Partie. Analyse indéterminée du premier degré; propriétés des nombres qui en résultent. Système d'équations homogènes dont la solution ne renferme qu'une seule indéterminée. Diviseur commun maximum. Propriétés du commun diviseur maximum de deux nombres. Des nombres premiers entre eux. Résolution de l'équation $ax - by = c$. Système d'équations dont les inconnues s'expriment au moyen d'une seule indéterminée. Résolution d'une équation quelconque du premier degré. Résolution d'un système quelconque d'équations du premier degré. Partition des nombres. — Applications. Notions sur les congruences. Conséquences du théorème de Fermat (sehr reichhaltig). De la décomposition des nombres en carrés et en bicarrés. Questions diverses sur les nombres premiers. Sur l'emploi des imaginaires, des quantités irrationelles et des séries. Sur l'emploi des séries divergentes.

Man sieht hieraus, dass auf dem geringen Raume von 151 Seiten hier ein grosser Reichthum von Material geboten wird. Für den strengen theoretischen Unterricht in der Arithmetik enthält das Büchlein manches Brauchbare, und an manchen, dem verdienten Herrn Verfasser eigenthümlichen Darstellungen fehlt es gleichfalls nicht. Wir wünschen, bald die in Aussicht gestellten Fortsetzungen anzeigen zu können.

Astronomie.

Astronomical Observations made during the Year 1848, at the U. S. N. Observatory, Washington, under

*) Den Inhalt der Observations préliminaires haben wir im Einzelnen angegeben, um zu zeigen, wie elementar der Herr Verfasser verfährt. Der weitere Inhalt kann nur seinen Hauptrubriken nach angegeben werden.

the Direction of **M. F. Maury**, Lieut. United States Navy, Superintendent: Commodore **L. Warrington**, Chief of Bureau of Ordnance and Hydrography. Vol. IV. Published by Authority of the Hon. **J. C. Dobbin**, Secretaire of the Navy. Washington. 1856. 4°.

Astronomical Observations made during the Years 1849 and 1850, at the U. S. Naval Observatory, Washington, approved by Captain **D. N. Ingraham**, Chief of the Bureau of Ordnance and Hydrography, and published by Authority of the Honorable **Isaac Toucey**, Secretary of the Navy. By **M. F. Maury**, LL. D., U. S. N. Superintendent of the U. S. Observatory and Hydrographical Office, Washington. Vol. V. Washington. 1859. 4°.

Die beiden neuesten prachtvoll ausgestatteten Bände der Beobachtungen des National-Observatoriums zu Washington liegen uns vor, welche die Beobachtungen der Jahre 1848, 1849, 1850 umfassen, und von Neuem Zeugniss ablegen, in wie grossartigem Maassstabe alle solche Arbeiten in Amerika betrieben werden, wie schon aus der grossen Anzahl der bei denselben beschäftigten Astronomen erhellt. Es wird gewiss für unsere Leser interessant sein, wenn wir ihnen sagen, dass ausser dem berühmten Director des National-Observatoriums, Herrn Maury, unter dessen höchst umsichtiger Leitung bei demselben noch beschäftigt sind die folgenden Herren:

1. Die Chronometer und anderen nautischen Instrumente stehen unter der besonderen Leitung des Herrn Lieutenant Julian Myers.

2. Bei'm Charten-Departement sind angestellt die Herren Lieutenants E. C. Stout und S. Magaw.

3. Die Construction der Wind and Current Charts ist besonders übertragen den Herren Lieutenants E. G. Parrot, J. J. Guthrie, Henry S. Newcomb, T. T. Houston, Rob. L. May.

4. In dem eigentlichen astronomischen Departement sind beschäftigt die Herren Professoren James Ferguson (Assistant Astronomer), A. G. Pendleton, M. Yarnal, James Major, Joseph S. Hubbard, A. W. Lawrence.

Ausser diesem Beamten-Personal von funfzehn Personen finden wir aber bei den Beobachtungen und Rechnungen in den Jahren 1849 und 1850 noch beschäftigt die Herren Professoren Beecher, Keith, Winlock, Coffin, Benedict, die Herren Lieutenants Steedman, Worden u. A.

Nach einer ausführlichen Nachricht über die Instrumente: West Transit Instrument, Mural Circle, Meridian Circle, Prime Vertical Transit Instrument, Equatorial, die Art ihres Gebrauchs und die Reduction der damit angestellten Beobachtungen folgen diese letzteren selbst in derselben Ordnung wie vorher die Instrumente aufgezählt worden sind. Dann folgen in den beiden vorliegenden Bänden: Mean places of Stars observed, Mean Right Ascensions, Declinations and Semi-diameters of the Sun, Moon and Planets, Results of Observations with the Equatorial, Catalogue of Stars observed in 1848, 1849, 1850.

Man wird, wie schon oben gesagt, hieraus von Neuem die Grossartigkeit erkennen, mit welcher alle solche Arbeiten in Amerika betrieben werden, worauf hinzuweisen der hauptsächlichste Zweck vorliegender Anzeige an diesem Orte war und nur sein konnte. Die Wichtigkeit der Beobachtungen selbst für den eigentlichen Astronomen versteht sich von selbst.

Physik.

Das Wetter und die Wetterprophezeiung. Ein Cyklus meteorologischer Vorträge für Gebildete von Joseph Helmes, Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Celle. Hannover. Hahn. 1858. 8°.

Wir haben diese Schrift mit Interesse und Belehrung gelesen. Wenn auch ihrem Zwecke nach populär gehalten und für ein grösseres Publikum bestimmt, steht sie doch ganz auf wissenschaftlichem Standpunkte und berücksichtigt überall sorgfältig die neuesten Forschungen, verräth überhaupt, wie sehr der Herr Verfasser auf dem meteorologischen Gebiete bekannt und bewandert ist und auch selbstthätig viel in diesem Fache gearbeitet hat. Die auch in einer recht ansprechenden Sprache verfasste Schrift ist jedenfalls sehr geeignet, richtige Begriffe und Ansichten über Wetter und Wetterprophezeiung immer mehr und mehr zu verbreiten, und kann daher jedem Gebildeten, wer sich über diese Dinge wahrhaft belehren will, empfohlen werden. Der Inhalt nach seinen Hauptrubriken ist folgender: Einleitung, das Wetter eine Naturerscheinung im Grossen. Die Wärmeverhältnisse der Erde. Die Winde. Die Hydrometeore. Das Gewitter. Das Barometer und seine Schwankungen. Der Mond und die anderen himmlischen Körper in ihrem Einflusse auf das Wetter. Die Vorzeichen eines zukünftigen Wetters.

Das Resultat aller seiner Betrachtungen spricht der Herr Verfasser am Ende auf S. 248. mit folgenden Worten aus:

„Und so geben wir denn die Hoffnung überall auf, dass die genannten oder noch andere Mittel uns je befähigen sollten, ein Wetter im Voraus zu bestimmen, welches über den muthmasslichen Ablauf eines augenblicklich stattfindenden Wetters hinausliegt.“

Wir stimmen diesem Resultate natürlich aus ganzer Seele bei und haben schon längst die in demselben ausgesprochene Ansicht gehabt; aber freilich wird es immer noch Manche geben, die den Wetterzettel auf ihrem miserablen Barometer und die Angaben des hundertjährigen Kalenders für Orakelsprüche halten, und daher bei dem obigen Resultat, zu welchem sie die vorliegende lehrreiche Schrift führt, bedenklich den Kopf schütteln werden.

Anzeige.

Durch die nicht dankbar genug anzuerkennende, nach allen Seiten sich hinrichtende Fürsorge des hohen Königlichen Unterrichtsministeriums ist bei der Universität Greifswald seit nun fast zwei Jahren durch die Anstellung eines eigenen Universitäts-Mechanikus in der Person des Herrn Frauenstein einem längst gefühlten Bedürfnisse in höchst zweckmässiger Weise abgeholfen worden. Während seines Hierseins hat Herr Frauenstein für die verschiedenen Institute der Universität: nämlich das unter meiner Direction stehende astronomisch-mathematische Institut, für das physikalische Institut, überhaupt die verschiedenen naturwissenschaftlichen und namentlich auch medicinischen Institute; ferner für die verschiedenen Institute der Königlichen staats- und landwirthschaftlichen Akademie zu Eldena eine grosse Anzahl der verschiedenartigsten Instrumente in eigener neuer Ausführung geliefert und Reparaturen und Abänderungen aller Art an schon vorhandenen Instrumenten vorgenommen. Alle diese Arbeiten sind von Herrn Frauenstein zur grössten Zufriedenheit der betreffenden Instituts-Vorsteher ausgeführt worden, und derselbe ist jetzt mit der Einrichtung einer grösseren Werkstätte hier am Orte beschäftigt. Aus vollster Ueberzeugung kann ich Herrn Frauenstein allen wissenschaftlichen Instituten und Lehranstalten jeder Art, namentlich auch den Gymnasien, Realschulen, Schifffahrtsschulen u. s. w., so wie den Herren Feldmessern als einen sehr kenntnissreichen und geschickten Mann empfehlen, der mit grosser Genauigkeit und Sauberheit seiner Arbeiten möglichste Wohlfeilheit der Preise verbindet und durch Vielseitigkeit sich auszeichnet, indem er besonders auch das optische Fach mit Glück in den Kreis seiner Arbeiten zieht. Ich benutze das weit verbreitete Archiv um so lieber, Alle, welche mechanische Arbeiten ausführen zu lassen in den Fall kommen, ganz besonders auf Herrn Frauenstein aufmerksam zu machen, weil ich selbst sehr wünsche, dass es diesem geschickten Manne recht bald gelingen möge, ein grösseres mechanisches Institut am hiesigen Orte in's Leben zu rufen, was natürlich mit Erfolg nur möglich ist, wenn seine Leistungen auch ausserhalb in einem möglichst grossen Kreise die Anerkennung finden, die sie in jeder Beziehung verdienen.

Greifswald, den 1. September 1859. Grunert.

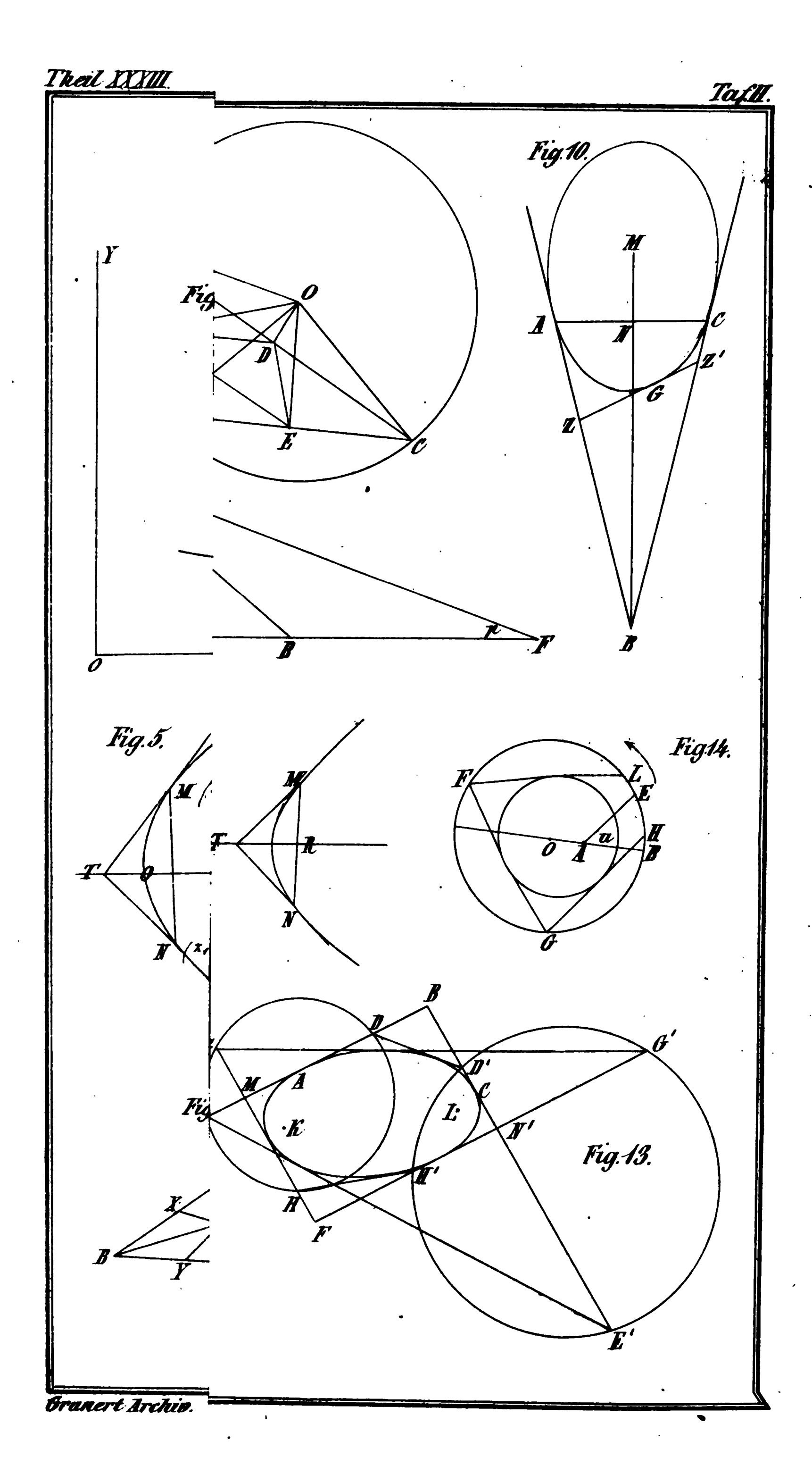
Fig. 1.

Fig. 12.

Fig. 14.

Fig. 8.

Fig. 4.


Fig. 10.
Fig. 5.
Fig. 14.
Fig. 13.



Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXII.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

L. Hoffmann, Mathematisches Wörterbuch. 9. Lief. gr. 8°. geh. Berlin. 20 Ngr.

L. Kambly, Elementar-Mathematik für den Schulunterricht bearbeitet. 1. Thl.: Arithmetik und Algebra. 4. Aufl. gr. 8°. geh. Breslau. $12\frac{1}{2}$ Ngr.

Arithmetik.

V. A. Le Besgue, Exercices d'analyse numérique. Extraits, commentaires et recherches relatifs à l'analyse indéterminée et à la théorie des nombres. Paris. 8°. 1 Thlr.

R. G. Haering, Sammlung von Aufgaben aus der niederen und höheren Arithmetik. 1s—3s Hft. à $4\frac{1}{2}$ Ngr. 4s Hft. 9 Ngr. gr. 8°. 2. u. 3. Aufl. Leipzig.

J. F. W. Herschel, Sammlung von Aufgaben aus der endlichen Differenzen- und Summenrechnung. Deutsch herausgeg. von C. H. Schnuse. gr. 8°. Braunschweig. geh. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Jos. Petzval, Integration der linearen Differentialgleichungen mit constanten und veränderlichen Coefficienten. 6. Liefer. Wien. 4°. 2. Bd. 2 Thlr. 20 Ngr.

N. Ruland, Auflösungen der in Dr. E. Heis' Sammlung von Beispielen enthaltenen Gleichungen des 1. u. 2. Grades, nebst den diophantischen Gleichungen. gr. 8°. geh. Bonn. 1 Thlr. 18 Ngr.

Geometrie.

Praktisch-geometrische Aufgabensammlung mit Auflösungen. Für Sonntags-, Gewerbs- und Fortbildungsschulen etc. Von dem Verfasser des „praktischen Geometer." gr. 8°. geh. Langensalza. $\frac{1}{3}$ Thlr.

C. Hechel, Die ebene analytische Geometrie mit zahlreichen Uebungsaufgaben, für höhere Lehranstalten bearbeitet. gr. 8⁰. geh. Riga und Leipzig. 18 Ngr.

F. A. Heissig, Lehrbuch der darstellenden Geometrie und deren Anwendungen auf Schatten-Constructionen, freie Perspective und auf das technische Zeichnen. gr. 4⁰. geh. Wien. $2\frac{1}{2}$ Thlr.

J. Hofer, Anfangsgründe der Stereometrie für Schulen und zum Selbstunterrichte. 8⁰. geh. Wien. 10 Ngr.

L. Kambly, Theorie der Harmonikalen. 4⁰. geh. Breslau. 10 Ngr.

F. v. Kieser, Ebene Geometrie. Ein Leitfaden beim Unterricht. 4. Aufl. Nach des Verfassers Tode umgearbeitet und vermehrt von W. G. F. Bohnenberger. gr. 8⁰. geh. Stuttgart. $\frac{2}{3}$ Thlr.

F. Rummer, Lehrbuch der Elementar-Geometrie mit einer Sammlung von Aufgaben. I. Thl.: Ebene Geometrie. 4. Aufl. gr. 8⁰. geh. Heidelberg. 14 Ngr.

G. Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. In-8⁰. Paris. 5 fr.

W. Schell, Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Leipzig. 8⁰. Mit eingedruckten Holzschn. 24 Ngr.

Trigonometrie.

E. Noeggerath, Leitfaden für den Unterricht in der ebenen Trigonometrie. gr. 8⁰. geh. Saarbrücken. $7\frac{1}{2}$ Ngr.

Geodäsie.

J. P. E. L. Jaeger, Die Polygonometrie und deren Anwendung auf Vermessung, Berechnung, Zeichnung etc. grosser Waldungen nebst Anleitung zum trigonometrischen Höhenmessen. gr. 8⁰. geh. Marburg. 25 Ngr.

Mechanik.

W. H. Besant, A Treatise on Hydrostatics and Hydrodynamics. London. 8⁰. 3 Thlr. 18 Ngr.

E. Clarinval, Leçons d'hydraulique. Étude des moteurs hydrauliques, comprenant les conditions théoriques et pratiques de leur construction et de l'établissement des usines hydrauliques. Paris. 8⁰. Mit 6 Taf. 1 Thlr. 20 Ngr.

Courtois, Principes d'hydraulique rationnelle, applicables aux courants naturels, tels que les rivières et les fleuves. Paris. 8⁰. Mit 1 Taf. 1 Thlr.

Astronomie.

M. O. Ballo, Einfluss der atmosphärischen Ebbe und Fluth auf den Barometerstand und die astronomische Refraction. Königsberg. 4°. 20 Ngr.

J. F. Encke, Ueber die Bestimmung des Längen-Unterschiedes zwischen den Sternwarten von Brüssel und Berlin, abgeleitet auf telegraphischem Wege im Jahre 1857. gr. 4°. cart. Berlin. 22 Ngr.

Handatlas der Erde und des Himmels. Neu red. Ausgabe. 38—40. Lief. Imp.-Fol. Weimar. à 1/3 Thlr.

J. Kepleri, Astronomi, opera omnia. Ed. Ch. Frisch. Vol. II. Pars II. Mit eingedr. Holzschn. u. 4 lithograph. pp. Frankfurt a. M. 8°. 3 Thlr.

M. A. F. Prestel, Das astronomische Diagramm, ein Instrument, mittelst dessen der Stand und Gang einer Uhr, das Azimuth terrestrischer Gegenstände, die Mittagslinie etc. bestimmt und andere Aufgaben schnell, sicher und bequem ohne Rechnung gelöst werden können. gr. 8°. geh. Mit 2 Tabellen in Imp.-Fol. In Mappe. Braunschweig. 3 2/3 Thlr.

J. F. Staschek, Die erleuchtete Vorhalle zum Tempel des Unendlichen. Anleitung zur näheren Kenntniss der sichtbaren Himmelskörper etc. gr. 8°. geh. Leitomischl und Leipzig. geh. 1 2/3 Thlr.

T. W. Webb, Celestial Objects for Common Telescopes. 12. London. Cloth. 7 s.

Physik.

P. Blaserna, Ueber den inducirten Strom der Nebenbatterie. Lex.-8°. geh. Wien. 2 Ngr.

O. Buchner, Die Feuermeteore, insbesondere die Meteoriten historisch und naturwissenschaftlich betrachtet. Giessen. 8°. 20 Ngr.

F. E. A. Charpentier, De la pesanteur terrestre. Alençon et Paris. 8°.

Coulvier-Gravier, Recherches sur les météores et sur les lois qui les régissent. Paris. 8°. Mit Abbildgn. 3 Thlr. 10 Ngr.

P. Foissac, Meteorologie mit Rücksicht auf die Lehre vom Kosmos und in ihren Beziehungen zur Medicin und allgemeinen Gesundheitslehre. Deutsch bearbeitet von A. H. Emsmann. gr. 8°. geh. Leipzig. 3 1/3 Thlr.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1856. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. XII. Jahrg. Red. von A. Krönig. 2 Abthlgn. Berlin. 8°. 4 Thlr. 15 Ngr.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1857. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. XIII. Jahrg. Red. von A. Krönig u. O. Hagen. 1. Abth. gr. 8°. geh. Berlin. 1½ Thlr.

Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Von K. Kreil. 6. Bd. Jahrg. 1854. gr. 4°. geh. Wien. 8 Thlr.

W. Lachmann, Die Jahreszeiten in ihrer klimatischen und thermischen Begrenzung, ein Beitrag zur Meteorologie. gr. 8°. geh. Braunschweig. 12 Ngr.

J. Lamont, Untersuchungen über die Richtung und Stärke des Erdmagnetismus an verschiedenen Punkten des südwestlichen Europa. München, Franz. 4°. Mit 13 Steintaf. 4 Thlr. 20 Ngr.

M. F. Maury, The Physical Geography of the Sea. An entirely new edit. with Addenda. 8°. London. 2 Thlr.

A. Vignotti, Recherches et résultats d'expériences relatifs à la mise au service des chronoscopes électro-balistiques. Paris. 8°. Mit 4 Taf.

Vermischte Schriften.

F. Arago's sämmtliche Werke. Herausgeg. v. W. G. Hankel. 7r Bd. gr. 8°. geh. Leipzig. 1⅔ Thlr.

F. Arago, Oeuvres complètes. Publiées d'après son ordre etc. Tome XII. gr. 8°. Paris und Leipzig. geh. 2 Thlr.

Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 17. Bd. gr. 4°. carton. Wien. 10 Thlr.

Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Register zu den Bänd. 21—30. Lex.-8°. geh. Wien. 10 Ngr.

